Intensivkurs – Mathematik: Zahlenbereiche				
Thema	**Gesetze und Regeln**		**Musterbeispiele**	
Bezeichnungen	$\mathbb{N} = \{0; 1;2;3;4...\}$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0	$\varnothing$	leere Menge (Menge, die keine Elemente enthält)
	$\mathbb{N}^* = \{1;2;3;4...\}$	Menge der natürlichen Zahlen ohne 0, d.h. der positiven ganzen Zahlen	$\wedge$	und (logisches und, konjunktiv)
	$\mathbb{Z} = \{...;-2;-1;0;1;2;...\}$	Menge der ganzen Zahlen	$\vee$	oder (logisches oder, disjunktiv)
	$\mathbb{Z}^* = \{...;-2;-1;1;2;...\}$	Menge der ganzen Zahlen ohne 0	$\Rightarrow$	daraus folgt
	$\mathbb{Z}_+^* = \{0;1;2;...\}$	Menge der positiven ganzen Zahlen	$\Leftrightarrow$	genau dann, wenn
	$\mathbb{Z}_- = \{...;-2;-1;0\}$	Menge der negativen ganzen Zahlen einschließlich 0	$=$	ist gleich
	$\mathbb{Z}_-^* = \{...;-2;-1\}$	Menge der negativen ganzen Zahlen	$<$	ist kleiner als
	$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	$3 < 4$	3 ist kleiner als 4
	$\mathbb{Q}^*$	Menge der rationalen Zahlen ohne 0	$>$	ist größer als
	$\mathbb{Q}_+^*$	Menge der positiven rationalen Zahlen ohne 0	$4 > 3$	4 ist größer als 3
	$\mathbb{Q}_-^*$	Menge der negativen rationalen Zahlen ohne 0	$\leq;\leqq$	ist kleiner oder gleich
	$\mathbb{Q}_-$	Menge der negativen rationalen Zahlen einschließlich 0	$a \leq 3$	a ist kleiner oder gleich 3
	$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	$\geq;\geqq$	ist größer oder gleich
	$\mathbb{R}_+$	Menge der positiven reellen Zahlen einschließlich 0	$b \geq 2$	b ist größer oder gleich 2
	$\mathbb{R}^*$	Menge der reellen Zahlen ohne 0	$-2 \leq x \leq 3$	Intervall [-2,3] (x kann alle Werte von -2 bis 3 annehmen) einschließlich der Grenzen
	$\mathbb{R}_+^*$	Menge der positiven reellen Zahlen ohne 0	$-2 < x \leq 3$	Intervall]-2,3] (x kann alle Werte größer -2 bis 3 annehmen) einschließlich der oberen Grenzen
	$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	$D=\{x \mid -2 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$	Der Definitionsbereich D ist die Menge aller x, für die gilt: x ist größer oder gleich -2 und x ist kleiner oder gleich 3 in der Grundmenge der reellen Zahlen.
	G	Grundmenge		
	D	Definitionsmenge		
	W	Wertemenge		
	$\in$	ist Element von		
	$a \in M$	a ist Element der Menge M1		
	$\notin$	ist nicht Element von		
	$b \notin M$	b ist nicht Element der Menge M2		
	A,B,C,M_1,M_2,M_3	Mengenbezeichnung mit Großbuchstaben		
	$\{a, b, c, ..., 4, 5, 6..\}$	Menge mit den Elementen a, b, c, ..., 4, 5, 6...		
	$\subset$	ist Teilmenge von		
	$A \subset B$	A ist Teilmenge von B		
	$\not\subset$	ist nicht Teilmenge von		
	$B \not\subset A$	B ist nicht Teilmenge von A		
	$\cap$	geschnitten mit		
	$A \cap B$	A geschnitten mit B (Schnittmenge von A und B)		
	$\cup$	vereinigt mit		
	$A \cup B$	A vereinigt mit B		
	$\setminus$	ohne		
	$A \setminus B$	A ohne B (Differenzmenge von A und B)		

Intensivkurs – Mathematik: Zahlenbereiche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Zahlenbereiche

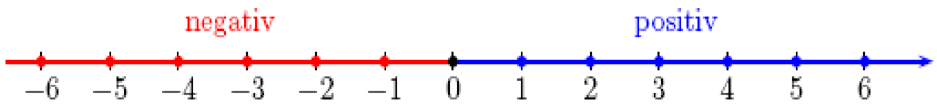
Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Zunächst kennen wir nur die natürlichen Zahlen 0,1,2,3,...

- Mit diesen Zahlen kann man wunderschön **Additionen** und **Multiplikationen** ausführen, es werden immer wieder natürliche Zahlen als Ergebnis erscheinen.
- Man sagt: Die natürlichen Zahlen sind hinsichtlich der Addition und Multiplikation abgeschlossen.

