1 Das Zählprinzip

1.1. Die Produktregel

Produktregel (Multiplikationsprinzip)
Lässt sich ein Objekt a aus einer Menge A auf m Arten auswählen und ein Objekt b aus einer anderen Menge B auf n Arten auswählen, so lässt sich a und b (sowohl a als auch b) auf m • n Arten auswählen

Die beiden Menge A und B stehen in dieser Aussage auch dafür, dass die Auswahl von A und die Auswahl von B unabhängig sind. Die einfachste Veranschaulichung dieses Prinzips ist:
Hat man 3 Hosen und 5 Hemden, kann man sich auf 15 verschiedene Arten kleiden
Diese Produktregel lässt sich aber auch auf vermeindlich abhängige Ereignisse anwenden, man muss die Ereignisse nur so formulieren, dass sie voneinander unabhängig sind. In einer Urne befinden sich 5 rote 6 blaue und 4 gelbe Kugeln. Es soll ohne Zurücklegen gezogen werden.
Wie viele Möglichkeiten gibt es eine blaue Kugel zu ziehen: Diese Frage wird jeder mit 6 beantworten
Wie viele Möglichkeiten gibt es als zweite Kugel eine blaue zu ziehen. Da wird es schon schwieriger, da man nicht weiß, welche als erste Kugel gezogen wurde und deshalb die Konstellation der Kugeln in der Urne nicht kennt.
Wie viele Möglichkeiten gibt es als zweite Kugel eine blaue zu ziehen, wenn als erste eine gelbe gezogen wurde. Diese Frage ist klar zu beantworten: In der Urne befinden sich noch 6 blaue, also gibt es 6 Möglichkeiten.
Für die zweite Ziehung hat man sich eine neue Ausgangsmenge vorgestellt und von der Anzahl bestimmt, obwohl die Ausgangsmenge von der Ziehung der ersten Kugel abhängt Deshalb kann man sagen, dass die Anzahlen erst eine gelbe und dann eine blaue zu ziehen 4 / 6 beträgt

Zunächst unterscheidet man bei den Formeln der Kombinatorik in zwei Gruppen:
1. Ohne Wiederholungen: Jede Kugel ist von der anderen unterscheidbar $k \leq n$
1.1. Permutation: Es werden alle Kugeln ausgewählt und angeordnet $k = n$
1.2. Variation: Es werden k Kugeln ausgewählt und angeordnet $k < n$
1.3. Kombination: Es werden k Kugel auf einmal gezogen $k < n$

2. Mit Wiederholung: Nicht alle Kugeln sind unterscheidbar (Wiederholung muss nicht unbedingt „Zurücklegen“ sein, es können auch mehrere Kugeln des gleichen Typs in der Urne sein)
2.1. Permutation: Es gibt Kugeln, die sich nicht unterscheiden lassen $k = n$
2.2. Variation: Jede Kugel kann beliebig oft gezogen werden, die Ziehung wird in einer Reihe notiert
2.3. Kombination: Jede Kugel kann beliebig oft auftreten, ohne dass die Position eine Rolle spielt. Es zählt nur die Anzahl der Eigenschaften, nicht wann die Kugel gezogen wurde.

Die Kombinatorikformeln sind Bestandteil dieser Produktregel.
Zu jedem Ziehungsmodell, bei dem k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln gezogen werden gibt es ein duales Ziehungsmodell, bei dem k Kugeln auf n Urnen verteilt werden.

Erfolgt die Ziehung mit Wiederholung, sind im dualen Ziehungsmodell mehrere Kugeln in einer Urne zugelassen, erfolgt die Ziehung ohne Wiederholung, kann nur eine Kugel in eine Urne gelegt werden.

Erfolgt die Ziehung „mit Berücksichtigung der Reihenfolge" (Variation) sind im dualen Urnenmodell alle Kugeln unterscheidbar, erfolgt die Ziehung „ohne Berücksichtigung der Reihenfolge" (Kombination) sind die Kugeln nicht unterscheidbar.

1.1. Die Summenregel

Summenregel (Additionsprinzip)
Lässt sich ein Objekt a aus einer Menge A auf m Arten auswählen und ein Objekt b aus einer anderen Menge B auf n Arten auswählen, so lässt sich a oder b (entweder a oder b) auf m + n Arten auswählen.

- Zerlegen einer Aufgabenstellung in durchschnittsfremde Teilaufgaben.
- Ermitteln der Anzahlen für jede Teilaufgabe.
- Addieren aller Einzelanzahlen.

Besonderer Augenwerk ist hier auf eine durchschnittsfremde Zerlegung zu achten, da anderenfalls bestimmte Konstellationen doppelt gezählt werden. Außerdem muss die Zerlegung vollständig sein, es darf keine Teilereignisse geben, die nicht mit erfasst sind.

Das ist der zweite Teil des Zahlprinzips. In dieser Summenregel werden alle Aufgabenstellungen zusammengefasst. in denen mehrere Elementarereignisse auftreten:

ein Element aus A, ein **oder** zwei Elemente aus B.......zwei Elemente aus M wird zerlegt in:

ein Element aus A, ein Elemente aus B.......zwei Elemente aus M **und**
ein Element aus A, zwei Elemente aus B.......zwei Elemente aus M

mindestens zwei Elemente aus A, ein Element aus B......zwei Elemente aus M wird zerlegt in:
zwei Elemente aus A, ein Element aus B......zwei Elemente aus M **und**
drei Elemente aus A, ein Element aus B......zwei Elemente aus M **und**
vier Elemente aus A, ein Element aus B......zwei Elemente aus M **und**
. . . . . **und**
n Elemente aus A. ein Element aus B......zwei Elemente aus M

Man kann wohl als Grundidee sich folgendes merken:

Die Summenregel zerlegt das Gesamtereignis in einzelne Teilereignisse, die mit der Multiplikationsregel zu lösen sind.

2 Permutation

Eine Anordnung (nur Reihenfolge) sämtlicher Elemente einer endlichen Menge heißt auch Permutation.
Für Permutationen hat sich eine Listenschreibweise eingebürgert.
Sämtliche Permutationen von S = {a, b, c} sind:
(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a). (c, a. b), (c. b, a).

Bei einer **Permutation**
• müssen immer **alle Elemente**
• in einer Reihenfolge **angeordnet** werden.

2.1. Permutation ohne Wiederholung

- Alle **n-elementigen Tupel**, die
- aus einer **n-elementigen Menge** erzeugt werden können
- mit **n-verschiedenen Elementen**.

2.1.1. Voraussetzungen:

- **Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander,**
- **Es müssen alle (n) Elemente ausgewählt werden.**
  (am Ende des Experiments ist die Urne leer)
- **Ein Element kann nicht mehrmals ausgewählt werden.**
  (es wird keine Kugel zurückgelegt, also keine Wiederholung und es gibt auch keinen zwei gleichen Elemente)
- **Die Reihenfolge muss berücksichtigt werden**
  (die Reihenfolge (1,2,3) ist von (2,1,3) zu unterscheiden, würde die Reihenfolge nicht berücksichtigt werden, wäre das identisch mit nicht unterscheidbaren Elementen)

Die allgemeine Fragestellung lautet:

Wie viele Möglichkeiten gibt es, n verschiedene Dinge der Reihe nach anzuordnen?

2.1.2. Interpretation:

- Anzahl der Möglichkeiten, eine geordnete Stichprobe von n Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln ohne Zurücklegen zu ziehen.
- Anzahl der Möglichkeiten, n verschiedene (unterscheidbare) Objekte so auf n Urnen zu verteilen, dass in jeder Urne ein Objekt liegt
- Anzahl der n-stelligen Sequenzen von n verschiedenen Zeichen, in denen jedes Zeichen genau einmal vorkommt.

2.1.3. Formel:

Jede solche Anordnung wird eine Permutation genannt. Zu einer Menge mit n verschiedenen Elementen gibt es nach dem Zählprinzip $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ Permutationen. Dieses Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n wird abgekürzt n! geschrieben und n Fakultät ausgesprochen.
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ für $n > 1$.

Die Anzahl P_{oW} der Permutation ohne Wiederholung aus einer Menge mit n Elementen beträgt:

$$\boxed{P_{oW} = n!}$$

2.2. Permutation ohne Wiederholung

im vorigen Abschnitt wurde eine Permutation als eine Anordnung von n verschiedenen Elementen zu einem n-Tupel beschrieben ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Im Folgenden soll zugelassen sein, dass Elemente gleich sein können. Es geben sich dann *Permutationen mit Wiederholung*.

- Alle **n-elementigen Tupel**, die aus einer
- **n-elementigen Menge** erzeugt werden können
- mit n_1, n_2, ...n_k gleichen Elementen

2.2.1. Voraussetzungen:

- **Mindestens 2 Elemente der Ausgangsmenge sind identisch,**
  d.h. es gibt Elemente der Ausgangsmenge, die sich nicht voneinander unterscheiden lassen .
- **Es müssen alle (n) Elemente ausgewählt werden.**
  (nach dem Experiment ist die Urne leer)
- Ein Individualelement kann nicht mehrmals ausgewählt werden, **ein Element mit gleicher Eigenschaft hingegen schon**. Liegen z.b. 2 rote Kugeln in der Ausgangsmenge, so muss jede der beiden roten Kugeln ausgewählt werden (mit Wiederholung), eine dritte rote Kugel kann aber nicht ausgewählt werden.
- Die **Reihenfolge der unterscheidbaren Elemente** muss berücksichtigt werden.

2.2.2. Interpretation:

- Anzahl der Möglichkeiten, eine geordnete Stichprobe von k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln mit zurücklegen so zu ziehen, dass die Kugel am genau km - mal gezogen wird.
- Anzahl der Möglichkeiten, k unterscheidbare Objekte auf n Urnen so zu verteilen, dass in der m – ten Urne k_m Objekte liegen.

2.2.3. Formel:

Die Anzahl P_{mW} der Permutation mit Wiederholung aus einer Menge mit n Elementen beträgt:

$$\boxed{P_{mW} = \frac{n!}{n_1! \bullet n_2! \bullet \ldots \bullet n_k!}}$$

mit $n > k$ und $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

3 Variation (mit Beachtung der Reihenfolge)

Jede mögliche Anordnung von k Elementen aus n vorhandenen Elementen mit Berücksichtigung der Reihenfolge heißt Variation dieser Elemente (Variation von n Elementen zur k-ten Klasse). Solche Auswahlen mit Beachtung der Reihenfolge werden auch als geordnete Stichproben bezeichnet.

Bei einer Variation müssen immer
- **k – Elemente** ausgewählt
- aus einer **n-elementigen Menge**
- die **angeordnet** werden (mit Beachtung der Reihenfolge)

Im Unterschied zur Permutation werden hier nicht alle Elemente einer Menge ausgewählt, aber die ausgewählten werden in eine Reihenfolge gebracht.

3.1. Variation ohne Wiederholung

Gegeben seine n verschiedene Elemente
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, **k Elemente**
- unter **Berücksichtigung der Reihenfolge** anzuordnen.
- jedes Element **nur einmal** benutzt werden darf

k-Elemente lassen sich in k! verschiedenen Anordnungen auswählen. Hier sind aber nicht k – Elemente zur Verfügung, sondern n – Elemente mit n > k. Damit lassen sich aus den n – Elementen zunächst verschiedene Gruppen zu k – Elementen zusammenstellen.

- Alle k – Permutationen, die aus einer
- n – elementigen Menge erzeugt werden können

3.1.1. Voraussetzungen:

- Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander.
- Es werden einige (k) Elemente ausgewählt.
- Ein Element kann nicht mehrmals ausgewählt werden.
  Beim Ziehen ohne Zurücklegen muss k ≤ n sein, da irgendwann die Urne leer ist.
- Die Reihenfolge muss berücksichtigt werden.

3.1.2. Interpretation:

- Anzahl der Möglichkeiten k ≤ n Elemente aus einer Urne mit n Elementen auszuwählen, wobei **die gezogene Kugel nicht wieder zurückgelegt** werden
- 4 Anzahl der Möglichkeiten, k ≤ n verschiedene (unterscheidbare) Objekte auf n Urnen zu verteilen, wobei in **jeder Urne nur 1 Objekt** liegt.
  (das schließt ein, dass einige Urnen leer bleiben)
- Anzahl der k – stelligen Sequenzen aus n verschiedenen Zeichen.

3.1.3. Formel:

Die Anzahl V_{oW} der k – Variationen ohne Wiederholung aus einer Menge mit n Elementen (k < n) beträgt

$$\boxed{V_{oW} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Diese Formel kann man aus der Permutation folgendermaßen ableiten: Es werden k Objekte in Reihe gebracht. Damit verbleiben n – k Objekte in der Urne ohne weiter unterschieden zu werden. Damit n! durch (n – k) nicht unterscheidbare Objekte. => Permutation mit Wiederholung

Die <u>Permutationen ohne Wiederholung</u> lassen sich als Sonderfall für k = n ansehen. Soll die Formel allgemein gelten, so muss $\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ sein. Es zeigt sich wieder, dass es sinnvoll ist, 0! = 1 zu setzen.

3.2. Variation mit Wiederholung

Gegeben seien n verschiedene Elemente

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente
- unter Berücksichtigung der Reihenfolge anzuordnen,
- wenn jedes Element beliebig oft aber höchstens k mal wiederholt werden darf
  (Beachte: k kann auch größer als n sein)

Bildet man aus einer Menge mit n Elementen k – Tupel und können Elemente der Menge mehrfach vorkommen, dann heißt ein solches k-Tupel eine *Variation k – ter Ordnung* von *n Elementen mit Wiederholung*. Nach dem Zählprinzip gibt es $\underbrace{n \cdot n \cdot \quad \cdot n}_{k\,-\,\text{mal}}$ solcher Variationen mit Wiederholung

- Alle k – elementigen Tupel die aus einer
- n – elementigen Menge erzeugt werden können

3.2.1. Voraussetzungen:

- **Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander**.
- **Es werden einige (k) Elemente ausgewählt**
- Beim Ziehen mit Zurücklegen kann k > n sein, da jeder Versuch die gleichen Bedingungen hat wie der erste Versuch, deshalb hat jeder Versuch die gleiche Wahrscheinlichkeit 1/n und das bei k Versuchen.
- **Ein Element kann mehrmals ausgewählt werden**.
- **Die Reihenfolge muss berücksichtigt worden**

3.2.2. Interpretation:

- Anzahl der Möglichkeiten, eine geordnete Stichprobe von k Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln mit Zurücklegen zu ziehen.
- Anzahl der Möglichkeiten, k verschiedene (unterscheidbare) Objekte auf n Urnen zu verteilen, wobei **jede Urne beliebig viele Objekte** aufnehmen kann
- Anzahl der k - stelligen Sequenzen, in denen jede Stelle mit irgendeinem von n verschiedenen, beliebig oft wiederholbaren Zeichen besetzt ist

3.2.3. Formel:

Die Anzahl V_{mW} der k – Variationen mit Wiederholung aus einer Menge mit n Elementen beträgt

$$\boxed{V_{mW} = n^k}$$

Beachte: Bei einer k – Variation mit Wiederholung aus einer Menge mit n Elementen kann k > n sein.

4 Kombination (ohne Beachtung der Reihenfolge)

Jede mögliche Anordnung aus n vorhandenen Elementen eine Gruppe von k Elementen herauszuziehen heißt Kombination dieser Elemente. Auf die Reihenfolge der Elemente innerhalb der Gruppe soll es dabei nicht ankommen. Rot-weiss-grün soll als das gleiche Element wie grün-weiss-rot, weiss-grün-rot usw. angesehen werden. Auswahlen, bei denen die Reihenfolge keine Rolle spielt heißen auch ungeordnete Stichproben

Bei einer Kombination werden
- k Elemente ausgewählt,
- die nicht angeordnet werden (ohne Beachtung der Reihenfolge)

4.1. Kombination ohne Wiederholung

Gegeben seien n verschiedene Elemente.

- Wie viele Möglichkeiten gibt es. k Elemente
- ohne Berücksichtigung der Reihenfolge , auf einmal zu ziehen und jedes Element nur einmal benutzt werden darf

Bei einer konkreten Kombination wird jedes der n Objekte genau einmal oder gar nicht ausgewählt, deswegen handelt es sich um Kombinationen ohne Wiederholung (= ohne Zurücklegen).

- Alle **k-Teilmengen** die aus einer
- **n-elementigen Menge** erzeugt werden können

4.1.1. Voraussetzungen:

- Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander.
- Es werden einige (k) Elemente ausgewählt
- Ein Element kann nicht mehrmals ausgewählt werden.
- Die Reihenfolge spielt keine Rolle

Bildet man aus einer Menge mit n Elementen k – elementige Teilmengen mit k < n und verschiedenen Elementen, dann heißt ein solches k – Tupel eine Kombination k – ter Ordnung von n Elementen ohne Wiederholung.

4.1.2. Interpretation:

- Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge zu ziehen ($k \leq n$). Die Kugeln können gleichzeitig gezogen werden.
- Anzahl der Möglichkeiten, k gleiche (nicht unterscheidbare) Kugeln auf n unterscheidbare Urnen zu verteilen, wobei jede Urne höchstens eine Kugel erhalten kann.
- Anzahl der n – stelligen Sequenzen mit k-Mal dem Zeichen "1" und (n-k)-Mal dem Zeichen "0".
- Anzahl der k – elementigen Teilmengen einer n – elementigen Menge.

4.1.3. Formel:

Die Anzahl K_{ow} der k – Kombinationen ohne Wiederholung aus einer Menge mit n Elementen ist

$$\boxed{K_{oW} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

Diese Formel kann man aus der Permutation folgendermaßen ableiten: Es werden k Objekte mit der einen Eigenschaft gezogen und n – k Objekte mit der anderen Eigenschaft. Die jeweiligen Objekte sind untereinander nicht unterscheidbar. Damit gibt es k Objekte, die nicht unterschieden werden können und n – k Objekte, die nicht unterschieden werden können. => Permutation mit Wiederholung

In diese Gruppe fallen auch alle Ereignisse, die mit „... auf einmal gezogen.“ angegeben werden. Da ist weder eine Reihenfolge nachweisbar, noch eine Wiederholung oder Zurücklegen möglich.

ACHTUNG ! Ein einzelner Binomialkoeffizient berechnet nur eine Anzahl. Da bei der Definition des Binomialkoeffizienten ein Bruch auftritt, wird oft irrtümlich angenommen, dass es sich dabei bereits um eine Wahrscheinlichkeit handelt.

4.2. Kombination mit Wiederholung

Gegeben seien n verschiedene Elemente.

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, **k Elemente**
- **ohne Berücksichtigung der Reihenfolge**, auf einmal zu ziehen und
- jedes Element kann **beliebig oft** aber höchstens k mal benutzt werden.

- Alle **k-Kombinationen**. die aus einer
- **n-elementigen Menge** erzeugt werden können

4.2.1. Voraussetzungen:

- Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander
- Es werden einige (k) Elemente ausgewählt
- Ein Element kann mehrmals ausgewählt werden.
  Beim Ziehen mit Zurücklegen kann k > n sein, da jeder Versuch die gleichen Bedingungen hat, wie der erste Versuch.
- Die Reihenfolge spielt keine Rolle

4.2.2. Interpretation:

- Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Kugeln mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge (ungeordnete Stichprobe) zu ziehen, wobei k > n sein kann.
- Anzahl der Möglichkeiten, k gleiche (nicht unterscheidbare) Kugeln auf n unterscheidbare Urnen zu verteilen, wobei jede Urne mehrere Kugeln erhalten kann und k > n möglich ist.

4.2.3. Formel:

Die Anzahl K_{mW} der k – Kombinationen mit Wiederholung aus einer Menge mit n Elementen ist

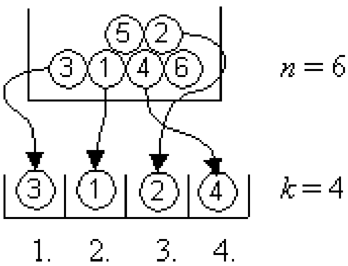
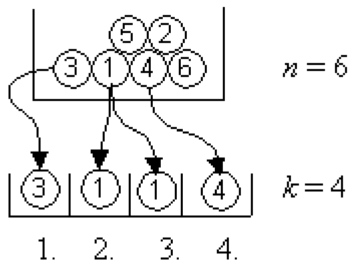
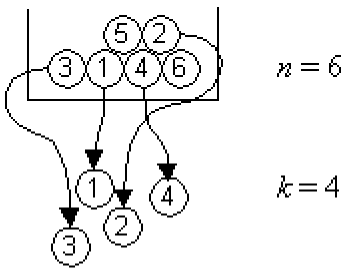
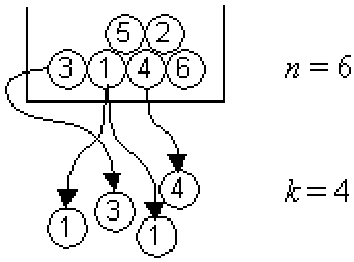
$$\boxed{K_{mW} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}}$$

Dabei handelt es sich um eine Anordnung, die den Laplace – Regeln nicht genügt und wird deshalb in der Schule nicht behandelt. dh. die Formel liefert zwar die Anzahl der möglichen Vertauschungen, aber die Vertauschungen treten mit unterschiedlicher Häufigkeit auf und sind deshalb für die Berechnung einer Wahrscheinlichkeit nicht brauchbar

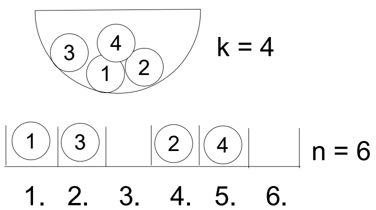
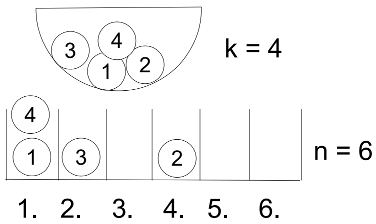
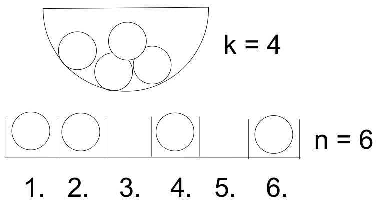
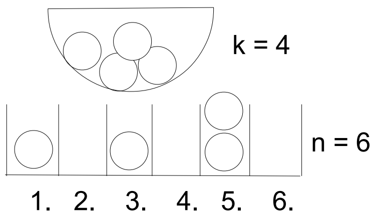
Diese Formel spielt in der Schule keine Rolle und wird hier auch nicht weiter betrachtet.

5 Zusammenfassung

5.1. Urnenmodell

	ohne Wiederholung (alle Elemente unterscheidbar)	mit Wiederholung (nicht alle Elemente unterscheidbar)
mit Anordnung (Permutation k=n in Reihe)	• alle n Objekte • alle unterscheidbar • in Reihe angeordnet $\boxed{P_{oW} = n!}$	• n Objekte • nicht alle unterscheidbar • in Reihe angeordnet $\boxed{P_{mW} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}}$ mit $n > p$ und $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$
mit Anordnung (Variation in Reihe)	• k Objekte aus n Objekten • alle unterscheidbar • in Reihe angeordnet $\boxed{V_{oW} = \frac{n!}{(n-k)!}}$ 	• k Objekte aus n Objekten • nicht alle unterscheidbar • in Reihe angeordnet $\boxed{V_{mW} = n^k}$ 
ohne Anordnung (Kombination auf Haufen)	• k Objekte aus n Objekten • alle unterscheidbar • auf einem Haufen $\boxed{K_{oW} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$ 	• k Objekte aus n Objekten • nicht alle unterscheidbar • auf einem Haufen $\boxed{K_{mW} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}}$ 

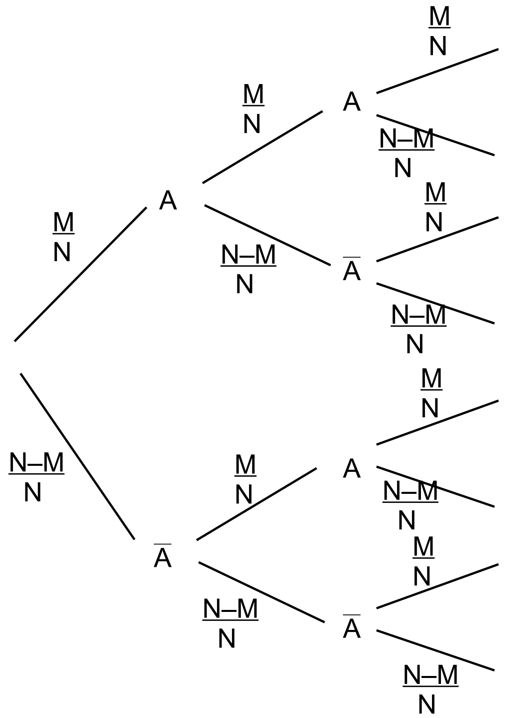
5.2. Duales Urnenmodell

	ohne Wiederholung (alle Elemente unterscheidbar)	mit Wiederholung (nicht alle Elemente unterscheidbar)
mit Anordnung (Permutation k=n in Reihe)	• n unterscheidbare Objekte • auf n Urnen verteilen • in jeder Urne genau ein Objekt $\boxed{P_{oW} = n!}$	• k unterscheidbare Objekte • auf n Urnen verteilen • in jeder Urne n_i Objekte $\boxed{P_{mW} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}}$ mit $n > p$ und $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$
mit Anordnung (Variation in Reihe)	• k unterscheidbare Objekte • auf n Urnen verteilen • in jeder Urne höchstens ein Objekt $\boxed{V_{oW} = \frac{n!}{(n-k)!}}$ 	• k unterscheidbare Objekte • auf n Urnen verteilen • in jeder Urne mehrere Objekte möglich $\boxed{V_{mW} = n^k}$ 
ohne Anordnung (Kombination auf Haufen)	• k nicht unterscheidbare Objekte • auf n Urnen verteilen • in jeder Urne höchstens ein Objekt $\boxed{K_{oW} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$ 	• k nicht unterscheidbare Objekte • auf n Urnen verteilen • in jeder Urne mehrere Objekte möglich $\boxed{K_{mW} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}}$ 

6 Wahrscheinlichkeitsfunktion mit Zurücklegen / mit Wiederholung

Wahrscheinlichkeitsereignisse, die mit Zurücklegen auszuführen sind, haben bei jedem neuen Versuch wieder die die gleichen Verhältnisse, wie am Anfang. Damit gibt es für jeden Versuch eine feste Wahrscheinlichkeit, die sich mit der Anzahl der Versuche nicht ändert.

Betrachtet man Versuche "mit Wiederholung", dann kann man zunächst den Baum erstellen.



Bekanntermaßen sind Ziehungen mit Zurücklegen stochastisch unabhängig. Damit sind die Wahrscheinlichkeiten an allen Bäumen gleich. Damit gilt für die Wahrscheinlichkeit von einer Stufe zur nächsten:

$P(X_1 = A) = M/N$	$P(X_1 = \overline{A}) = (N-M)/N$
$P(X_2 = A) = M/N$	$P(X_2 = \overline{A}) = (N-M)/N$
. . . .	. . . .
$P(X_n = A) = M/N$	$P(X_n = \overline{A}) = (N-M)/N$

Allgemein kann man für die Wahrscheinlichkeit, dass nach k – Versuchen k mal das Ereignis A eingetreten ist und damit bei n Versuchen notwendigerweise n – k mal das Ereignis $\overline{A}$ eingetreten sein muss, folgende Wahrscheinlichkeiten ermitteln:

$$P(X_k = A) = \left(\frac{M}{N}\right)^k \qquad P(X_{n-k} = \overline{A}) = \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k}$$

Die Wahrscheinlichkeiten sind an allen Bäumen gleich und sind nur abhängig von der internen Verteilung der Eigenschaften (z.B. Farben), aber nicht davon, wie viele Elemente gezogen werden. Die Anzahl der gezogenen Element findet nur in den Exponenten ihren Niederschlag.

6.1. Wahrscheinlichkeitsfunktion mit Zurücklegen und mit Reihenfolge

In einer Urne sind
N Kugeln
M rote Kugeln
N – M schwarze Kugeln

Es werden
n Kugeln gezogen
k Kugeln davon sollen rot sein

Für geordnete Stichproben ist im Baumdiagramm jeder Pfad einzeln zu betrachten.
Aus der Kombinatorik lässt sich folgende Formel herleiten:

Gesamtanzahl: N^n	rote Kugel: M^k	schwarze Kugel: $(N–M)^{n–k}$
Anzahl der Möglichkeiten • aus N Kugeln • n Kugeln • mit Wiederholung auszuwählen	Anzahl der Möglichkeiten • aus M roten Kugeln • k Kugeln • mit Wiederholung auszuwählen	Anzahl der Möglichkeiten • aus N - M roten Kugeln • n - k Kugeln • mit Wiederholung auszuwählen

da k rote Kugeln (nur) gezogen wurden, müssen n–k Kugeln schwarz sein:

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{M^k\ (N-M)^{n-k}}{N^n} = \frac{M^k}{N^k}\ \frac{(N-M)^{n-k}}{N^{n-k}} = p^k\ \ q^{n-k}}$$

Das ist die Formel, nach der gerechnet werden muss, wenn
- mit Zurücklegen
- mit Reihenfolge

zu rechnen ist.

Dabei ist $\frac{M}{N} = p$ die Wahrscheinlichkeit aus N Kugeln eine rote zu ziehen

und $\frac{N-M}{N} = q$ die Wahrscheinlichkeit aus N – M schwarzen eine schwarze zu ziehen.

6.2. Wahrscheinlichkeitsfunktion mit Zurücklegen und ohne Reihenfolge

Dieser Fall kann nicht über die Kombinatorikformel hergeleitet werden, da die Anzahlbestimmung $\binom{n-k+1}{k}$ zu keiner Laplace - Wahrscheinlichkeit führt. Deshalb wird hier auf die vorhergehende Herleitung zurückgegriffen und zusätzlich die Anzahl der Pfade bestimmt.

In einer Urne sind
N Kugeln
M rote Kugeln
N – M schwarze Kugeln

Es werden
n Kugeln gezogen
k Kugeln davon sollen rot sein

Für ungeordnete Stichproben sind im Baumdiagramm die Pfade zusammenzufassen, die zur gleichen Auswahl führen.

Wie viele Pfade gibt es in einem Baumdiagramm, die zur jeweils gleichen Ereignisanzahl führen.
Dazu liefern die kombinatorischen Regeln den Weg:
Es ist die Permutation von n Elementen gesucht, bei der jeweils k und n-k Elemente sich nicht unterscheiden lassen. Damit handelt es sich um eine Permutation mit Wiederholung.

Die zugehörige Formel lautet : $\frac{n!}{(n-k)!\ k!}$

Diese Formel entspricht genau der Definition des Binomialkoeffizienten. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für n-maliges Ziehen mit Wiederholung mit k positiven Ereignissen und n-k negativen Ereignissen über alle möglichen Zweige des Baumdiagramms:

$$\boxed{\mathbf{P} = \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\ p^k\ \ q^{n-k}}$$

Diese Verteilung nennt sich Binomialverteilung.
Das ist die Formel, nach der gerechnet werden muss, wenn
- mit Zurücklegen
- ohne Reihenfolge

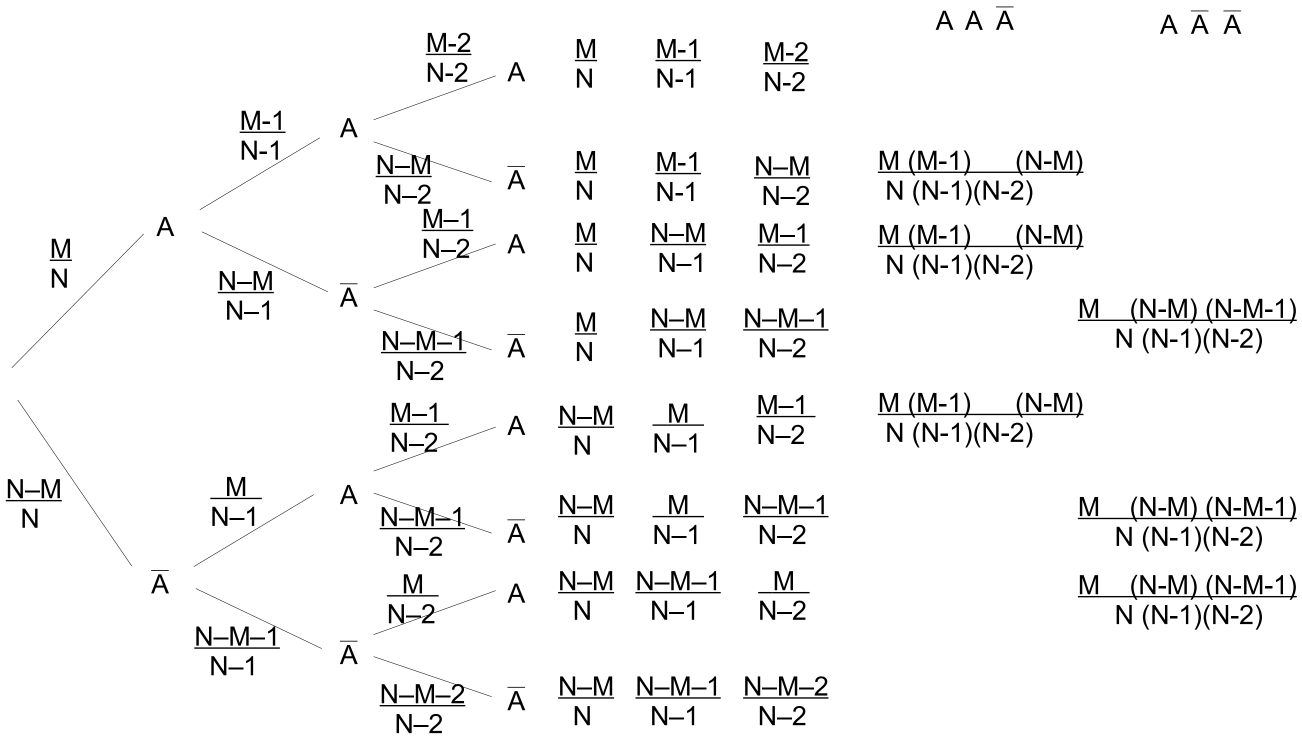
zu rechnen ist.

Die oben hergeleitet Form "mit Reihenfolge" ist Binomialverteilung ohne den Faktor der die Anzahl der Pfade ergibt, da bei "mit Reihenfolge" nur ein Pfad zu berücksichtigen ist.

7 Wahrscheinlichkeitsfunktion ohne Zurücklegen / ohne Wiederholung

Wahrscheinlichkeitsereignisse, die ohne Zurücklegen auszuführen sind, können nicht mit Wahrscheinlichkeiten arbeiten, da sich diese ständig ändern.
Solche Aufgaben können nur über die (aktuellen) Anzahlen berechnet werden.

Betrachtet man Versuche "ohne Wiederholung", dann ergibt sich folgender Baum:



Es ist zu erkennen, dass die Nenner in allen Fällen gleich sind. Außerdem sind die Wahrscheinlichkeiten für (A A $\bar{A}$) und für (A $\bar{A}$ $\bar{A}$) ebenfalls gleich, unabhängig davon, wann welches Ereignis eingetreten ist.

Bei Ziehungen ohne Zurücklegen ändert sich an jedem Baum die Wahrscheinlichkeit, da mit jedem Ziehen die Anzahl der Kugeln sich reduziert, aber auch die Farbzusammensetzungen ändern sich ständig. Deshalb sind zur Berechnung Wahrscheinlichkeiten nicht sinnvoll, da diese sich an jedem folgenden Baum wieder ändern. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten muss man jeweils die Gesamtanzahl benutzen, da diese unabhängig von der Reihenfolge immer gleich ist,

Es soll jetzt die Formel für die Wahrscheinlichkeit (A A $\bar{A}$) genauer untersucht werden:

$$P(A\ A\ \bar{A}) = \frac{M\,(M-1)\,(N-M)}{N\,(N-1)(N-2)}$$

Es werden 2 Objekte aus den M Objekten ausgewählt und 1 Objekt aus den M – N Objekten. Dabei insgesamt eine Auswahl von 3 Objekten aus allen.

$$P(A\ A\ \bar{A}) = \underbrace{\overbrace{\frac{M}{N}\ \frac{(M-1)}{(N-1)}}^{\text{2 Objekte aus den M Objekten}}\ \overbrace{\frac{(N-M)}{(N-2)}}^{\text{1 Objekt aus den M–N Objekten}}}_{\text{insgesamt werden 3 Objekte ausgewählt}}$$

Das ist die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad. Die Anzahl alle möglichen Pfade kommt später.
Eine andere Ziehungsreihenfolge würde nur zu einer Änderung der Reihenfolge der Faktoren im Zähler führen

$$P(A\ \bar{A}\ A) = \frac{M}{N}\ \frac{(N-M)}{(N-1)}\ \frac{(M-1)}{(N-2)}$$

und damit den Wert des Bruches nicht ändern.

7.1. Wahrscheinlichkeitsfunktion ohne Zurücklegen und mit Reihenfolge

In einer Urne sind
N Kugeln
M rote Kugeln
N – M schwarze Kugeln

Es werden
n Kugeln gezogen
k Kugeln davon sollen rot sein

Für geordnete Stichproben (mit Reihenfolge) ist im Baumdiagramm jeder Pfad einzeln zu betrachten. Aus der Kombinatorik lässt sich folgende Formel herleiten:

Gesamtanzahl: $\frac{N!}{(N-n)!}$	rote Kugel: $\frac{M!}{(M-k)!}$	schwarze Kugel: $\frac{(N-M)!}{(N-M-(n-k))!}$
Anzahl der Möglichkeiten • aus N Kugeln • n Kugeln • mit Wiederholung auszuwählen	Anzahl der Möglichkeiten • aus M roten Kugeln • k Kugeln • mit Wiederholung auszuwählen	Anzahl der Möglichkeiten • aus N - M roten Kugeln • n - k Kugeln • mit Wiederholung auszuwählen

da k rote Kugeln (nur) gezogen wurden, müssen n–k Kugeln schwarz sein:

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{\frac{M!}{(M-k)!}\ \frac{(N-M)!}{(N-M-(n-k))!}}{\frac{N!}{(N-n)!}}}$$

Mit GTR :

$$\frac{(M\ \mathbf{Pr}\ k)\cdot((N-M)\ \mathbf{Pr}\ (n-k))}{(N\ \mathbf{Pr}\ n)}$$

Das ist die Formel, nach der gerechnet werden muss, wenn
- ohne Zurücklegen
- mit Reihenfolge

zu rechnen ist.

Nach einiger Umrechnung der Fakultäten auf Binomialkoeffizienten erhält man:

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \cdot \frac{1}{\binom{n}{k}}}$$

7.2. Wahrscheinlichkeitsfunktion ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge

In einer Urne sind
N Kugeln
M rote Kugeln
N – M schwarze Kugeln

Es werden
n Kugeln gezogen
k Kugeln davon sollen rot sein

Für ungeordnete Stichproben sind im Baumdiagramm alle Pfade mit dem gleichen Ergebnis zusammen zu betrachten. Aus der Kombinatorik lässt sich folgende Formel herleiten:

Gesamtanzahl: $\binom{N}{n}$	rote Kugel: $\binom{M}{k}$	schwarze Kugel: $\binom{N-M}{n-k}$
Anzahl der Möglichkeiten • aus N Kugeln • n Kugeln • mit Wiederholung auszuwählen	Anzahl der Möglichkeiten • aus M roten Kugeln • k Kugeln • mit Wiederholung auszuwählen	Anzahl der Möglichkeiten • aus N - M roten Kugeln • n - k Kugeln • mit Wiederholung auszuwählen

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

Mit GTR :

$$\frac{(M\ \mathbf{Cr}\ k)\cdot((N-M)\ \mathbf{Cr}\ (n-k))}{(N\ \mathbf{Cr}\ n)}$$

Diese Verteilung nennt sich <u>Hypergeometrische Verteilung</u>.
Das ist die Formel, nach der gerechnet werden muss, wenn
- ohne Zurücklegen
- ohne Reihenfolge

zu rechnen ist.

Die oben hergeleitete Form "mit Reihenfolge" ist Hypergeometrische Verteilung dividiert durch die Anzahl der Pfade, da bei "mit Reihenfolge" nur ein Pfad zu berücksichtigen ist.

8 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

8.1. Grundlagen aus der Kombinatorik

Anzahl der Permutationen bei n verschiedenen Elementen:

$$P_n = n!$$

Alle n-elementigen Tupel, die aus einer n-elementigen Menge erzeugt werden können mit n-verschiedenen Elementen.

Anzahl der Permutationen bei n Elementen, bei denen $k_1, k_2, \ldots k_m$ Elemente untereinander gleich sind:

$${}^{w}P_{n,k1,k2,\ldots km} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

Alle n-elementigen Tupel, die aus einer n-elementigen Menge erzeugt werden können mit teilweise nicht unterscheidbaren Elementen

Pascalsches Dreieck

$$1 \binom{0}{0}$$

$$1 \binom{1}{0} \quad 1 \binom{1}{1}$$

$$1 \binom{2}{0} \quad 2 \binom{2}{1} \quad 1 \binom{2}{2}$$

$$1 \binom{3}{0} \quad 3 \binom{3}{1} \quad 3 \binom{3}{2} \quad 1 \binom{3}{3}$$

$$1 \binom{4}{0} \quad 4 \binom{4}{1} \quad 6 \binom{4}{2} \quad 4 \binom{4}{3} \quad 1 \binom{4}{4}$$

$$1 \binom{5}{0} \quad 5 \binom{5}{1} \quad 10 \binom{5}{2} \quad 10 \binom{5}{3} \quad 5 \binom{5}{4} \quad 1 \binom{5}{5}$$

$$1 \binom{6}{0} \quad 6 \binom{6}{1} \quad 15 \binom{6}{2} \quad 20 \binom{6}{3} \quad 15 \binom{6}{4} \quad 6 \binom{6}{5} \quad 1 \binom{6}{6}$$

Das Pascalsche Dreieck enthält alle Binomialkoeffizienten.
Binomialkoeffizienten treten in der Kombinatorik auf bei : Ohne Reihenfolge , mit Wiederholung
Der Binomialkoeffizient berechnet die Anzahl der Möglichkeiten
k Elemente aus n Elementen auszuwählen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

8.2. Unterscheidung zwischen zwei verschiedenen Eigenschaften

In einer Urne befinden sich 10 weiße, 10 rote Kugeln.
• es werden mit einem Griff 6 Kugeln gezogen.
Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen Kugeln
• 4 Kugeln weiß sind.

P(w , w , w , w , r , r) Wahrscheinlichkeit entlang eines Pfades, bei dem 4 weiße und 2 rote Kugeln auftreten

Beim .Ziehen mit einem Griff gibt es keine Reihenfolge. Man muss also alle möglichen Kombinationen von 4 mal weiß und 2 mal rot berücksichtigen, da jede von ihnen einen Pfad darstellt. Damit hat man nicht mehr die jeweils 10 Kugeln von oben, sondern nur 6 und diese in einer feststehenden Farbzusammensetzung:

(1) Mathematisch sind von 6 Kugeln alle 6 Kugeln in verschiedenen Reihenfolgen anzuordnen. Damit liefern die Formeln der Permutation 6!
(2) Von den 6 Kugeln sind 4 weiße untereinander nicht unterscheidbar. 4 Kugeln lassen sich in 4! Reihenfolgen anordnen. Damit sind 4! der 6! Reihenfolgen nicht unterscheidbar und erscheinen als die gleiche Reihenfolge.
(3) Von den 6 Kugeln sind 2 rote nicht unterscheidbar. Damit lassen sich von den verbleibenden Reihenfolgen nochmals 2! Reihenfolgen nicht unterscheiden.

Man erhält eine **Permutation mit Wiederholung**: $\frac{6!}{4!\,2!}$

Diese Formel ist genau der Binomialkoeffizient des Pascalschen Dreiecks $\binom{6}{4}$

Nun könnte man sich auf die Position stellen, was ist denn, wenn man zuerst die roten betrachten wurde

Darm ergibt sich aus der Permutation der Wert $\frac{6!}{2!\,4!}$, was mathematisch natürlich das gleiche ist.

Diese Gleichheit steckt auch m Binomialkoeffizienten drin: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Für das Beispiel bedeutet das : $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$

Unter der Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeit für 1 Pfad ergibt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit als:

$$\binom{6}{4}\ P(w\,,\,w\,,\,w\,,\,w\,,\,r\,,\,r)$$

Aus der Herleitung ist zu erkennen, dass sich diese Anzahl völlig unabhängig von den Wahrscheinlichkeiten berechnet. Das bedeutet im konkreten, dass es völlig belanglos ist, ob **mit Zurücklegen** oder **ohne Zurücklegen** gezogen wird.
Nicht belanglos ist die Reihenfolge. Wird **mit Beachtung der Reihenfolge** gezogen, dann gibt es nur einen Pfad und die Multiplikation mit der Anzahl der Pfade muss entfallen. Wird **ohne Beachtung der Reihenfolge** gezogen, dann zählen alle möglichen Pfade als ein Ereignis und es muss mit der Anzahl der Pfade multipliziert werden.

Als Anzahl der Pfade kommt immer nur ein Binomialkoeffizient in Frage Oben steht die Anzahl der gesamten Kugel, unten die Anzahl der nicht unterscheidbaren der einen Farbe. Die nicht unterscheidbaren der anderen Farbe ergeben sich aus der Differenz zur Gesamtzahl.

Damit bewegt man sich im Pascalschen Dreieck auf der Zeile n = 6 und auf den Spalten k = 2 oder k = 4.
Es ist in der Zeile 6 deutlich der gleiche Wert für die beiden k Werte zu sehen.
Die Pfadanzahl aus dem Pascalschen Dreieck ist nur für zwei Unterscheidungsmerkmale zu übernehmen.
Mehr Unterscheidungsmerkmale führt zu sogenannten Multinominalkoeffizienten. Dazu später.

Dass bei der Anzahl der Pfade nicht immer Binomialkoeffizienten stehen ist ebenfalls der Berechnung im Pascalschen Dreieck geschuldet. Dazu soll folgendes Beispiel betrachtet werden:

In einer Urne befinden sich 10 weiße, 10 rote Kugeln.
• es werden mit einem Griff 6 Kugeln gezogen
Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen Kugeln
• 5 Kugeln weiß sind

$P(w\,,\,w\,,\,w\,,\,w\,,\,w\,,\,r)$ Wahrscheinlichkeit entlang eines Pfades, bei dem 5 weiße und 1 rote Kugeln auftreten

Betrachtet man die eine rote Kugel, so kann diese an 6 verschiedenen Stellen auftreten.
Deshalb schreibt man bei der Gesamtwahrscheinlichkeit

$$6 \cdot P(w\,,\,w\,,\,w\,,\,w\,,\,w\,,\,r)$$

Betrachtet man aber das Pascalsche Dreieck und benutzt die oben erklärte Berechnung der Anzahl der Pfade, erhält man für die Pfadanzahl die Werte $\binom{6}{1}$ oder $\binom{6}{5}$ die beide den Wert 6 liefern.

Aus Bequemlichkeit verzichtet man hier auf den Binomialkoeffizienten.

8.3. Unterscheidung zwischen <u>vier</u> verschiedenen Eigenschaften

8.3.1. Alle Kugeln verschieden

In einer Urne befinden sich 10 weiße, 10 rote, 10 blaue 10 grüne Kugeln
• es werden mit einem Griff 4 Kugeln gezogen
Man berechne die Wahrscheinlichkeit dass unter den gezogenen Kugeln
• 4 Kugeln mit verschiedenen Farben auftreten

P(w. r, b . g) Wahrscheinlichkeit entlang ein es Pfades, bei dem jede Kugel eine andere Farbe hat

(1) Mathematisch sind von 4 Kugeln alle 4 Kugeln in verschiedenen Reihenfolgen anzuordnen. Damit liefern die Formeln der Permutation 4!
(2) Von den 4 Kugeln sind alle 4 unterscheidbar. Damit müsste 4 mal durch 1! dividiert werden, oder gleich die Permutation ohne Wiederholung anzusetzen

4! • P(w. r, b. g)

Ein Fakultätsausdruck kann nur auftreten, wenn die Anzahl der Ziehungen mit der Anzahl der Eigenschaften übereinstimmt und jede Eigenschaft genau einmal auftritt. Nur dann handelt es sich um eine Permutation ohne Wiederholung.

8.3.2. Nicht alle Kugeln verschieden

In einer Urne befinden sich 10 weiße, 10 rote, 10 blaue, 10 grüne Kugeln.
• es werden mit einem Griff 10 Kugeln gezogen.
Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen Kugeln
• 3 weiße 4 rote 2 blaue 1 grüne Kugel auftritt

P(w , w , w , r , r , r , r , b , b , g) Wahrscheinlichkeit entlang ein es Pfades

(1) Mathematisch sind von 10 Kugeln alle 10 Kugeln in verschiedenen Reihenfolgen anzuordnen. Damit liefern die Formeln der Permutation 10!
(2) Von den 10 Kugeln sind 3 weiße untereinander nicht unterscheidbar 3 Kugeln lassen sich in 3! Arten anordnen. Damit sind 3! der 10! Anordnungen nicht unter scheidbar
und erscheinen als die gleiche Anordnung
(3) Von den 6 Kugeln sind 4 rote nicht unterscheidbar. Damit lassen sich von den verbleibenden Anordnungen nochmals 4! Anordnungen nicht unterscheiden
(4) . . . .

$\frac{10!}{3!\,4!\,2!\,1!}$ Diesen Ausdruck nennt man <u>Multinominalkoeffizient</u>, da er nicht nur 2 (= Bi), sondern mehrere Zahlen berücksichtigt.

Damit ergibt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit aus

$\frac{10!}{3!\,4!\,2!\,1!}$ P(w , w , w , r , r , r , r , b , b , g)

Wieder ist es uninteressant, ob mit oder ohne Zurücklegen, sondern nur:
ohne Beachtung der Reihenfolge

„mit“ oder „ohne“ Zurücklegen wirkt sich in den Wahrscheinlichkeiten der Klammer aus, nicht in der Pfadanzahl.

8.3.3. Nicht alle Kugeln verschieden, mehrere Kugeln werden zu einem Ereignis zusammengefaßt

In einer Urne befinden sich 10 weiße, 10 rote, 10 blaue, 10 grüne Kugeln
• es werden mit einem Griff 10 Kugeln gezogen
Man berechne die Wahrscheinlichkeit dass unter den gezogenen Kugeln
• 3 weiße 2 blaue auftreten, die Farben der anderen Kugeln sind uninteressant, sie dürfen nur nicht weiß oder blau sein

P(w , w , w , b , b , x , x , x , x , x) Wahrscheinlichkeit entlang eines Pfades

(es kann nicht der vorherige Baum benutzt werden Es muss ein Baum gezeichnet werden, bei dem nur „weiße“, „blaue“ und „sonstige“ Kugeln auftreten. Damit hat der Baum von vorn herein ein anderes Aussehen.)

(1) Mathematisch sind von 10 Kugeln alle 10 Kugeln in verschiedenen Reihenfolgen anzuordnen. Damit liefern die Formeln der Permutation 10!
(2) Von den 10 Kugeln sind 3 weiße untereinander nicht unterscheidbar 3 Kugeln lassen sich in 3! Arten anordnen. Damit sind 3! der 10! Anordnungen nicht unterscheidbar und erscheinen als die gleiche Anordnung.
(3) Von den 2 blauen Kugeln sind 2 nicht unterscheidbar. Damit lassen sich von den verbleibenden Anordnungen nochmals 2! Anordnungen nicht unterscheiden.
(4) Die verbleibenden 5 Kugeln werden auch nicht mehr unterschieden, man könnte in der Urne auch 10 weiße, 10 blaue und 20 schwarze legen.

$\frac{10!}{3!\,2!\,5!}$ P(w , w , w , b , b , x , x , x , x , x) Gesamtwahrscheinlichkeit

8.3.4. Musteraufgabe

Eine Urne enthält 2 rote, 3 weiße und 5 schwarze Kugeln

a) Es werden 4 Kugeln mit einem Griff entnommen.

b) Nun werden 6 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Berechne die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse:

A: Es werden nur schwarze Kugeln gezogen
B: Es wird genau eine weiße Kugel gezogen
C: Es werden genau 3 rote Kugeln gezogen
D: Es wird mindestens eine weiße Kugel gezogen
E: Es werden höchstens 4 schwarze Kugeln gezogen
F: Man zieht abwechselnd schwarz und weiß
G: Nur die ersten zwei Kugeln sind schwarz, dann folgt noch genau eine rote Kugel
H: Von jeder Farbe werden genau 2 Kugeln gezogen
I: Es werden gleich viele rote und weiße Kugeln gezogen

A: P(s,s,s,s,s,s)

B: $\binom{6}{1}$ P(s,s,s,s,s,w)

C: $\binom{6}{3}$ P(r , r , r , $\bar{r}$, $\bar{r}$, $\bar{r}$)

D: 1 - P(x , x , x , x , x , x)
Wahrscheinlichkeit für x ist:
„keine weiße Kugel“

P(x,x,x,x,x,x) + $\binom{6}{1}$ P(s,x,x,x,x,x) + $\binom{6}{2}$ P(s,s,x,x,x,x)
+ $\binom{6}{3}$ P(s,s,s,x.x.x) + $\binom{6}{4}$ P(s,s,s,s,x,x)

Wahrscheinlichkeit für x ist:
keine schwarze Kugel

F: P(s,w,s,w,s,w) genau zwei Pfade
P(w,s,w,s,w,s)

G $\frac{4!}{3!\,1!}$ P(s,s,r,w,w,w)

H $\frac{6!}{2!\,2!\,2!}$ P(s,s,w,w,r,r) jeweils 2 sind nicht unterscheidbar

I: P(x,x,x,x,x,x) + $\frac{6!}{1!\,1!\,4!}$ P(r,w,s,s,s,s)

$\frac{6!}{2!\,2!\,2!}$ P(r,r,w,w,s,s) + $\frac{6!}{3!\,3!}$ P(r,r,r,w,w,w)

Das erste Ereignis von I kann nicht eintreten, da es 6 schwarze nicht gibt

9 Zusammenfassung

9.1. Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Beispiel:

M = 5 rote Kugeln   k = 3 rote ziehen
N = 13 Kugel insgesamt (8 blaue)   n = 8 Kugeln ziehen (5 blaue)

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
mit Reihenfolge	$P = \dfrac{\dfrac{M!}{(M-k)!}\;\dfrac{(N-M)!}{(N-M-(n-k))!}}{\dfrac{N!}{(N-n)!}}$ Beispiel: **Kombinatorikformeln** $\dfrac{\dfrac{5!}{(5-3)!}\;\dfrac{8!}{(8-5)!}}{\dfrac{13!}{(13-8)!}} = \dfrac{\dfrac{5!}{2!}\;\dfrac{8!}{3!}}{\dfrac{13!}{5!}}$ **Zählprinzip** $\dfrac{5\;\;4\;\;3\;\;\;8\;\;7\;\;6\;\;5\;\;4}{13\;\;12\;\;11\;\;\;10\;\;9\;\;8\;\;7\;\;6}$ ein Pfad im Baumdiagramm	$P = \dfrac{M^k\,(N-M)^{n-k}}{N^n} = \dfrac{M^k}{N^k}\;\dfrac{(N-M)^{n-k}}{N^{n-k}} = p^k\;q^{n-k}$ Beispiel: **Kombinatorikformeln** $\dfrac{5^3\;(13-5)^{8-3}}{13^8} = \dfrac{5^3}{13^3}\;\dfrac{(13-5)^{8-3}}{13^{8-3}} = \left(\dfrac{5}{13}\right)^3\left(\dfrac{8}{13}\right)^5$ **Zählprinzip** $\dfrac{5\;\;5\;\;5\;\;\;8\;\;8\;\;8\;\;8\;\;8}{13\;\;13\;\;13\;\;\;13\;\;13\;\;13\;\;13\;\;13}$ ein Pfad im Baumdiagramm
ohne Reihenfolge	**Hypergeometrische Verteilung** $P = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ Beispiel : **Kombinatorikformeln** $\dfrac{\binom{5}{3}\binom{13-5}{8-3}}{\binom{13}{8}} = \dfrac{\binom{5}{3}\binom{8}{5}}{\binom{13}{8}}$ **Zählprinzip** $\binom{13}{3}\;\dfrac{5\;\;4\;\;3\;\;\;8\;\;7\;\;6\;\;5\;\;4}{13\;\;12\;\;11\;\;\;10\;\;9\;\;8\;\;7\;\;6}$ alle Pfade mit 3 rot und 5 blau	**Binomialverteilung** $P = \binom{n}{k}\left(\dfrac{M}{N}\right)^k\left(\dfrac{N-M}{N}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\,p^k\;q^{n-k}$ Beispiel : **Kombinatorikformeln** $\binom{13}{3}\left(\dfrac{5}{13}\right)^3\left(\dfrac{13-5}{13}\right)^5 = \binom{13}{3}\left(\dfrac{5}{13}\right)^3\left(\dfrac{8}{13}\right)^5$ **Zählprinzip** $\binom{13}{3}\;\dfrac{5\;\;5\;\;5\;\;\;8\;\;8\;\;8\;\;8\;\;8}{13\;\;13\;\;13\;\;\;13\;\;13\;\;13\;\;13\;\;13}$ alle Pfade mit 3 rot und 5 blau