Bei der **Subtraktion** natürlicher kann es schon zu Problemen führen. Während 12 - 4 noch im Bereich der natürlichen Zahlen lösbar ist kann man das bei 4 – 12 nicht mehr. Aus diesem Grund führte man die negativen ganzen Zahlen ein.

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$



Für die negativen ganzen Zahlen verlängert man den Zahlenstrahl, der bei 0 beginnt nach der linken Seite von 0 aus gesehen. Die Zahlen, die man da erhält, sind die **Gegenzahlen** der natürlichen Zahlen

- Mit diesen Zahlen kann man wunderschön **Additionen** und **Multiplikationen** und **Subtraktion** ausführen, es werden immer wieder ganze Zahlen (positive oder negative) als Ergebnis erscheinen.
- Man sagt: Die ganzen Zahlen sind hinsichtlich der Addition und Multiplikation und Subtraktion abgeschlossen.

Bei der **Division** ganzer Zahlen kommt es wieder zu Problemen. Während 12: 4 , -8:2, 120:-10 noch im Bereich der ganzen Zahlen lösbar ist ist es bei 13 : 5 nicht mehr. Aus diesem Grund führte mussten die Zahlen nochmals erweitert werden.
Eine Besonderheit solcher Divisionen ist es, dass man immer nach 'Ganzen' und einem 'Rest', der kleiner als 1 ist, unterscheiden kann. Die Ganzen können auch 0 sein.

Aus diesem Grund führte man die rationalen Zahlen ein, die dazu da sind, 1 Ganzes weiter zu unterteilen.

Für alle a $\in \mathbb{Z}$ gilt:

$$0 - a = -a$$
$$-(-a) = a$$
$$(-1) \cdot a = -a$$

Insbesondere:

$$-0 = +0 = 0$$
$$-(-1) = 1$$
$$(-1) \cdot (-1) = 1.$$

Für alle a,b $\in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a + (-b) = a - b$$
$$a - (+b) = a - b$$
$$a - (-b) = a + b$$

$$-(a + b) = -a - b$$
$$-(a - b) = -a + b$$
$$-(-a + b) = a - b$$
$$-(-a - b) = a + b$$

Für alle a,b $\in \mathbb{Z}$ gilt:

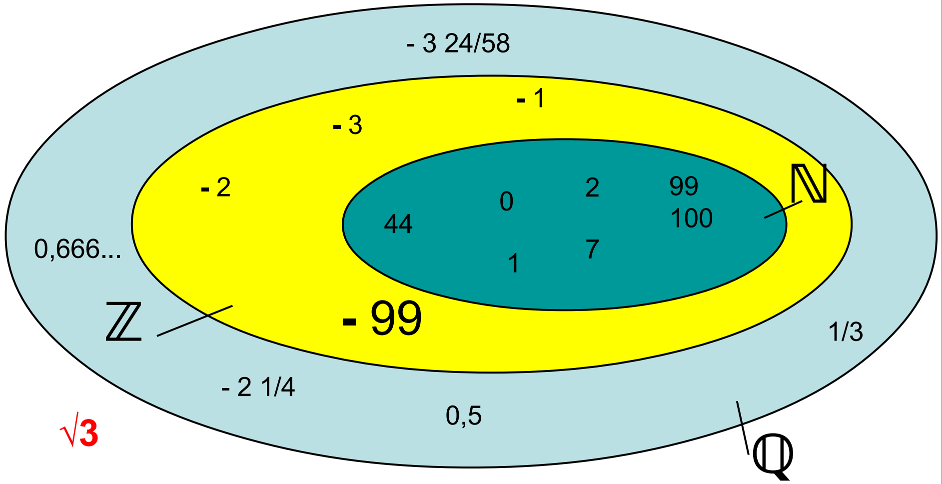
$$(-a) * b = -(a * b)$$
$$a * (-b) = -(a * b)$$
$$(-a) * (-b) = a * b$$

$$(-a) : b = -(a : b)$$
$$a : (-b) = -(a : b)$$
$$(-a) : (-b) = a : b$$

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Intensivkurs – Mathematik: Zahlenbereiche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Zahlenbereiche	**Die rationalen Zahlen** ℚ	



Rationale Zahlen verlängern nicht den Zahlenstrahl, oder erzeugen einen neuen, sondern machen den Zahlenstrahl der ganzen Zahlen dichter, indem zwischen zwei ganzen Zahlen unendlich viele rationale Zahlen eingefügt werden. Alle die, die bei einer Division zwischen den beiden ganzen Zahlen liegen und ein Rest beim Dividieren übrig bleibt.

- Mit diesen Zahlen kann man wunderschön **Additionen** und **Multiplikationen, Subtraktion** und **Divisionen** ausführen, es werden immer wieder rationale Zahlen (positive oder negative) als Ergebnis erscheinen.
- Man sagt: Die rationalen Zahlen sind hinsichtlich der Addition und Multiplikation, Subtraktion und Division abgeschlossen.

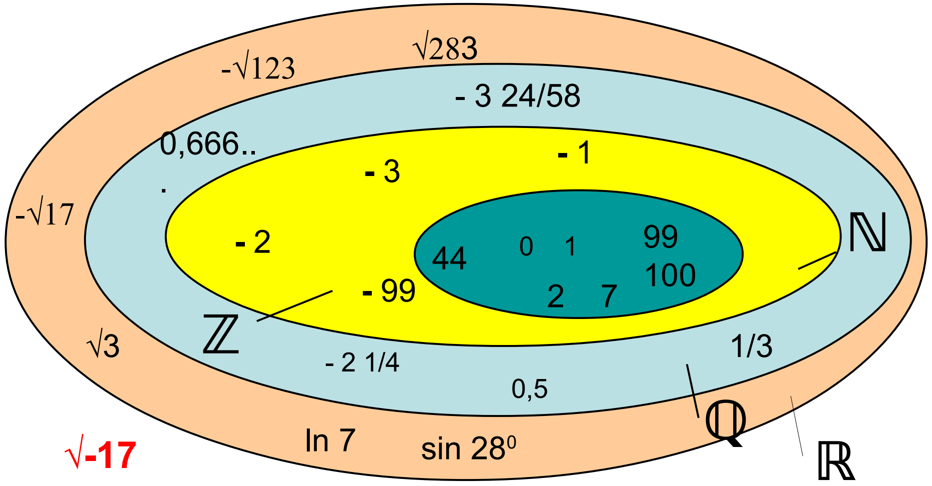
Bei dem **Potenzieren** rationaler Zahlen, die als mehrfache Multiplikation definiert ist entstehen immer wieder rationale Zahlen. $(2/3)^2 = 4/9$. Leider ist das bei der Umkehroperation des Potenzierens, dem **Wurzelziehen** nicht so. Es lässt sich sehr leicht zeigen, das bereits $\sqrt{2}$ zu keiner rationalen Zahl führt.

Damit zeigt sich, dass außer den rationalen Zahlen noch andere existieren müssen, die reellen Zahlen.

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Intensivkurs – Mathematik: Zahlenbereiche

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Zahlenbereiche	**Die reellen Zahlen** ℝ	



Die reellen Zahlen befinden sich zwischen den rationalen Zahlen und man kann sagen dass sich zwischen zwei rationalen Zahlen unendlich viele reelle Zahlen befinden. Eine der bekanntesten reellen Zahlen ist π (Pi).

- Mit diesen Zahlen kann man wunderschön **Additionen** und **Multiplikationen, Subtraktion, Divisionen** und im <u>positiven Bereich</u> Wurzeln berechnen, es werden immer wieder reelle Zahlen (positive oder negative) als Ergebnis erscheinen.
- Man sagt: Die <u>positiven reellen Zahlen</u> sind hinsichtlich der Addition und Multiplikation, Subtraktion, Division und des Wurzelziehens abgeschlossen.

Die obige Mengendarstellung zeigt außerdem:

- Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl.
- Jede ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl.
- Jede rationale Zahl ist auch eine reelle Zahl.

Allerdings versagen auch die reellen Zahlen, wenn es um das Wurzelziehen aus negativen Zahlen geht, ganz gleichgültig, ob des negative ganze Zahlen, negative rationale Zahlen oder negative reelle Zahlen sind, denn welche Zahl mit sich selbst multipliziert ergibt schon -2, wenn (-) * (-) immer + ergibt.
Aus diesem Grund musste der Zahlenbereich nochmals erweitert werden, und zwar um die komplexen Zahlen.

Intensivkurs – Mathematik: Zahlenbereiche		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Zahlenbereiche	**Die komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$	
	Dazu war es notwendig eine zweite Zahlengerade zu definieren, die senkrecht auf der der reellen Zahlen steht und die Rechenoperationen Addieren, Multiplizieren, Subtrahieren, Dividieren, Potenzieren und Wurzelziehen völlig neu definieren mit einer wichtigen Bedingung: Wenn es sich bei einer komplexen Zahl um den Spezialfall einer reellen Zahl handelt, müssen alle bisherigen Rechenoperationen mit den neuen Definitionen übereinstimmen. Die komplexen Zahlen sind bezüglich aller Rechenoperationen abgeschlossen das heißt, alle Ergebnisse sind immer wieder komplexe Zahlen.	

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH