Bezeichnungen von Anordnungen von Elementen einer Menge

***k*-Tupel** $(x_1, x_2, . . . x_k)$

- Anordnung je eines Elementes aus k verschiedenen Mengen, wobei aus jeder Menge **ein** Element vorhanden ist.
- Aus n unterscheidbaren Objekten einer Menge werden nacheinander mit Zurücklegen k Objekte entnommen
- Ein jedes solches k-Tupel ist ein Pfad im Baumdiagramm.
- Bei Berücksichtigung der Reihenfolge ist jeder Pfad zu bewerten, es gibt so viele Möglichkeiten, wie k-Tupel zu bilden sind.
- Da jedes Element nur einmal vorhanden sein darf, ist $k \le n$.

Variation mit Wiederholung

***k*-Permutation** $(x_1, x_2, . . . x_k)$ einer endlichen Menge M

- ist eine Permutation k-elementiger Teilmengen von M
- aus einer n elementigen Menge werden nacheinander ohne Zurücklegen k Elemente entnommen
- ist die Anzahl der k-Permutationen einer n- elementigen Menge

Variation ohne Wiederholung

***k*-Teilmenge** $(x_1, x_2, . . . x_k)$ einer endlichen Menge M

- ist eine ungeordnete Auswahl von k Elementen aus M
- ist die Anzahl der möglichen Teilmengen mit k Elementen einer n – elementigen Menge

Kombination ohne Wiederholung

***k*-Kombination** $(x_1, x_2, . . . x_k)$ einer endlichen Menge M

- ist eine ungeordnete Auswahl von k Elementen aus M
- ist die Anzahl der k-Kombinationen einer n – elementigen Menge

Kombination mit Wiederholung

Kombinatorik beginnt nicht mit den Kombinatorikformeln, sondern mit dem „Zählprinzip“, das man in zwei Teile gliedern kann: 1.) Produktregel und 2.) Summenregel. Die Produktregel bestimmt die Anzahl von Ereignissen, die unabhängig voneinander eintreten können, die Summenregel bestimmt die Anzahl von Ereignissen, wenn sich ein Ereignis aus mehreren Elementarereignissen zusammensetzt.
Die Kombinatorikformeln sind nur ein Teil des Zählprinzips.

1. Produktregel

Produktregel (Multiplikationsprinzip)
Lässt sich ein Objekt a aus einer Menge A auf m Arten auswählen und ein Objekt b aus einer anderen Menge B auf n Arten auswählen, so lässt sich a und b (sowohl a als auch b) auf $m \cdot n$ Arten auswählen.

Die beiden Menge A und B stehen in dieser Aussage auch dafür, dass die Auswahl von A und die Auswahl von B unabhängig sind. Die einfachste Veranschaulichung dieses Prinzips ist:
Hat man 3 Hosen und 5 Hemden, kann man sich auf 15 verschiedene Arten kleiden.

Diese Produktregel lässt sich aber auch auf vermeindlich abhängige Ereignisse anwenden, man muss die Ereignisse nur so formulieren, dass sie voneinander unabhängig sind. In einer Urne befinden sich 5 rote 6 blaue und 4 gelbe Kugeln. Es soll ohne Zurücklegen gezogen werden.
Wie viele Möglichkeiten gibt es eine blaue Kugel zu ziehen: Diese Frage wird jeder mit 6 beantworten.
Wie viele Möglichkeiten gibt es als zweite Kugel eine blaue zu ziehen: Da wird es schon schwieriger, da man nicht weiß, welche als erste Kugel gezogen wurde und deshalb die Konstellation der Kugeln in der Urne nicht kennt.
Wie viele Möglichkeiten gibt es als zweite Kugel eine blaue zu ziehen, wenn als erste eine gelbe gezogen wurde. Diese Frage ist klar zu beantworten: In der Urne befinden sich noch 6 blaue, also gibt es 6 Möglichkeiten.

Für die zweite Ziehung hat man sich eine neue Ausgangsmenge vorgestellt und von der Anzahl bestimmt, obwohl die Ausgangsmenge von der Ziehung der ersten Kugel abhängt. Deshalb kann man sagen, dass die Anzahlen erst eine gelbe und dann eine blaue zu ziehen 4 * 6 beträgt.

Zunächst unterscheidet man bei den Formeln der Kombinatorik in zwei Gruppen:
1. Ohne Wiederholungen: Jede Kugel ist von der anderen unterscheidbar $k \le n$
   1.1. Permutation: Es werden alle Kugeln ausgewählt und angeordnet $k = n$
   1.2. Variation: Es werden k Kugeln ausgewählt und angeordnet $k < n$
   1.3. Kombination: Es werden k Kugel auf einmal gezogen $k < n$

2. Mit Wiederholung: Nicht alle Kugeln sind unterscheidbar (Wiederholung muss nicht unbedingt „Zurücklegen“ sein, es können auch mehrere Kugeln des gleichen Typs in der Urne sein)
   2.1. Permutation: Es gibt Kugeln, die sich nicht unterscheiden lassen $k = n$
   2.2. Variation: Jede Kugel kann beliebig oft gezogen werden, die Ziehung wird in einer Reihe notiert
   2.3. Kombination: Jede Kugel kann beliebig oft auftreten, ohne dass die Position eine Rolle spielt, Es zählt nur die Anzahl der Eigenschaften, nicht wann die Kugel gezogen wurde.

Die Kombinatorikformeln sind Bestandteil dieser Produktregel.

Zu jedem Ziehungsmodell, bei dem k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln gezogen werden gibt es ein duales Ziehungsmodell, bei dem k Kugeln auf n Urnen verteilt werden.
- Erfolgt die Ziehung mit Wiederholung, sind im dualen Ziehungsmodell mehrere Kugeln in einer Urne zugelassen, erfolgt die Ziehung ohne Wiederholung, kann nur eine Kugel in eine Urne gelegt werden.
- Erfolgt die Ziehung „mit Berücksichtigung der Reihenfolge“ (Variation) sind im dualen Urnenmodell alle Kugeln unterscheidbar, erfolgt die Ziehung „ohne Berücksichtigung der Reihenfolge“ (Kombination) sind die Kugeln nicht unterscheidbar.

Die Struktur der Seiten ist zunächst etwas ungewöhnlich, ist aber bewußt so gewählt, dass alle wichtigen Informationen auf einer Seite stehen und nicht auf mehrere Seiten zerrissen sind.

Gegeben sind n verschiedene Elemente

1. ohne Wiederholung

1.1. es werden alle Elemente ausgewählt

1.1.1. Permutation ohne Wiederholung

Wieviele Möglichkeiten gibt es **alle Elemente** unter **Beachtung der Reihenfolge** anzuordnen ?

Für das Ziehen des **ersten Elements** gibt es **n** verschiedene Möglichkeiten.

Für das Ziehen des zweiten Elements gelten die gleichen Regeln, wie für das erste, es sind aber nur noch n – 1 Elemente vorhanden.

Für das Ziehen des **zweiten Elements** gibt es **n – 1** verschiedene Möglichkeiten.

Für das Ziehen des dritten Elements gelten die gleichen Regeln, wie für das erste, es sind aber nur noch n – 2 Elemente vorhanden.

Für das Ziehen des **dritten Elements** gibt es **n – 2** verschiedene Möglichkeiten.

Am Ende gibt es nur noch eine Kugel, die übrig bleibt.

Für das Ziehen des **n–ten Elements** gibt es **1** Möglichkeit.

Die Ziehungen sind unabhängig, da das Ergebnis der vorhergehenden Ziehungen nicht den Ausgang der Folgeziehung beeinflusst. Jedes Element besitzt bei jeder Ziehung die gleiche Wahrscheinlichkeit gezogen zu werden.

Werden aus einer Urne mit n Elementen alle n Elemente unter Beachtung der Reihenfolge gezogen, dann gibt es

$$\boxed{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!}$$

verschiedene Möglichkeiten des Ziehens.

(Werden alle Elemente gezogen, ist die Betrachtung „ohne Beachtung der Reihenfolge“ uninteressant, weil es dann nur eine geben kann.)

***n*-Tupel** $(x_1, x_2, \ldots x_n)$

- Aus n unterscheidbaren Objekten einer Menge werden nacheinander n Objekte entnommen
- Ein jedes solches n – Tupel ist ein Pfad im Baumdiagramm.
- Bei Berücksichtigung der Reihenfolge ist jeder Pfad zu bewerten, es gibt so viele Möglichkeiten, wie n–Tupel zu bilden sind.

> - Alle n-elementigen Tupel, die aus einer
> - n-elementigen Menge erzeugt werden können
> - mit n-verschiedenen Elementen.

Für die **Auswahl**

- von n Elementen
- aus einer Menge mit Elementen
- **ohne Wiederholung** (das heißt immer, man könnte die n Elemente auch mit einem Zug aus der Urne ziehen und es gilt immer, dass alle Elemente gezogen werden)
- **mit Berücksichtigung der Reihenfolge**

Voraussetzungen:

- Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander.
- Es müssen alle (n) Elemente ausgewählt werden.
  (*am Ende des Experiments ist die Urne leer*)
- **Ein Element kann nicht mehrmals ausgewählt werden**.
  (*es wird keine Kugel zurückgelegt, also keine Wiederholung und es gibt auch keinen zwei gleichen Elemente*)
- **Die Reihenfolge muss berücksichtigt werden**
  (*die Reihenfolge (1,2,3) ist von (2,1,3) zu unterscheiden, würde die Reihenfolge nicht berücksichtigt werden, wäre das identisch mit nicht unterscheidbaren Elementen*)

Interpretationen

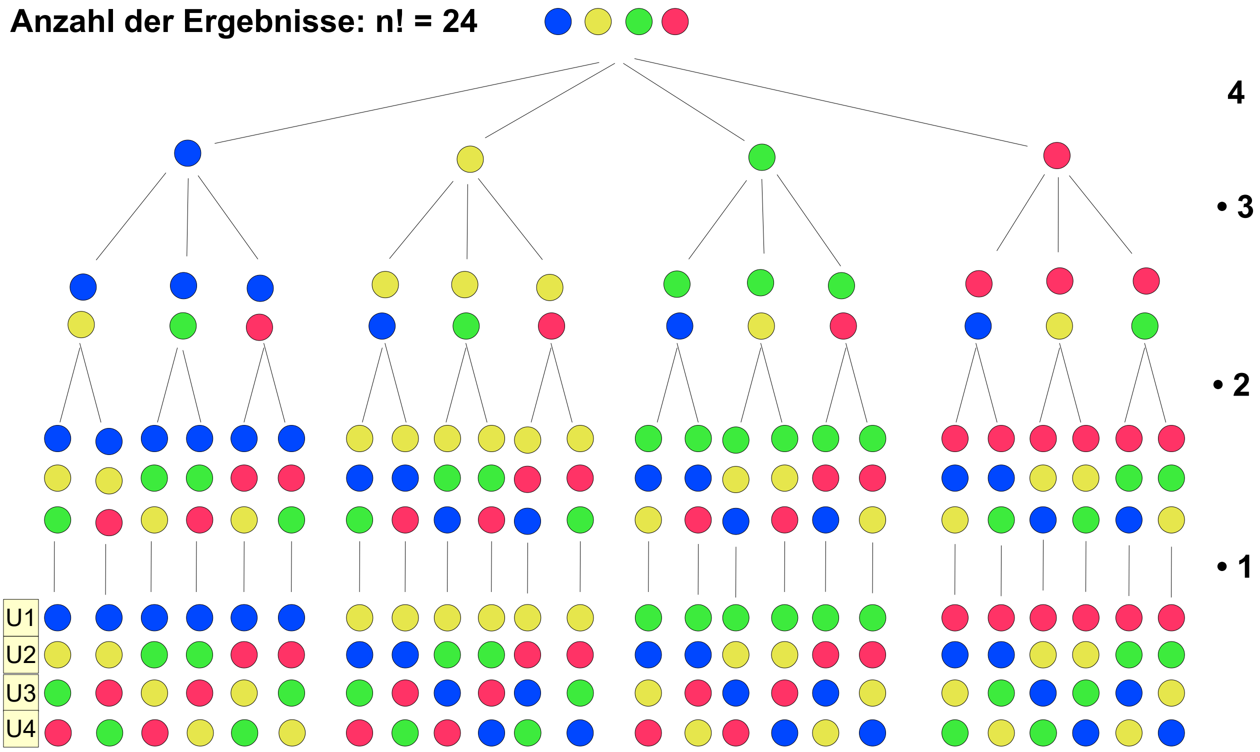
- Anzahl der Möglichkeiten, eine geordnete Stichprobe von n Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln ohne Zurücklegen zu ziehen.
- Anzahl der Möglichkeiten, n verschiedene (unterscheidbare) Objekte so auf n Urnen zu verteilen, dass in jeder Urne ein Objekt liegt.
- Anzahl der n-stelligen Sequenzen von n verschiedenen Zeichen, in denen jedes Zeichen genau einmal vorkommt.

1.1.1. Permutation ohne Wiederholung – Baumdiagramm und duales Urnenmodell

Das Baumdiagramm ist voll besetzt. In jedem Ergebnis tritt jede vorhandene Kugel genau einmal auf

Anzahl der Merkmale: n = 4
Anzahl der Versuche: k = n = 4

Anzahl der Ergebnisse: n! = 24



- Verteile 4 verschiedene Kugel auf 4 verschiedene Urnen,
- wobei in jeder Urne nur eine Kugel liegen darf.

Duales Urnenmodell:

- 4 Unterscheidbare Kugeln sind auf
- 4 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung nicht zulässig

Die Darstellung des obigen Baumdiagramms ist auch gleichzeitig die Anordnung des dualen Urnenmodells. In der vierten Stufe sind die Urnen am linken Rand markiert, die Kugelbelegung der vierten Stufe ist gleichzeitig die Belegung der vier Urnen.

1.1.1. ohne Wiederholung mit Reihenfolge n Elemente

Beispiel 1

Auf wie viele Arten können sich 3 Personen auf 3 Stühle verteilen?

Lösung

	die Kugeln entsprechen den 3 Personen	n = 3	
1	die 3 Stühle entsprechen 3 Ziehungen	ja; k=3	P
2	da sich eine Person nur auf einen Stuhl setzen kann, kann eine Kugel nicht zweimal gezogen werden	ohne Zurücklegen	P_{oW}
3			

Permutation
Damit kennt man die Anzahl der Möglichkeiten, nämlich n! = 3! = 6.

Beispiel 2

Ein Entwicklungspsychologe will herausfinden, ob ein Kind den Größenbegriff versteht. Dazu legt er dem Kind nach Zufall 6 unterschiedlich große Figuren vor und fordert es auf: "Stell die Figuren auf den Tisch und ordne Sie nach ihrer Höhe!" Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Figuren der Höhe nach in eine Reihenfolge zu bringen ?

Lösung

	Anzahl der Figuren	n = 6	
1	Anzahl der Objekte	k = 6	P
2	Da Permutation ein Spezialfall der Variation ist, kann hier „mit Reihenfolge“ argumentiert werden.	mit Reihenfolge	P
3	keine Figur kann zweimal benutzt werden	ohne Wiederholung	P_{oW}

Permutation ohne Wiederholung
Anzahl der Möglichkeiten, n! = 6! = 720.

Beispiel 2

Frau Maier hat 4 Kleider, 9 Hüte und 10 Paar Schuhe. Auf wie viele Arten kann sie sich kleiden, wenn sie ein Kleid. einen Hut und ein Paar Schuhe tragen muss?

Lösung

Aus 4 Kleidern eines wählen	4 Möglichkeiten
und	
aus 9 Hüten einen wählen	• 9 Möglichkeiten
und	
aus 10 Paar Schuhen eines wählen	• 10 Möglichkeiten
	= 360 Möglichkeiten

1.2. es werden k Elemente ohne Wiederholung ausgewählt

1.2.1. Variation ohne Wiederholung

Permutation von k Elementen aus einer Menge von n Elementen

Wieviele Möglichkeiten gibt es **k Elemente** unter **Beachtung der Reihenfolge** anzuordnen ?

Für das Ziehen des **ersten Elements** gibt es **n** verschiedene Möglichkeiten.

Für das Ziehen des zweiten Elements gelten die gleichen Regeln, wie für das erste, es sind aber nur noch n – 1 Elemente vorhanden.

Für das Ziehen des **zweiten Elements** gibt es **n – 1** verschiedene Möglichkeiten.

Für das Ziehen des dritten Elements gelten die gleichen Regeln, wie für das erste, es sind aber nur noch n – 2 Elemente vorhanden.

• • • • •

Für das Ziehen des **k–ten Elements** gibt es **n – k + 1** verschiedene Möglichkeiten.

Werden aus einer Urne mit n Elementen alle n Elemente unter Beachtung der Reihenfolge gezogen, dann gibt es

$$\boxed{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$$

verschiedene Möglichkeiten des Ziehens.

Ergänzt man diese Formel zu einer kompletten Fakultät, ergibt sich folgende Fortsetzung:

$$\boxed{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)} \quad (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdot \ldots \cdot 1 \quad = n\,!$$

der zweite Ausdruck ist aber genau der Wert für (n – k)! Damit lässt sich die Formel auch in anderer Form schreiben:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k! = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right]$$

***k*-Permutation** $(x_1, x_2, \ldots x_k)$ einer endlichen Menge M

- ist eine Permutation k-elementiger Teilmengen von M
- aus einer n elementigen Menge werden nacheinander ohne Zurücklegen k Elemente entnommen
- ist die Anzahl der k-Permutationen einer n- elementigen Menge

- Alle k-Permutationen, die aus einer
- n-elementigen Menge erzeugt werden können

Für die **Auswahl**

- von k Elementen
- aus einer Menge mit n Elementen
- **ohne Wiederholung** (das heißt immer, man könnte die k Elemente auch mit einem Zug aus der Urne ziehen und es gilt immer k ≤ n)
- **mit Berücksichtigung der Reihenfolge**

Voraussetzungen:

- Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander.
- Es werden einige (k) Elemente ausgewählt.
- Beim Ziehen ohne Zurücklegen muss k ≤ n sein, da irgendwann die Urne leer ist.
- Ein Element kann nicht mehrmals ausgewählt werden.

Interpretationen

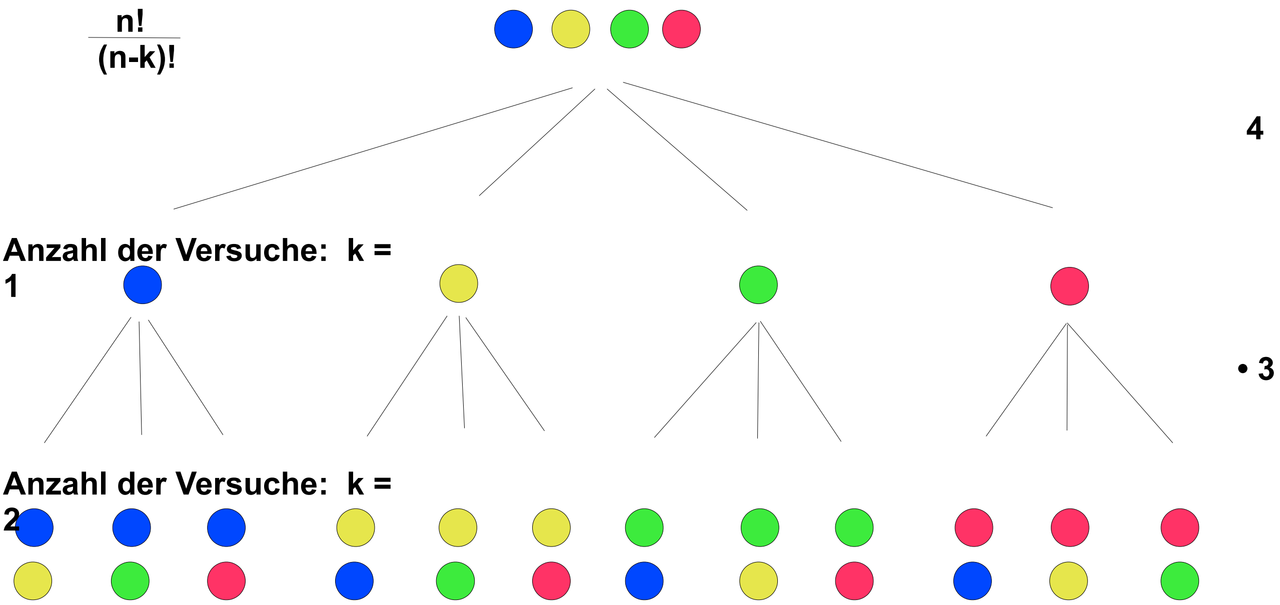
- Anzahl der Möglichkeiten k ≤ n Elemente aus einer Urne mit n Elementen auszuwählen, wobei gezogene Kugel nicht wieder zurückgelegt werden.
- Anzahl der Möglichkeiten, k ≤ n verschiedene (unterscheidbare) Objekte auf n Urnen zu verteilen, wobei in jeder Urne nur 1 Objekt liegt.
  (das schließt ein, dass einige Urnen leer bleiben)
- Anzahl der k-stelligen Sequenzen aus n verschiedenen Zeichen.

1.2.1. Variation ohne Wiederholung – Baumdiagramm und duales Urnenmodell

Das Baumdiagramm enthält in jeder Stufe einen Zweig weniger als in der vorhergehenden Stufe
In jedem Ergebnis fehlen n – k Kugeln

Anzahl der Merkmale: n = 4

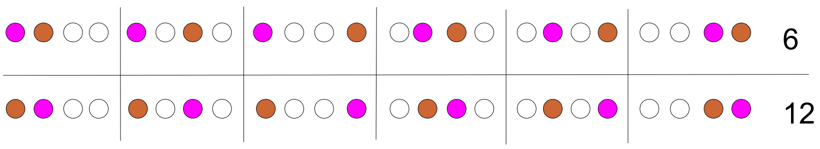
$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

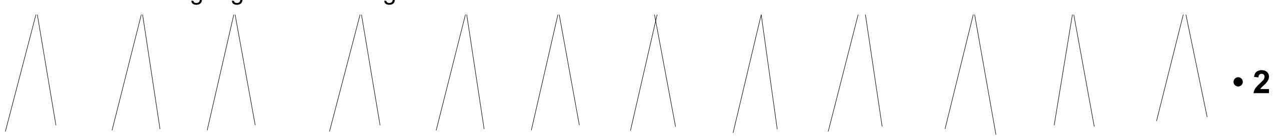


Kein grün (Kugel3) und kein rot (Kugel4) bedeuten im dualen Urnenmodell, dass die Urnen 3 und 4 leer bleiben

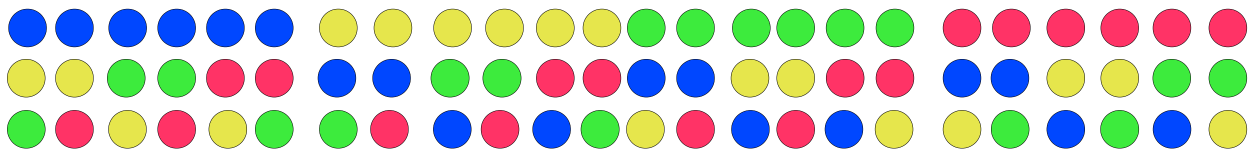
Duales Urnenmodell:

- 2 unterscheidbare Kugeln sind auf
- 4 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung nicht zulässig



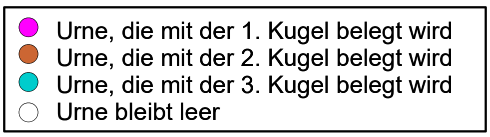


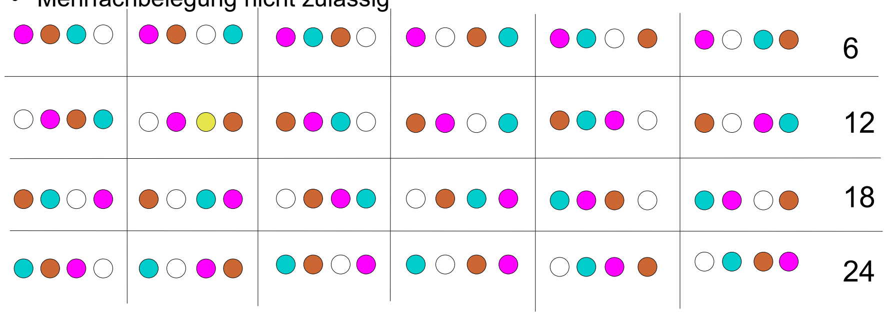
Anzahl der Versuche: k = 3



Duales Urnenmodell:

- 3 Unterscheidbare Kugeln sind auf
- 4 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung nicht zulässig

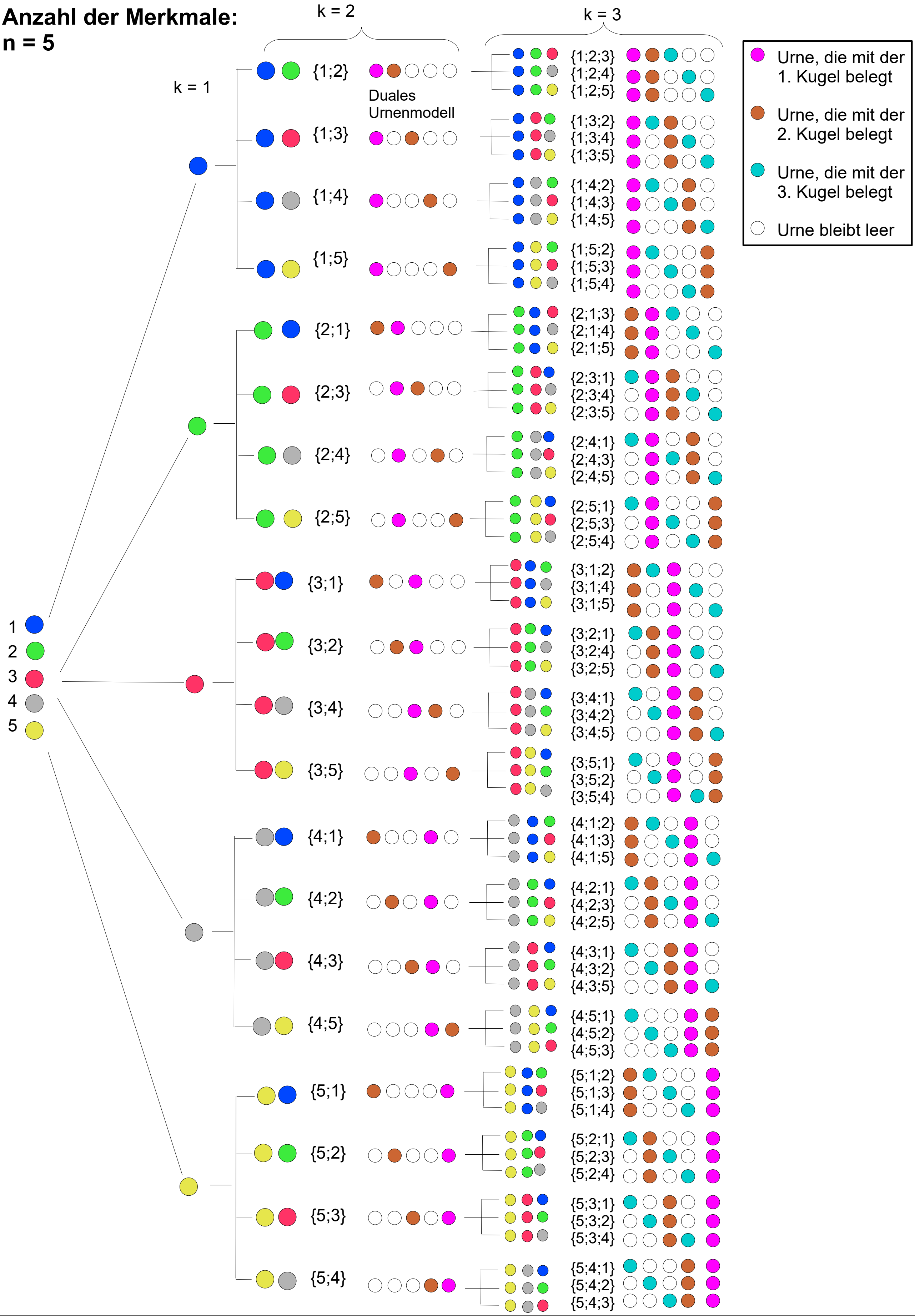




3 Farben und ein Leerfeld lassen sich in 4! Möglichkeiten anordnen.

1.2.1. Variation ohne Wiederholung – Baumdiagramm für n = 5

Anzahl der Merkmale:
n = 5



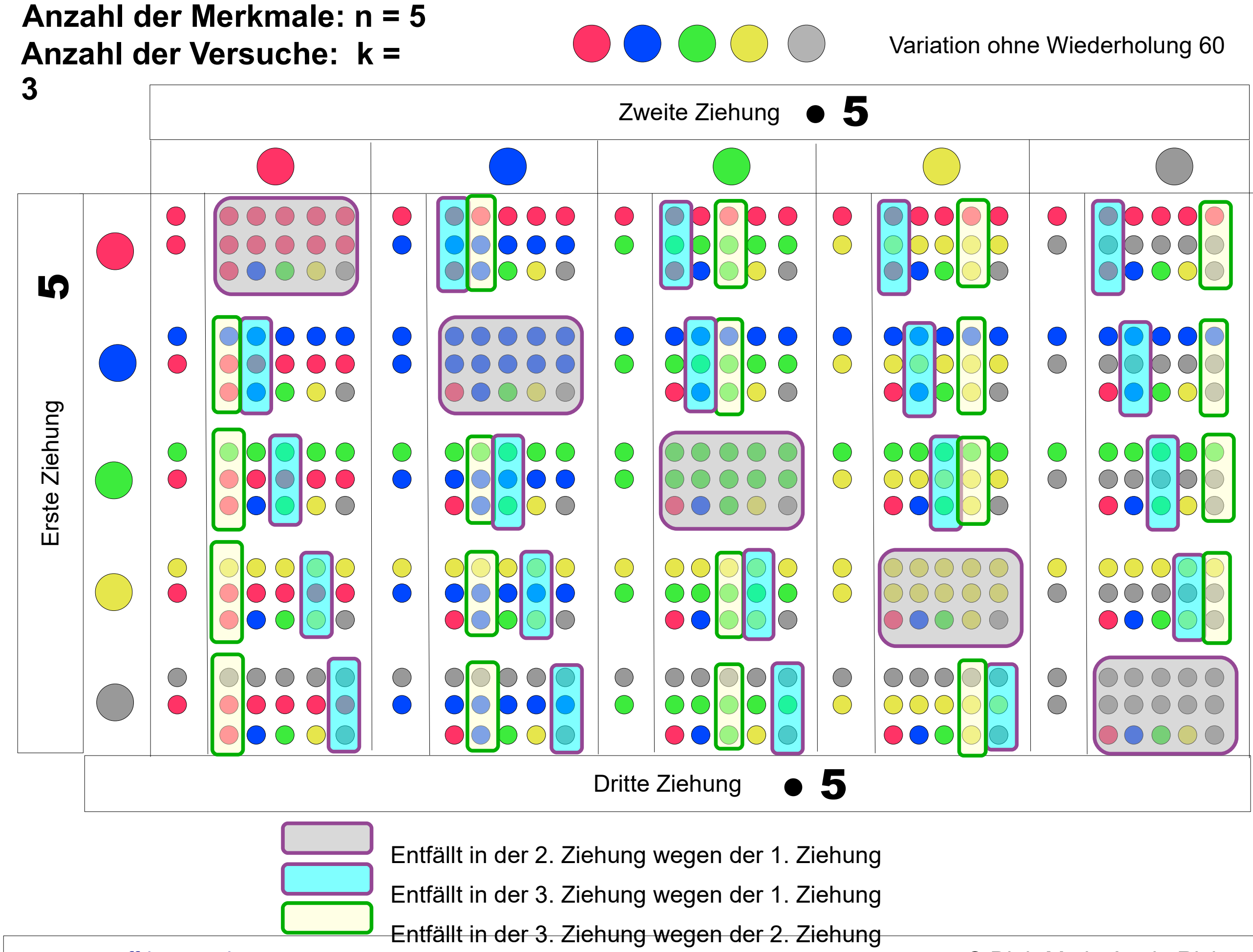
1.2.1. Variation ohne Wiederholung – Urnenmodell für n = 5

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 2

Variation ohne Wiederholung 20

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 3

Variation ohne Wiederholung 60



1.2.1. Variation ohne Wiederholung – Urnenmodell für n = 5

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 2

Variation ohne Wiederholung 20

Erste Ziehung	Zweite Ziehung 1	2	3	4	5
	(1|1)	(2|1)	(3|1)	(4|1)	(5|1)
	(1|2)	(2|2)	(3|2)	(4|2)	(5|2)
	(1|3)	(2|3)	(3|3)	(4|3)	(5|3)
	(1|4)	(2|4)	(3|4)	(4|4)	(5|4)
	(1|5)	(2|5)	(3|5)	(4|5)	(5|5)

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 3

Variation ohne Wiederholung 60

Erste Ziehung	Zweite Ziehung	Dritte Ziehung 1	2	3	4	5
Erste Ziehung = 1	1	(1|1|1)	(1|1|2)	(1|1|3)	(1|1|4)	(1|1|5)
	2	(1|2|1)	(1|2|2)	(1|2|3)	(1|2|4)	(1|2|5)
	3	(1|3|1)	(1|3|2)	(1|3|3)	(1|3|4)	(1|3|5)
	4	(1|4|1)	(1|4|2)	(1|4|3)	(1|4|4)	(1|4|5)
	5	(1|5|1)	(1|5|2)	(1|5|3)	(1|5|4)	(1|5|5)
Erste Ziehung = 2	1	(2|1|1)	(2|1|2)	(2|1|3)	(2|1|4)	(2|1|5)
	2	(2|2|1)	(2|2|2)	(2|2|3)	(2|2|4)	(2|2|5)
	3	(2|3|1)	(2|3|2)	(2|3|3)	(2|3|4)	(2|3|5)
	4	(2|4|1)	(2|4|2)	(2|4|3)	(2|4|4)	(2|4|5)
	5	(2|5|1)	(2|5|2)	(2|5|3)	(2|5|4)	(2|5|5)
Erste Ziehung = 3	1	(3|1|1)	(3|1|2)	(3|1|3)	(3|1|4)	(3|1|5)
	2	(3|2|1)	(3|2|2)	(3|2|3)	(3|2|4)	(3|2|5)
	3	(3|3|1)	(3|3|2)	(3|3|3)	(3|3|4)	(3|3|5)
	4	(3|4|1)	(3|4|2)	(3|4|3)	(3|4|4)	(3|4|5)
	5	(3|5|1)	(3|5|2)	(3|5|3)	(3|5|4)	(3|5|5)
Erste Ziehung = 4	1	(4|1|1)	(4|1|2)	(4|1|3)	(4|1|4)	(4|1|5)
	2	(4|2|1)	(4|2|2)	(4|2|3)	(4|2|4)	(4|2|5)
	3	(4|3|1)	(4|3|2)	(4|3|3)	(4|3|4)	(4|3|5)
	4	(4|4|1)	(4|4|2)	(4|4|3)	(4|4|4)	(4|4|5)
	5	(4|5|1)	(4|5|2)	(4|5|3)	(4|5|4)	(4|5|5)
Erste Ziehung = 5	1	(5|1|1)	(5|1|2)	(5|1|3)	(5|1|4)	(5|1|5)
	2	(5|2|1)	(5|2|2)	(5|2|3)	(5|2|4)	(5|2|5)
	3	(5|3|1)	(5|3|2)	(5|3|3)	(5|3|4)	(5|3|5)
	4	(5|4|1)	(5|4|2)	(5|4|3)	(5|4|4)	(5|4|5)
	5	(5|5|1)	(5|5|2)	(5|5|3)	(5|5|4)	(5|5|5)

Entfällt in der 2. Ziehung wegen der 1. Ziehung

Jede Tabelle entspricht einer Zeile der ersten Ziehung in Kugel Darstellung: 1 = rot ; 2 = blau ; .....
Jeder Spalte entspricht der zweiten Ziehung in der gleichen Farbreihenfolge.
Die dritten Spalten in jeder Anordnung entsprechen den dritten Zeilen in der Farbdarstellung

Entfällt in der 3. Ziehung wegen der 1. Ziehung

Entfällt in der 3. Ziehung wegen der 2. Ziehung

1.2.1. Variation mit Wiederholung – duales Urnenmodell $n = 5$, $k = 2$

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 2

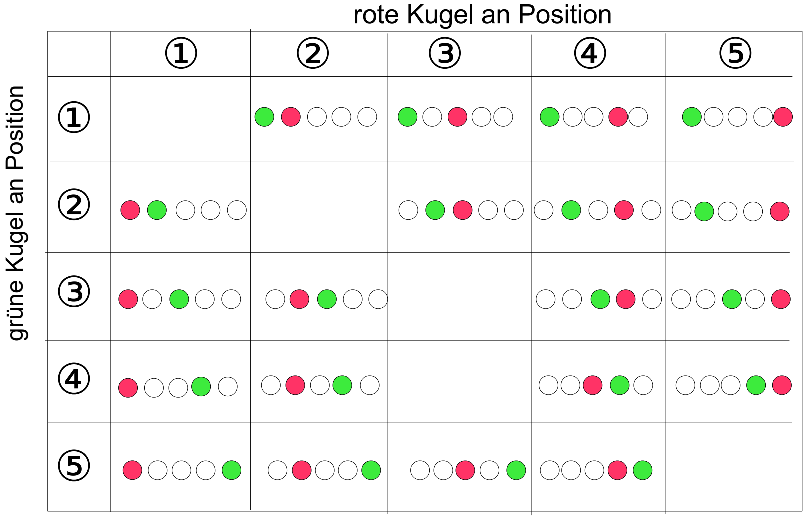
Duales Urnenmodell:

- 2 unterscheidbare Kugeln auf
- 5 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung nicht zulässig ist

Urne, die mit der 1. Kugel belegt

Urne, die mit der 2. Kugel belegt

Urne bleibt leer



1.2.1. Variation mit Wiederholung – duales Urnenmodell n = 5, k = 3

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 3

Duales Urnenmodell:

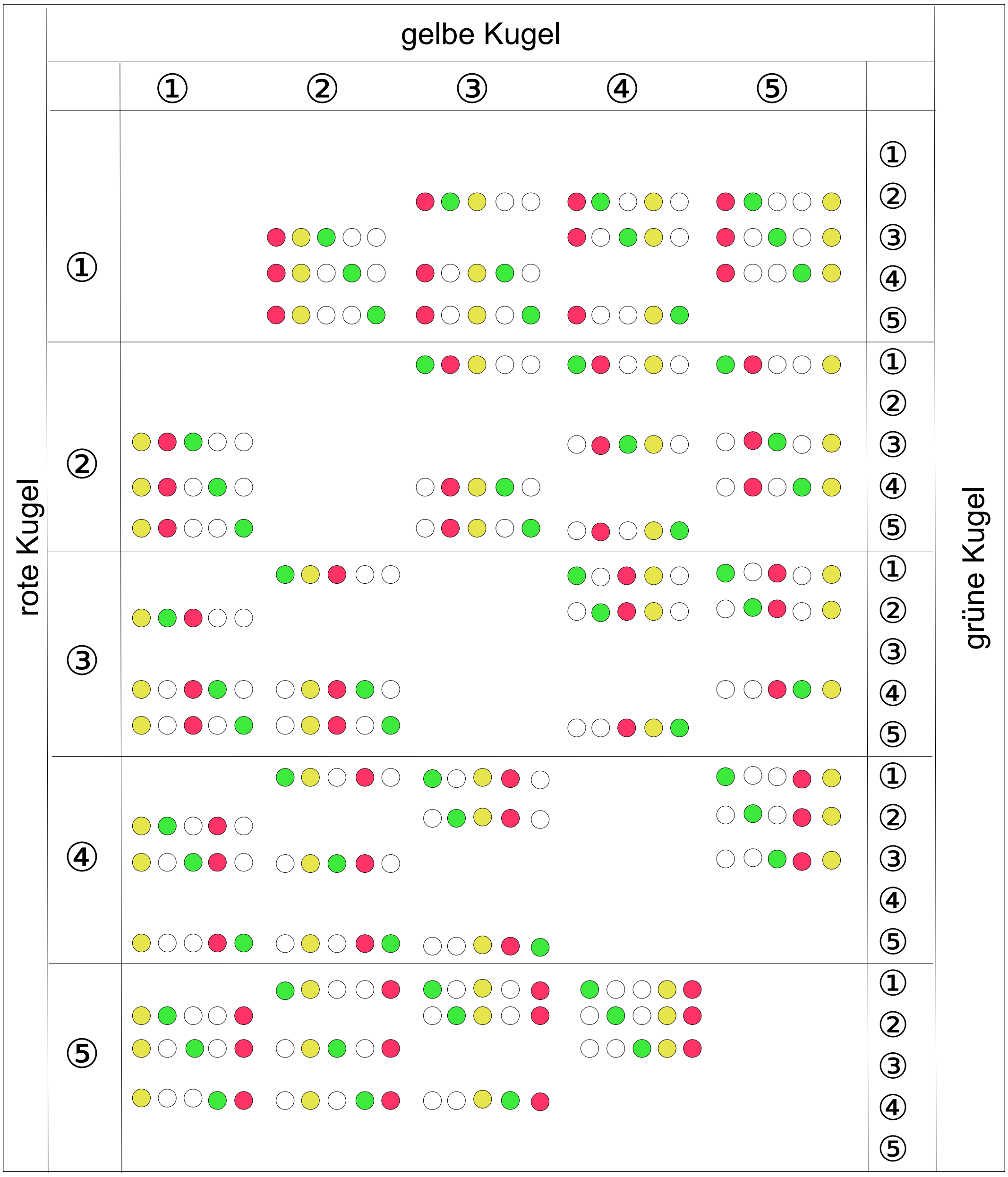
- 3 unterscheidbare Kugeln auf
- 5 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung nicht zulässig ist

Urne, die mit der 1. Kugel belegt

Urne, die mit der 2. Kugel belegt

Urne, die mit der 3. Kugel belegt

Urne bleibt leer



1.2.1. ohne Wiederholung mit Reihenfolge k Elemente

Beispiel 1

Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es bei einem 3-fachen Würfelwurf , wenn alle Augenzahlen verschieden sind?

Lösung

	die Kugeln entsprechen den 6 Augenzahlen	n=6	
1	Es sind drei Würfe	k=4	V/K
2	es ist entscheidend in welcher Reihenfolge die Augenzahlen kommen	mit Reihenfolge	V
3	die Augenzahlen können sich nicht wiederholen	ohne Zurücklegen	V_{oW}

Variation ohne Wiederholung – k-Permutation aus einer n-Menge
Damit ergeben sich die Möglichkeiten zu: n! / (n-k)! = 6!/(6-3)! = 120

Beispiel 2

Sie wollen 3 Wochen Urlaub machen und zwar jede Woche in einem anderen Land. Sie haben sich entschieden, ihren Urlaub im Reisebüro X zu buchen und erhalten dort die Auskunft, Sie könnten jederzeit in 25 Ländern Urlaub machen, müßten sich dann aber festlegen. Wieviele Möglichkeiten es gibt, Ihren Urlaub in drei Ländern zu buchen.
Eine der Möglichkeiten wäre etwa: Zuerst nach Spanien, dann nach Frankreich und zuletzt nach Italien.

Lösung

	Anzahl der Ferienländer	n = 25	
1	Anzahl der Urlaubswochen	k = 3	V/K
2	Die Frage „wieviele Möglichkeiten gibt es, den Urlaub zu buchen“ beutet, dass die Reihenfolge beachtet werden muss. Wäre die Frage „wieviele Möglichkeiten gibt es drei Länder zu bereisen“, ist die Reihenfolge uninteressant	mit Reihenfolge	V
3	Man möchte in kein Land zweimal	ohne Wiederholung	V_{oW}

Variation ohne Wiederholung – k-Permutation aus einer n-Menge

Anzahl der Kombinationen $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{25!}{22!} = 25 * 24 * 23 = 13800$

Beispiel 3

Wie viele verschiedene Anordnungen mit drei unterschiedlichen Buchstaben lassen sich aus acht verschiedenen Buchstaben bilden

Lösung

A	B	C
B	C	D
C	D	E
D	E	F
E	F	G
F	G	H
G	H	
H		
8 ·	7 ·	6

Für die Auswahl des 1. Buchstabens stehen 8 Möglichkeiten zur Verfügung

Für die Auswahl des 2. Buchstabens stehen noch 7 Möglichkeiten zur Verfügung, da einer von ihnen bereits weg ist.

Für die Auswahl des 3. Buchstabens stehen noch 6 Möglichkeiten zur Verfügung, da zwei von ihnen bereits weg sind.

$\frac{n!}{(n-k)!}$ $\frac{8!}{(8-3)!}$ $\frac{8!}{5!}$ **Lösung: 336**

1.2.1. ohne Wiederholung mit Reihenfolge k Elemente

Beispiel 4

Jemand hat 10 verschiedene Bonbons und verteilt davon an fünf Kinder je ein Bonbon. Wie viele Möglichkeiten der Verteilung gibt es.

Lösung

1. Kind		2. Kind		3. Kind		4. Kind		5.Kind
10	·	9	·	8	·	7	·	6

$\frac{n!}{(n-k)!}$ $\frac{10!}{(10-5)!}$ $\frac{10!}{5!}$ **Lösung: 30 240**

Beispiel 5

Wie viele verschiedene zweistellige Zahlen gibt es ?

Lösung

Es gibt 10 verschiedene Ziffern, bei zweistelligen Zahlen ist aber die erste Ziffer verschieden von 0, während für die zweite Ziffer alle 10 Ziffern möglich sind. Damit sind für die zweite Position 10 Möglichkeiten und für die 1. Position 9 Möglichkeiten vorhanden.

$\frac{n!}{(n-k)!}$ $\frac{10!}{(10-2)!}$ $\frac{10!}{8!}$ **Lösung: 90**

Beispiel 6

Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen kann man aus den Ziffern

5, 6, 7, 8, 9 0, 2, 4, 6, 8

bilden, wenn jede Zahl aus drei verschiedenen Ziffern bestehen soll.

Lösung

5, 6, 7, 8, 9

1. Ziffer		2. Ziffer		3. Ziffer
5	·	4	·	3

$\frac{n!}{(n-k)!}$ $\frac{5!}{(5-3)!}$ $\frac{5!}{2!}$ **Lösung: 60**

0, 2, 4, 6, 8

1. Ziffer		2. Ziffer		3. Ziffer
4	·	4	·	3

$4 \cdot \frac{n!}{(n-k)!} = 4 \cdot \frac{4!}{(4-2)!} = 4 \cdot \frac{4!}{2!}$ **Lösung: 48**

Wegen der Ziffer 0, die nicht an erster Stelle stehen kann, gilt die Berechnungsformel erst ab der zweiten Stelle. Ab der zweite und aller weiteren Stellen sind alle noch vorhandenen Ziffern erlaubt. Gleichgültig, welche Ziffer als erste ausgewählt wurde, stehen ab diesem Zeitpunkt nur noch 4 Ziffern zur Verfügung. Deshalb gilt die Fakultätsformel erst ab n = 4 und nicht ab n = 5. Jetzt bleibt außerhalb dieser Betrachtung noch zu ermitteln wieviele Möglichkeiten gibt es für die erste Position. Für die erste Position sind 4 Ziffern möglich.

Beispiel 7

Ein Würfel wird dreimal geworfen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass die Augenzahlen der drei Würfe verschieden sind.

Lösung

1. Wurf		2. Wurf		3. Wurf
6	·	5	·	4

$\frac{n!}{(n-k)!}$ $\frac{6!}{(6-3)!}$ $\frac{6!}{3!}$ **Lösung: 120**

1.2.2. Kombination ohne Wiederholung

Auswahl von k Elementen aus einer Menge von n Elementen

Wieviele Möglichkeiten gibt es **k Elemente** **ohne Beachtung der Reihenfolge** anzuordnen ?

Im Abschnitt 1.2.1 wurde die Formel für die Beachtung der Reihenfolge hergeleitet. Soll jetzt die Reihenfolge nicht beachtet werden, dann werden die verschiedenen Anordnungen, die bei k Elementen möglich sind auf eine Anordnung reduziert. Es zählen nur die Elemente selbst, aber nicht Reihenfolge in der sie erscheinen. Nach 1.1. kann man aber k verschiedenen Elemente in k! verschiedene Anordnungen bringen, die jetzt alle als eine Anordnung zählen. Deshalb ist die Anzahl aus 1.2.1. durch k! zu dividieren.

$$\frac{n!}{(n-k)!}\,\frac{1}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

***k*-Teilmenge** $(x_1, x_2, \ldots x_k)$ einer endlichen Menge M

- ist eine ungeordnete Auswahl von k Elementen aus M
- ist die Anzahl der möglichen Teilmengen mit k Elementen einer n – elementigen Menge

- Alle k-Teilmengen, die aus einer
- n-elementigen Menge erzeugt werden können

Für die **Auswahl**
- von k Elementen
- aus einer Menge mit n Elementen
- **ohne Wiederholung** (das heißt immer, man könnte die Elemente auch in einem Zug aus der Urne ziehen)
- **ohne Berücksichtigung der Reihenfolge**

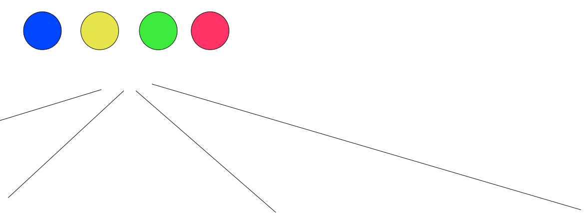
Voraussetzungen:
- Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander.
- Es werden einige (k) Elemente ausgewählt.
- Beim Ziehen ohne Zurücklegen muss $k \leq n$ sein, da irgendwann die Urne leer ist.
- Ein Element kann nicht mehrmals ausgewählt werden.

Interpretationen
- Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge zu ziehen ($k \leq n$). Die Kugeln können gleichzeitig gezogen werden.
- Anzahl der Möglichkeiten, k gleiche (nicht unterscheidbare) Kugeln auf n unterscheidbare Urnen zu verteilen, wobei jede Urne höchstens eine Kugel erhalten kann.
- Anzahl der n-stelligen Sequenzen mit k-Mal dem Zeichen "1" und (n-k)-Mal dem Zeichen "0".
- Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

1.2.2. Kombination ohne Wiederholung – Baumdiagramm und Duales Urnenmodell

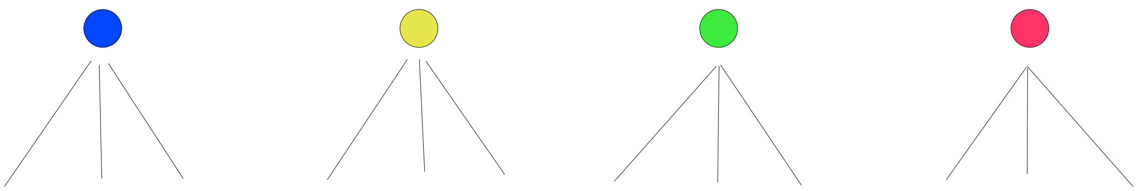
Im Baumdiagramm ist in jeder Ebene der 1. Teilbaum vollständig besetzt, für jeden weiteren Teilbaum fehlt ein zusätzlicher Pfad.

Anzahl der Merkmale: n = 4



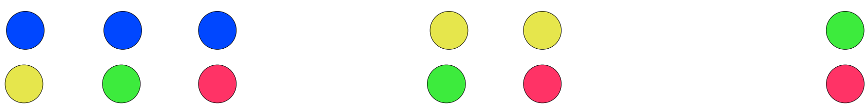
4

Anzahl der Versuche: k = 1



• 3

Anzahl der Versuche: k = 2



: 2

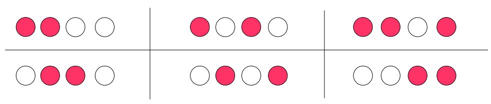
von 12 Zweigen
nur 6 besetzt

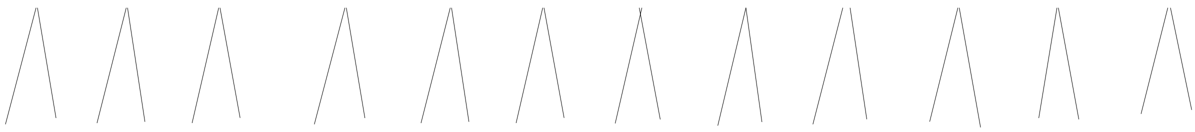
$$4 \cdot 3 \cdot \frac{6}{12} = \frac{4 \cdot 3}{2} \; \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

=

Duales Urnenmodell:

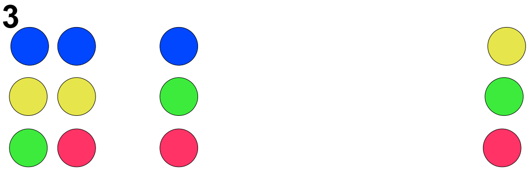
- 2 nicht unterscheidbare Kugeln sind auf
- 4 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung nicht zulässig





• 2

Anzahl der Versuche: k = 3



24 Zweige
von Vorebenen nur 12 besetzt : 2
von diesen 12 Zweigen nur besetzt : 3

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

Duales Urnenmodell:

- 3 nicht unterscheidbare Kugeln sind auf
- 4 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung nicht zulässig

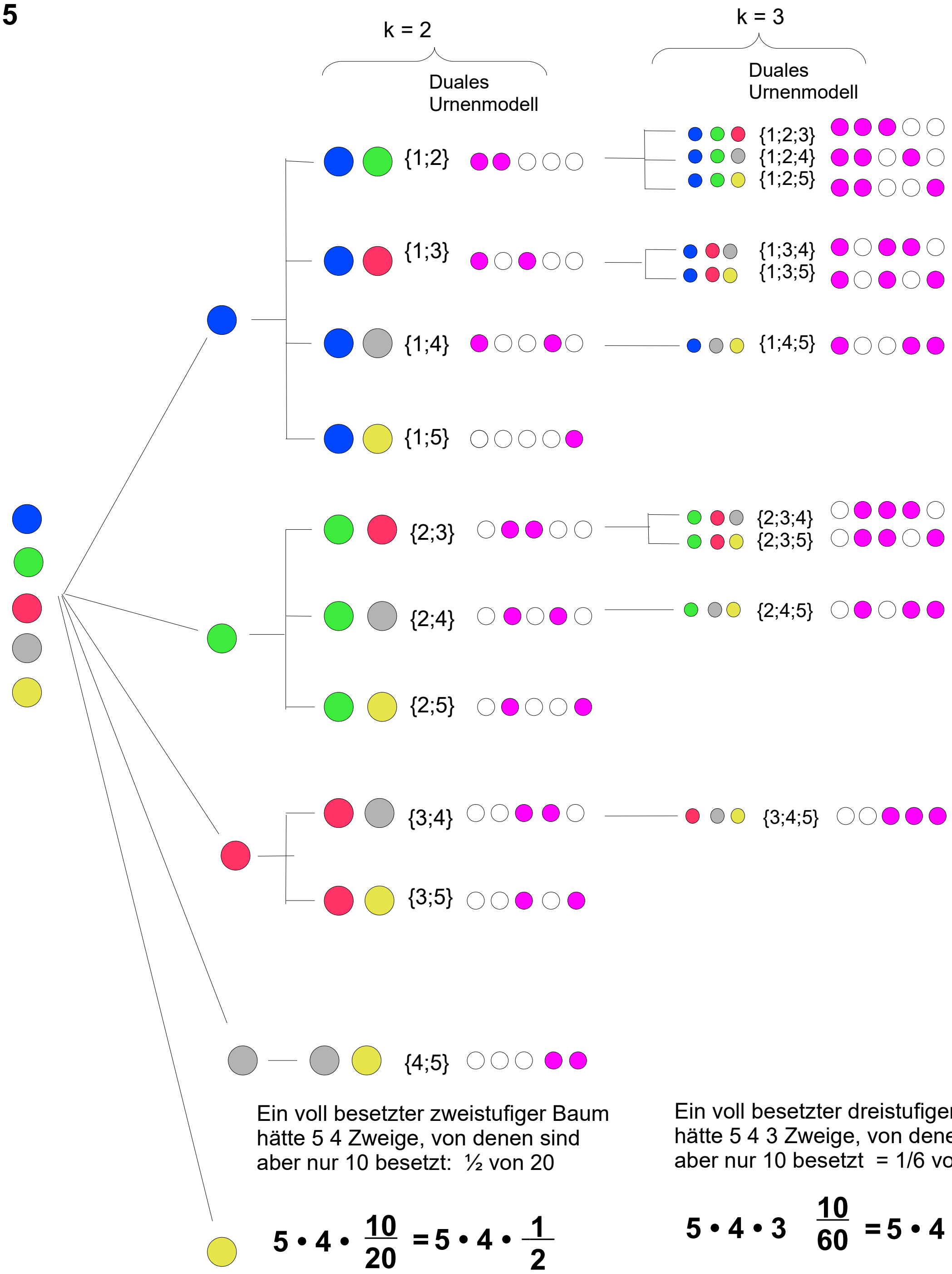
$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{4}{24} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \;\cdot 4}{3 \cdot 2 \;\cdot 4}$$

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} \; \frac{\cdot 1}{\cdot 1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

1.2.2. Kombination ohne Wiederholung – Baumdiagramm für n = 5

Beim Abzählen ohne Wiederholung treten in der Folgestufe jeweils in Zweig im Baum weniger auf. Bei 5 Kugeln existieren bei der ersten Auswahl 5 Zweige, bei der zweiten Auswahl zu jedem vorhergehenden Zweig noch 4. Bei der dritte Stufe zu jeden Zweig der zweiten Stufe noch drei Zweige. Das wäre ein voller Ereignisbaum. Dadurch, dass hier ohne Betrachtung der Reihenfolge zu arbeiten ist, fallen einige Ereignisse weg, die nur durch Vertauschung anderer Ereignisse entstanden sind. Wenn man den Anteil der verbleibenden Zweige als Bruch schreibt und mit dem Produkt für eine volle Baumbelegung multipliziert, erhält man ebenfalls die entsprechenden Abzählformel.

Anzahl der Merkmale:
n = 5



Ein voll besetzter zweistufiger Baum hätte 5 4 Zweige, von denen sind aber nur 10 besetzt: ½ von 20

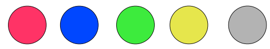
$$5 \cdot 4 \cdot \frac{10}{20} = 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Ein voll besetzter dreistufiger Baum hätte 5 4 3 Zweige, von denen sind aber nur 10 besetzt = 1/6 von 60

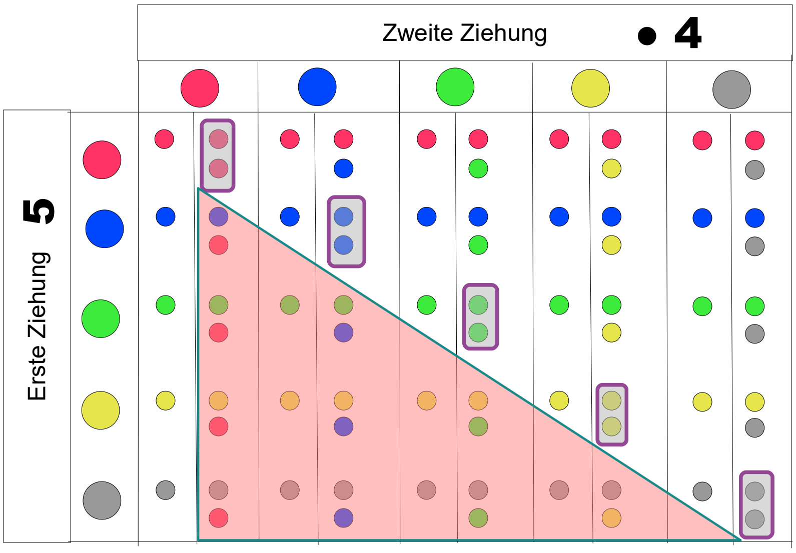
$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{10}{60} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

1.2.2. Kombination ohne Wiederholung Urnenmodell für n = 5

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 2

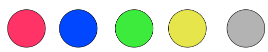


Variation ohne Wiederholung 10

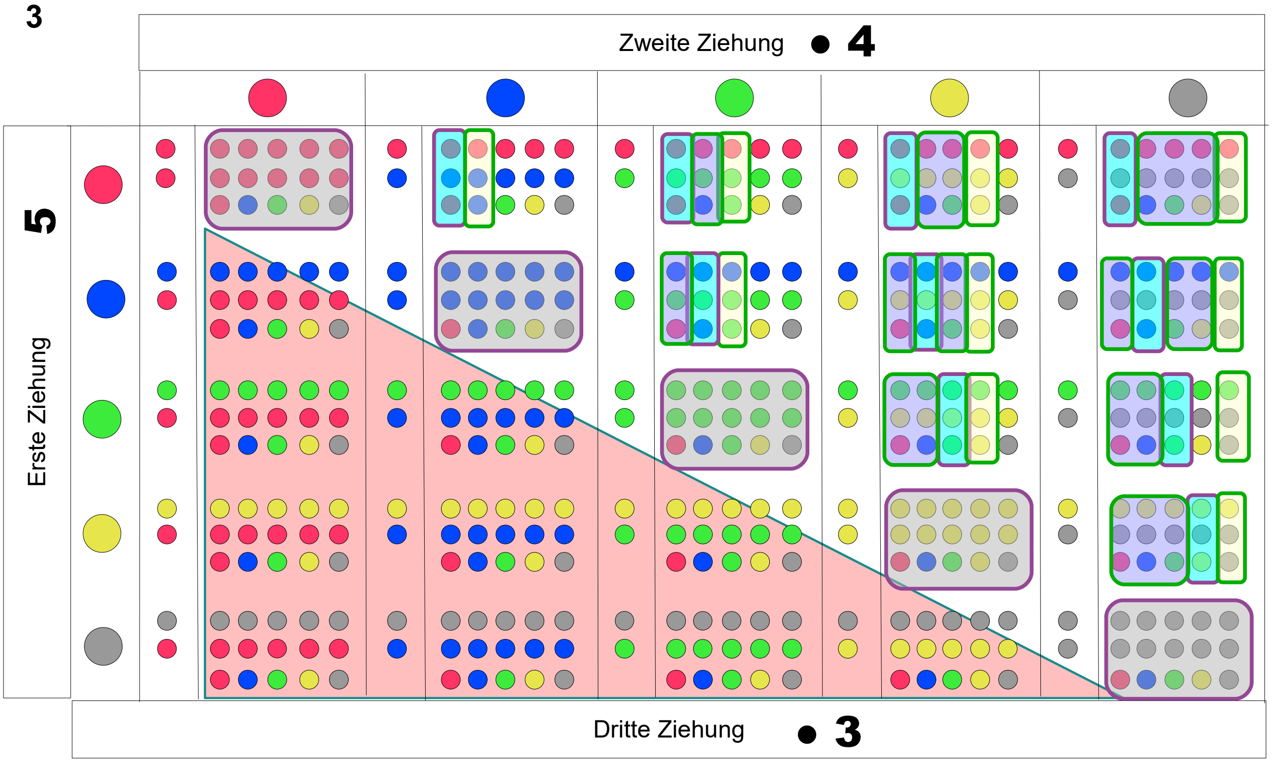


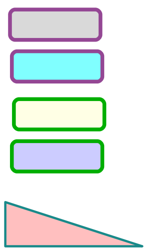
Entfällt in der 2. Ziehung wegen der 1. Ziehung

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 3



Kombination ohne Wiederholung 10





Entfällt in der 2. Ziehung wegen der 1. Ziehung (Hauptdiagonale)
Entfällt in der 3. Ziehung wegen der 1. Ziehung (1 und 3 gleiche Farbe)
Entfällt in der 3. Ziehung wegen der 2. Ziehung (2 und 3 gleiche Farbe)
Entfällt, weil Nachfolgenummern kleiner sind wie Vorgängernummern (etwas nach unten verschoben)

Es fehlen alle Elemente **unterhalb der Hauptdiagonale**, da sie nur Vertauschungen der Elemente oberhalb der Hauptdiagonale sind (Keine Reihenfolge)

1.2.2. Kombination ohne Wiederholung Urnenmodell für n = 5

Anzahl der Merkmale: n = 5

Anzahl der Versuche: k = 2

Kombination ohne Wiederholung 10

Zweite Ziehung \ Erste Ziehung	1	2	3	4	5
1	(1|1)	(2|1)	(3|1)	(4|1)	(5|1)
2	(1|2)	(2|2)	(3|2)	(4|2)	(5|2)
3	(1|3)	(2|3)	(3|3)	(4|3)	(5|3)
4	(1|4)	(2|4)	(3|4)	(4|4)	(5|4)
5	(1|5)	(2|5)	(3|5)	(4|5)	(5|5)

Anzahl der Merkmale: n = 5

Anzahl der Versuche: k = 3

Kombination ohne Wiederholung 10

Erste Ziehung	Zweite Ziehung \ Dritte Ziehung	1	2	3	4	5
Erste Ziehung = 1	1	(1|1|1)	(1|1|2)	(1|1|3)	(1|1|4)	(1|1|5)
	2	(1|2|1)	(1|2|2)	(1|2|3)	(1|2|4)	(1|2|5)
	3	(1|3|1)	(1|3|2)	(1|3|3)	(1|3|4)	(1|3|5)
	4	(1|4|1)	(1|4|2)	(1|4|3)	(1|4|4)	(1|4|5)
	5	(1|5|1)	(1|5|2)	(1|5|3)	(1|5|4)	(1|5|5)
Erste Ziehung = 2	1	(2|1|1)	(2|1|2)	(2|1|3)	(2|1|4)	(2|1|5)
	2	(2|2|1)	(2|2|2)	(2|2|3)	(2|2|4)	(2|2|5)
	3	(2|3|1)	(2|3|2)	(2|3|3)	(2|3|4)	(2|3|5)
	4	(2|4|1)	(2|4|2)	(2|4|3)	(2|4|4)	(2|4|5)
	5	(2|5|1)	(2|5|2)	(2|5|3)	(2|5|4)	(2|5|5)
Erste Ziehung = 3	1	(3|1|1)	(3|1|2)	(3|1|3)	(3|1|4)	(3|1|5)
	2	(3|2|1)	(3|2|2)	(3|2|3)	(3|2|4)	(3|2|5)
	3	(3|3|1)	(3|3|2)	(3|3|3)	(3|3|4)	(3|3|5)
	4	(3|4|1)	(3|4|2)	(3|4|3)	(3|4|4)	(3|4|5)
	5	(3|5|1)	(3|5|2)	(3|5|3)	(3|5|4)	(3|5|5)
Erste Ziehung = 4	1	(4|1|1)	(4|1|2)	(4|1|3)	(4|1|4)	(4|1|5)
	2	(4|2|1)	(4|2|2)	(4|2|3)	(4|2|4)	(4|2|5)
	3	(4|3|1)	(4|3|2)	(4|3|3)	(4|3|4)	(4|3|5)
	4	(4|4|1)	(4|4|2)	(4|4|3)	(4|4|4)	(4|4|5)
	5	(4|5|1)	(4|5|2)	(4|5|3)	(4|5|4)	(4|5|5)
Erste Ziehung = 5	1	(5|1|1)	(5|1|2)	(5|1|3)	(5|1|4)	(5|1|5)
	2	(5|2|1)	(5|2|2)	(5|2|3)	(5|2|4)	(5|2|5)
	3	(5|3|1)	(5|3|2)	(5|3|3)	(5|3|4)	(5|3|5)
	4	(5|4|1)	(5|4|2)	(5|4|3)	(5|4|4)	(5|4|5)
	5	(5|5|1)	(5|5|2)	(5|5|3)	(5|5|4)	(5|5|5)

Entfällt in der 2. Ziehung wegen der 1. Ziehung

Entfällt in der 3. Ziehung wegen der 1. Ziehung

Entfällt in der 3. Ziehung wegen der 2. Ziehung

Entfällt weil Spaltennummer größer als Zeilennummer (ohne Reihenfolge)

Entfällt, weil Nachfolgenummern kleiner sind wie Vorgängernummern

(Wenn eine kleinere Nummer nach einer größeren auftritt, dann muss in den bisherigen Ziehungen mindestens in der 1. Ziehung die kleine Nummer bereits vorhanden sein. Da die Reihenfolge nicht zu beachten ist, ist dieses Trippel bereits erfasst.)

Übrig bleiben die rot geschriebenen Trippel.

1.2.2. Kombination ohne Wiederholung Duales Urnenmodell für n = 5

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 2

Duales Urnenmodell:

- 2 nicht unterscheidbare Kugeln auf
- 5 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung nicht zulässig ist

4 ●●○○○ ●○○●○ ●○○●○ ●○○○●

3 ○●●○○ ○●○●○ ○●○○●

2 ○○●●○ ○○●○●

1 ○○○●●

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 3

Duales Urnenmodell:

- 3 nicht unterscheidbare Kugeln auf
- 5 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung nicht zulässig ist

3 ●●●○○ ●●○●○ ●●○○●

5 ●○●●○ ●○●○●

6 ●○○●●

9 ○●●●○ ○●●○● ○●○●●

10 ○○●●●

2. Kugel an Position

1. Kugel an Position

	②	③	④	⑤
①	●●○○○	●○○●○	●○○●○	●○○○●
②		○●●○○	○●○●○	○●○○●
③			○○●●○	○○●○●
④				○○○●●

2. Kugel an Position

1. Kugel an Position

	②	③	④	
①	●●●○○			③
	●●○●○	●○●●○		④
	●●○○●	●○●○●	●○○●●	⑤
②				③
		○●●●○		④
		○●●○●	○●○●●	⑤
③				③
				④
			○○●●●	⑤

1.1.3. ohne Wiederholung ohne Reihenfolge k Elemente

Beispiel 1

Wie viele 4-stellige Zahlen haben genau 2 mal die Ziffer 2?

Lösung

	die Kugeln entsprechen den 4 Stellen	n = 4	
1	die Ziffer 2 soll an zwei Stellen sein	k = 2	V/K
2	wo die 2-en auftreten ist uninteressant	ohne Reihenfolge	K
3	jede Stelle kommt genau einmal vor	ohne Zurücklegen	K_{oW}

Kombination ohne Wiederholung – k-Teilmenge aus einer n-Menge
Damit ergibt sich als Lösung: n! / (n-k)!k! = 4! / 2!2! = 6

Beispiel 2

An einer Feier nehmen 20 Personen teil. Plötzlich geht das Bier aus. Um hinreichenden Nachschub zu besorgen, werden 3 Leute ausgewählt, weil 3 Personen notwendig sind, um das neue Fass zu transportieren. Wieviele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, 3 Leute zum Bierholen zu schicken ?

Lösung

	die Personen entsprechen den 20 Stellen	n = 4	
1	3 Personen sollen ausgewählt werden	k = 2	V/K
2	in welcher Reihenfolge die Personen ausgewählt werden ist irrelevant	ohne Reihenfolge	K
3	keine Wiederholung, keine Person kann zweimal ausgewählt werden.	ohne Zurücklegen	K_{o} w

Kombination ohne Wiederholung – k-Teilmenge aus einer n-Menge
Anzahl der Kombinationen 1140

Beispiel 3

Sie haben in einem Kaufhaus 8 verschiedene Kleidungsstücke für jeweils 50 DM ausgesucht, können aber nur 5 bezahlen. Sie entscheiden sich deshalb dafür, 3 Kleidungsstücke nicht zu kaufen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die 3 Kleidungsstücke auszusortieren?

Lösung

	Anzahl der Kleidungsstücke	n = 8	
	Anzahl der Objekte	k = 3	V/K
	die Reihenfolge des Zurücklegens ist uninteressant	ohne Reihenfolge	K
	kein Kleidungsstück kann zweimal zurückgelegt werden	ohne Wiederholung	K_{oW}

Kombination ohne Wiederholung – k-Teilmenge aus einer n-Menge

Anzahl der Kombinationen $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8*7*6}{1*2*3} = 8*7 = 56$

Jedes Element kann mehrmals ausgewählt werden.

2. mit Wiederholung

In diesem Fall spricht man von „mit Wiederholung“ oder „mit Zurücklegen“. In diesen Fällen kann die Anzahl der k der Ziehungen größer sein, als die Vorhandenen Elemente. Das gezogene Element wird in seiner Eigenschaft notiert und in den Behälter zurückgelegt. Damit ist es möglich, dass auch bei 3 Elementen 100 mal gezogen werden kann. Da hier k größer als n sein kann werden Binomialkoeffizienten nicht zu Einsatz kommen, da für deren Berechnung die obere Zahl immer größer sein muss als die untere Zahl.

2.1. es werden alle Elemente ausgewählt

2.1.1. Permutation mit Wiederholung

Permutation von Elementen aus n gleichen Mengen mit n Elementen, wobei aus jeder Menge eine Element entnommen wird.

Eine Beachtung der Reihenfolge kann nur für unterschiedliche Elemente betrachtet werden. Vertauschungen gleicher Elemente werden als gleiches Ergebnis wahrgenommen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es **n Elemente, nicht alle unterscheidbar** anzuordnen ?

Es soll davon ausgegangen werden, dass die Nichtunterscheidbarkeit in der gleichen Farbe der Elemente liegt. Es gibt also mehrere Elemente, die ein und dieselbe Farbe haben. Die Elemente sollen gedanklich unterscheidbar gemacht werden, in dem alle Elemente einer Farbe durchnummeriert werden. Wenn man jetzt die Farbe und die Nummer als Eigenschaft der Elemente wählt, sind alle Elemente wieder unterscheidbar. Damit ist die Anzahl der möglichen Anordnungen wieder n! nach 1.1.

Wischt man jetzt die Nummern von den Kugeln wieder ab, so sind alle Anordnungen in denen Elemente einer Farbe an den gleichen Positionen liegen, nur noch als eine Anordnung wahrnehmbar. Wenn n_1 Elemente von der Farbe 1 vorhanden sind, dann lassen sich $n_1!$ Anordnungen nicht mehr unterscheiden, da die Nummern fehlen und jede Anordnung als die gleiche angesehen wird.

Damit bleiben als unterscheidbare Anordnungen $\frac{n!}{n_1!}$

Gibt es unter den Elementen nicht nur mehrfache Elemente von einer Farbe, sondern von mehreren Farben, dann lässt sich diese Formel verallgemeinern:

$$\boxed{\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n_r!}}$$

Dabei sind die einzelnen n_k jeweils die Anzahl der nicht unterscheidbaren Elemente eines Typs.

Für die **Auswahl**
- von n Elementen
- aus einer Menge mit n Elementen
- **mit Wiederholung** (das heißt auch hier, es könnten alle Elemente auf einmal gezogen werden)
- **mit Berücksichtigung der Reihenfolge unterscheidbarer Elemente** und **ohne Berücksichtigung der Reihenfolge nicht unterscheidbarer Elemente**

Voraussetzungen:
- Mindestens 2 Elemente der Ausgangsmenge sind identisch, d.h. es gibt Elemente der Ausgangsmenge, die sich nicht voneinander unterscheiden lassen .
- Es müssen alle (n) Elemente ausgewählt werden.
  (nach dem Experiment ist die Urne leer)
- Ein Individualelement kann nicht mehrmals ausgewählt werden, **ein Element mit gleicher Eigenschaft hingegen schon**. Liegen z.b. 2 rote Kugeln in der Ausgangsmenge, so muss jede der beiden roten Kugeln ausgewählt werden (**mit Wiederholung**), eine dritte rote Kugel kann aber nicht ausgewählt werden.
- **Die Reihenfolge der unterscheidbaren Elemente spielt eine Rolle.**

Interpretationen
- Anzahl der Möglichkeiten, eine geordnete Stichprobe von k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln mit zurücklegen so zu ziehen, dass, dass die Kugel a_m genau k_m – mal gezogen wird.
- Anzahl der Möglichkeiten, k unterscheidbare Objekte auf n Urnen so zu verteilen, dass in der m – ten Urne k_m Objekte liegen.

2.1.1. mit Wiederholung mit Reihenfolge n Elemente

Beispiel 1

Sie stehen an der Kasse und müssen genau 4.50 Euro bezahlen. In ihrem Geldbeutel befinden sich drei 1-Euromünzen und drei 50 Cent – Münzen. Sie nehmen die Münzen nacheinander heraus und legen sie vor der Kasse ab. Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, die Münzen der Reihe nach anzuordnen ?

Lösung

	Anzahl der Münzen ist n	n = 6	
1	Es werden alle Münzen benötigt	k = 6	P
2	da Permutation ein Spezialfall der Variation ist kann hier „mit Reihenfolge“ argumentiert werden.	mit Reihenfolge	
3	Mehrere Münzen sind gleich; jeweils 3 Stück	mit Wiederholung	P_{mW}

Permutation mit Wiederholung
Anzahl der Möglichkeiten, n! /k1!k2! = 6!/3!3! = 20.

2.2. es werden k Elemente mit Wiederholung ausgewählt

2.2.1. Variation mit Wiederholung

Permutation von Elementen aus k gleichen Mengen mit n Elementen, wobei aus jeder Menge eine Element entnommen wird.

1.2.2. Wieviele Möglichkeiten gibt es **k Elemente** unter **Beachtung der Reihenfolge** anzuordnen ?

Für das Ziehen des **ersten Elements** gibt es **n** verschiedene Möglichkeiten.

Für das Ziehen des zweiten Elements gelten die gleichen Regeln, wie für das erste, das gezogene Element wird zurückgelegt und es sind wieder n Elemente vorhanden.

Für das Ziehen des **zweiten Elements** gibt es **n** verschiedene Möglichkeiten.

Für das Ziehen des dritten Elements gelten die gleichen Regeln, wie für das erste, das gezogene Element wird zurückgelegt und es sind wieder n Elemente vorhanden.

Für das Ziehen des **dritten Elements** gibt es **n** verschiedene Möglichkeiten.

• • • • •

Für das Ziehen des **k–ten Elements** gibt es **n** verschiedene Möglichkeiten.

Werden aus einer Urne mit n Elementen alle k Elemente unter Beachtung der Reihenfolge gezogen und wieder zurückgelegt, dann gibt es

$$\underbrace{\boxed{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k}}_{k\text{ – Faktoren}}$$

verschiedene Möglichkeiten des Ziehens.

***k*-Tupel** $(x_1, x_2, \ldots x_k)$

- Anordnung je eines Elementes aus k verschiedenen Mengen, wobei aus jeder Menge **ein** Element vorhanden ist.
- Aus n unterscheidbaren Objekten einer Menge werden nacheinander mit Zurücklegen k Objekte entnommen
- Ein jedes solches k-Tupel ist ein Pfad im Baumdiagramm.
- Bei Berücksichtigung der Reihenfolge ist jeder Pfad zu bewerten, es gibt so viele Möglichkeiten, wie k-Tupel zu bilden sind.
- Da jedes Element nur einmal vorhanden sein darf, ist k ≤ n.

> - Alle k–Tupel, die aus einer
> - n–elementigen Menge erzeugt werden können

Für die **Auswahl**

- von k Elementen (Kugeln), beim Ziehen mit zurücklegen kann k > n sein, da jeder Versuch die Bedingungen hat, wie der erste
- aus einer Menge mit n Elementen (Urne)
- **mit Wiederholung (Zurücklegen)** (das bedeutet, dass vor jeder neuen Ziehung der Zustand vor der ersten Ziehung wieder hergestellt wird. Damit ist auch möglich, dass k > n, da die „Urne“ nie leer wird.)
- **mit Berücksichtigung der Reihenfolge**

Voraussetzungen:

- Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander.
- Es werden einige (k) Elemente ausgewählt.
- Beim Ziehen mit Zurücklegen kann k > n sein, da jeder Versuch die gleichen Bedingungen hat, wie der erste Versuch.
- Ein Element kann mehrmals ausgewählt werden.

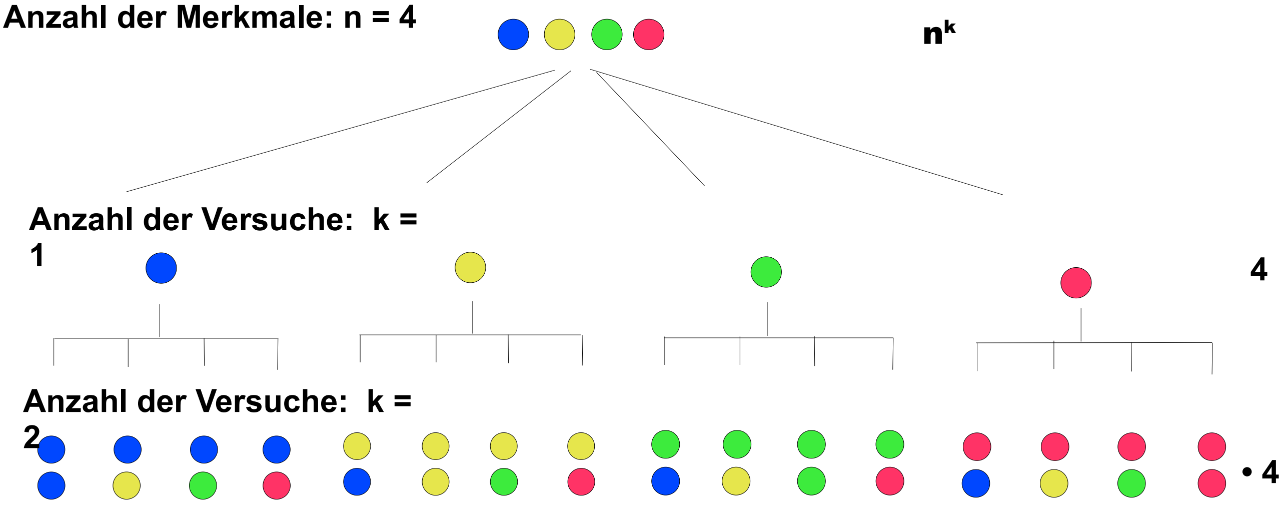
Interpretationen

- Anzahl der Möglichkeiten, eine geordnete Stichprobe von k Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln mit Zurücklegen zu ziehen.
- Anzahl der Möglichkeiten, k verschiedene (unterscheidbare) Objekte auf n Urnen zu verteilen, wobei jede Urne beliebig viele Objekte aufnehmen kann.
- Anzahl der k-stelligen Sequenzen, in denen jede Stelle mit irgendeinem von n verschiedenen, beliebig oft wiederholbaren Zeichen besetzt ist.

2.2.1. Variation mit Wiederholung – Baumdiagramm und duales Urnemodell

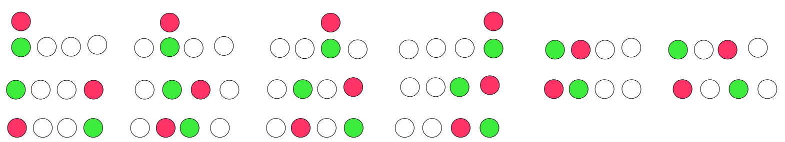
Das Baumdiagramm ist voll besetzt.
Baumdiagramm ist beliebig erweiterbar.

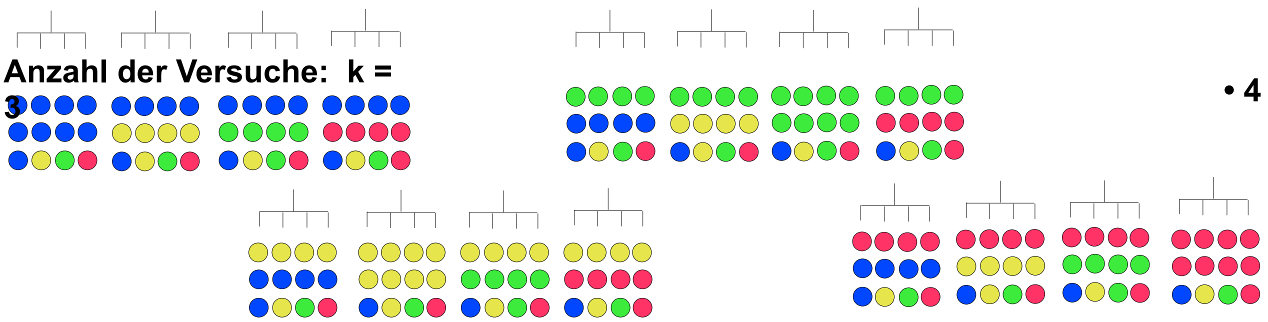
Anzahl der Merkmale: n = 4



Duales Urnenmodell:

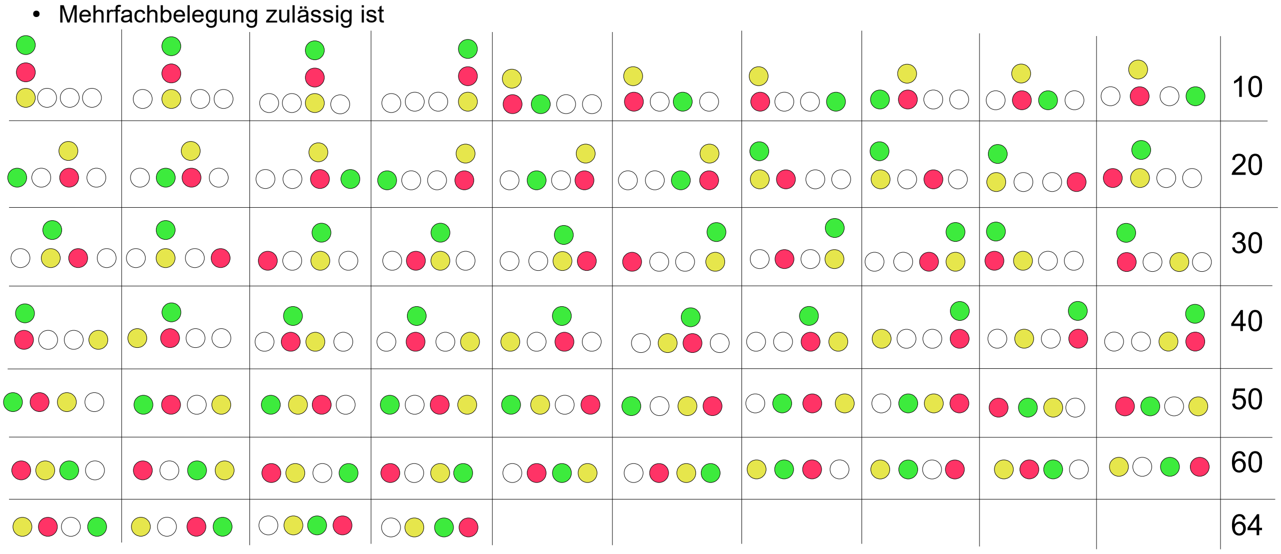
- 2 unterscheidbare Kugeln sind auf
- 4 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung zulässig





Duales Urnenmodell:

- 3 Unterscheidbare Kugeln sind auf
- 4 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung zulässig ist



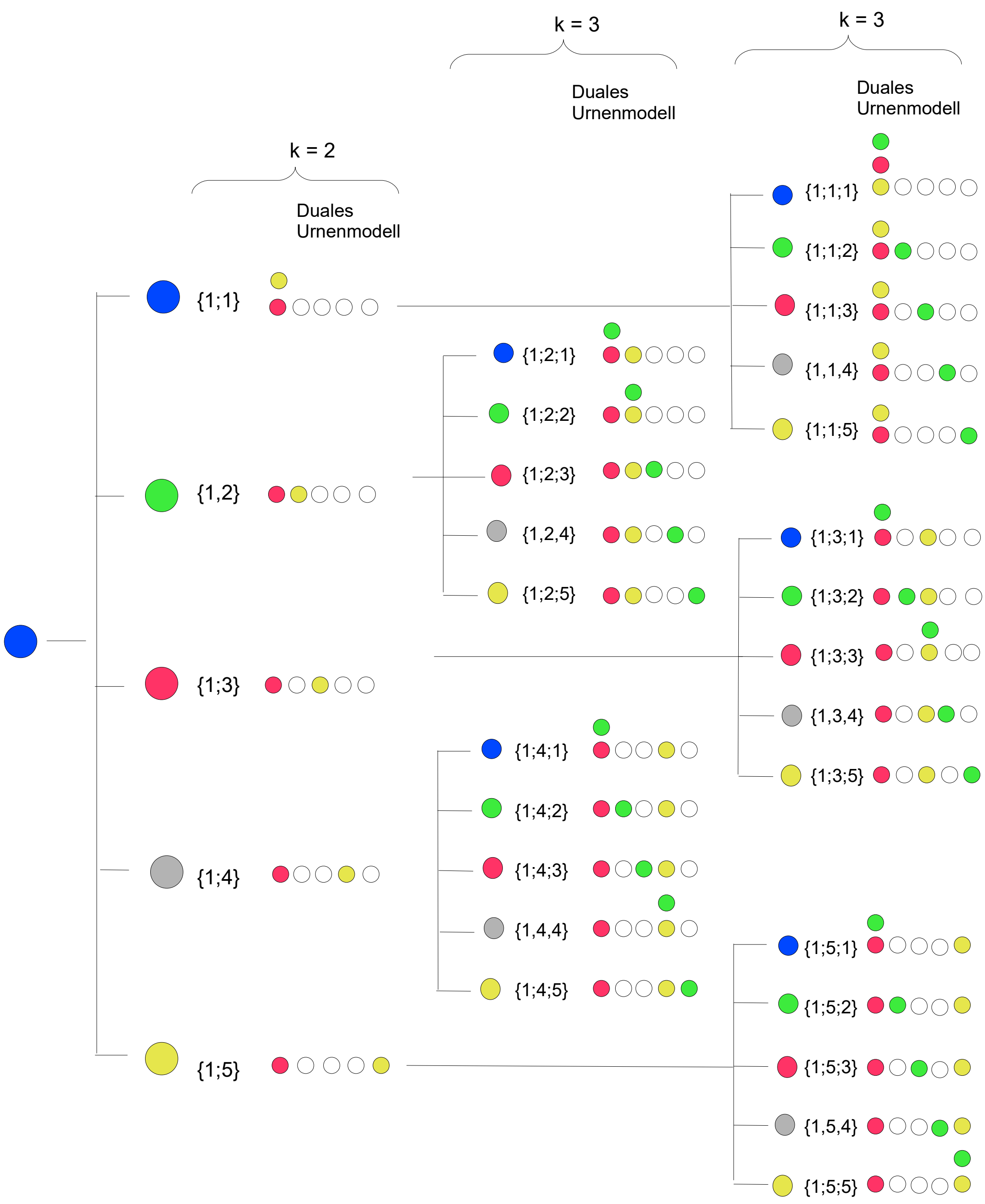
Ohne Wiederholung enthält nur die letzten drei Reihen mit den 24 Möglichkeiten.

2.2.1. Variation mit Wiederholung – Baumdiagramm für n = 5

Bei der 1. Ziehung wurde die 1. Kugel (blau) oder die Zahl „1“ gezogen.

In dualen Urnenmodell gibt die 1. Zahl die Urne an, in die die rote Kugel gelegt wird,
die 2. Zahl die Urne an, in die die gelbe Kugel gelegt wird
die 3. Zahl die Urne an, in die die grüne Kugel gelegt wird.

Die Farben im dualen Urnenmodell haben nichts mit den Farben des normalen Urnenmodells zu tun, sondern dienen lediglich der Unterscheidung.

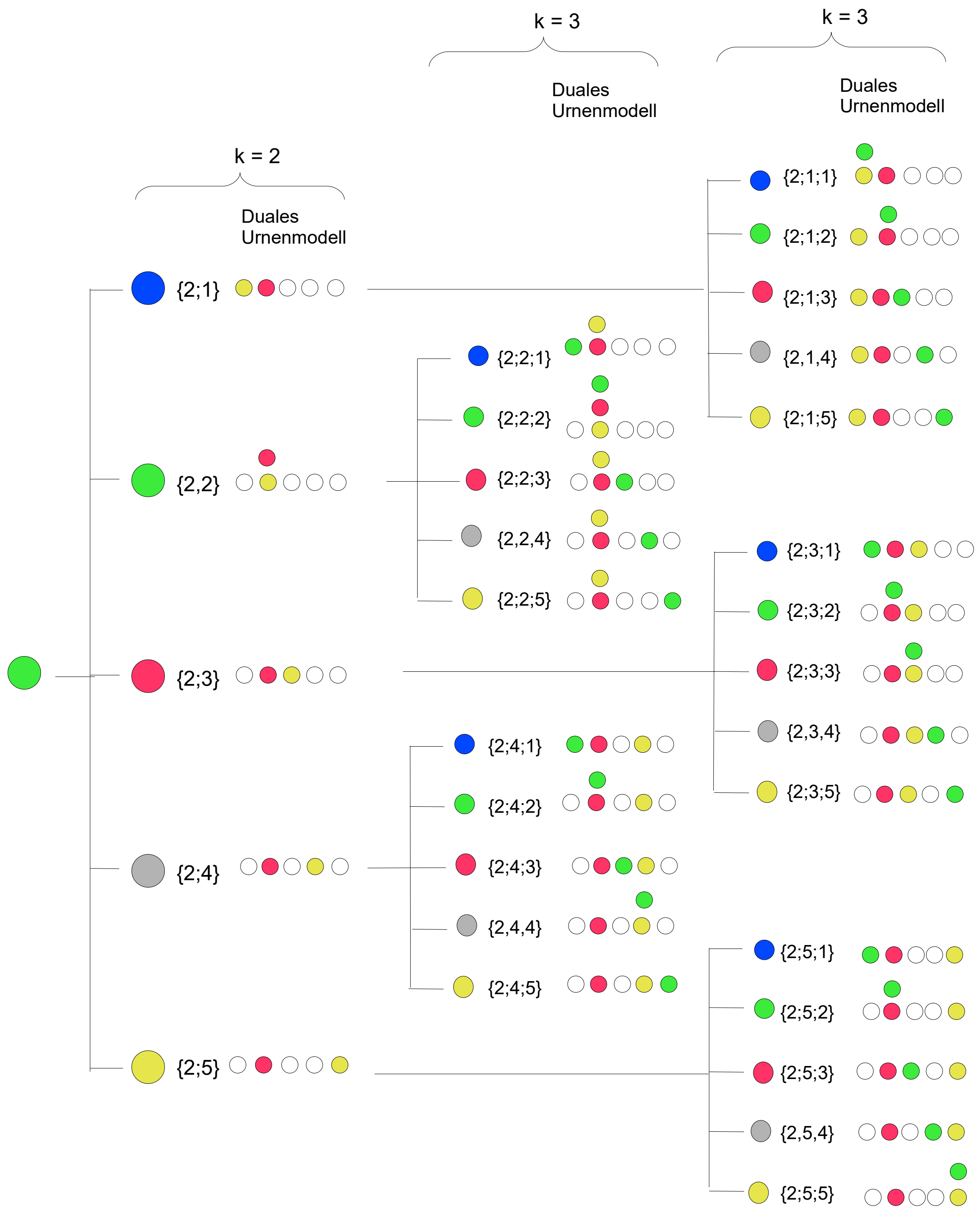


2.2.1. Variation mit Wiederholung – Baumdiagramm für n = 5

Bei der 1. Ziehung wurde die 2. Kugel (grü) oder die Zahl „2“ gezogen.

In dualen Urnenmodell gibt die 1. Zahl die Urne an, in die die rote Kugel gelegt wird,
die 2. Zahl die Urne an, in die die gelbe Kugel gelegt wird
die 3. Zahl die Urne an, in die die grüne Kugel gelegt wird.

Die Farben im dualen Urnenmodell haben nichts mit den Farben des normalen Urnenmodells zu tun, sondern dienen lediglich der Unterscheidung.

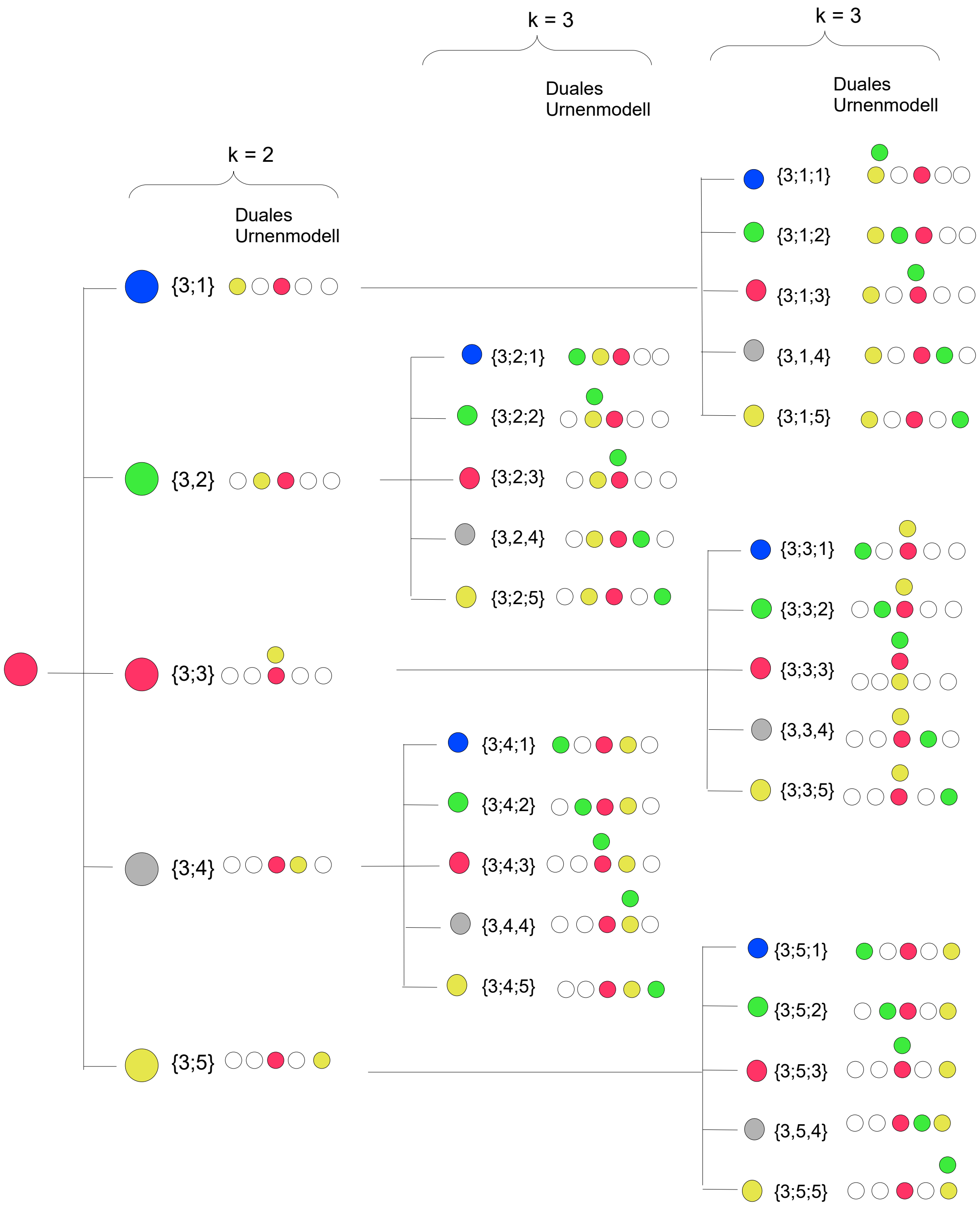


2.2.1. Variation mit Wiederholung – Baumdiagramm für n = 5

Bei der 1. Ziehung wurde die 2. Kugel (grü) oder die Zahl „2“ gezogen.

In dualen Urnenmodell gibt die 1. Zahl die Urne an, in die die rote Kugel gelegt wird,
die 2. Zahl die Urne an, in die die gelbe Kugel gelegt wird
die 3. Zahl die Urne an, in die die grüne Kugel gelegt wird.

Die Farben im dualen Urnenmodell haben nichts mit den Farben des normalen Urnenmodells zu tun, sondern dienen lediglich der Unterscheidung.

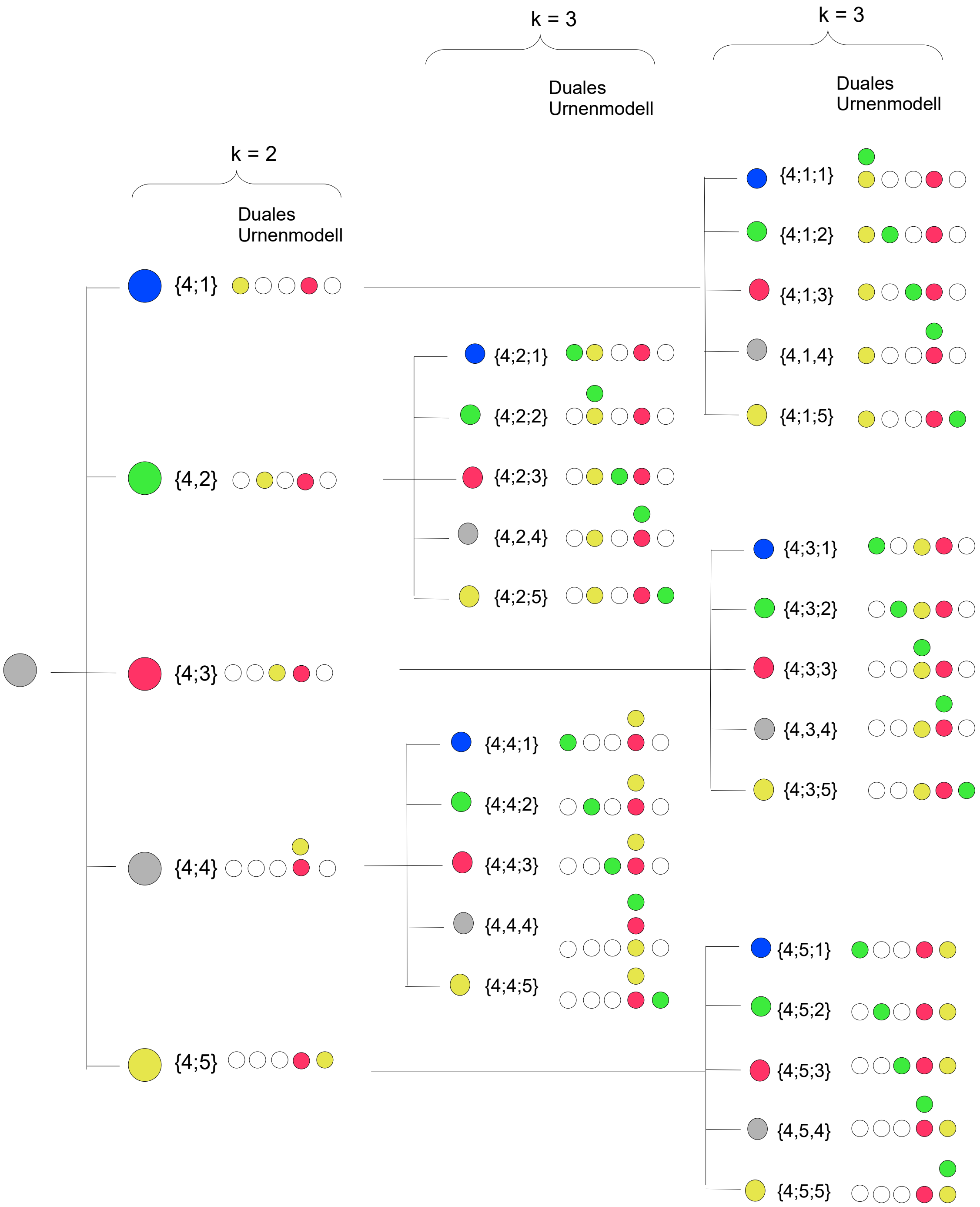


2.2.1. Variation mit Wiederholung – Baumdiagramm für n = 5

Bei der 1. Ziehung wurde die 2. Kugel (grü) oder die Zahl „2“ gezogen.

In dualen Urnenmodell gibt die 1. Zahl die Urne an, in die die rote Kugel gelegt wird,
die 2. Zahl die Urne an, in die die gelbe Kugel gelegt wird
die 3. Zahl die Urne an, in die die grüne Kugel gelegt wird.

Die Farben im dualen Urnenmodell haben nichts mit den Farben des normalen Urnenmodells zu tun, sondern dienen lediglich der Unterscheidung.

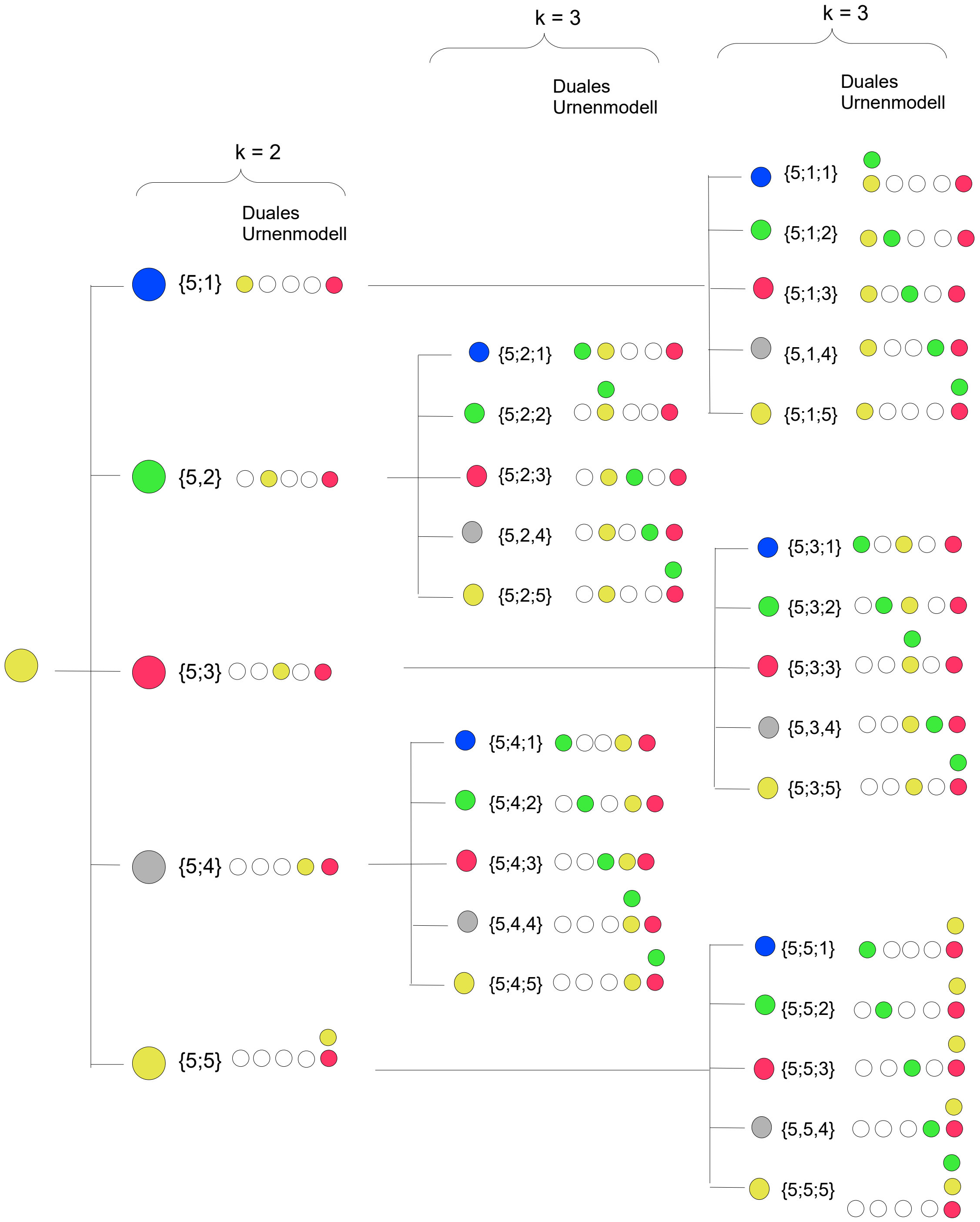


2.2.1. Variation mit Wiederholung – Baumdiagramm für n = 5

Bei der 1. Ziehung wurde die 2. Kugel (grü) oder die Zahl „2“ gezogen.

In dualen Urnenmodell gibt die 1. Zahl die Urne an, in die die rote Kugel gelegt wird,
die 2. Zahl die Urne an, in die die gelbe Kugel gelegt wird
die 3. Zahl die Urne an, in die die grüne Kugel gelegt wird.

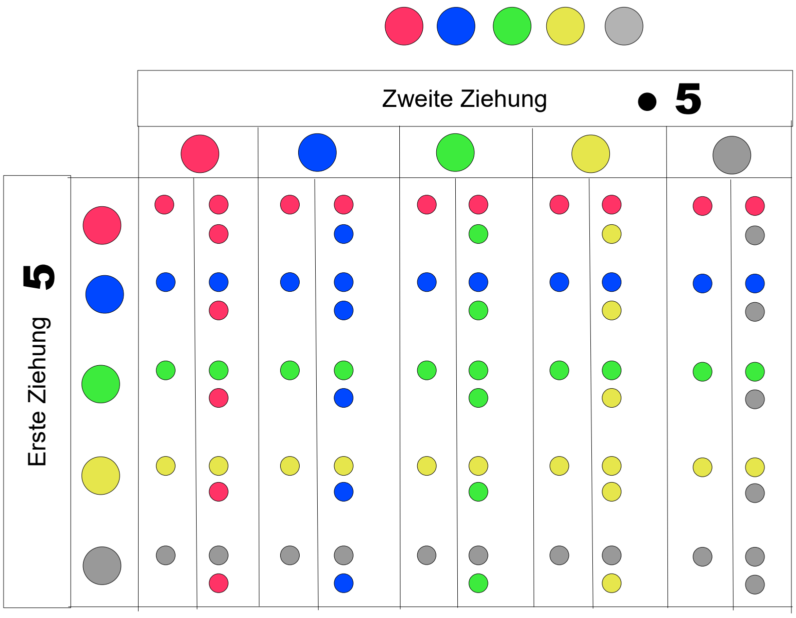
Die Farben im dualen Urnenmodell haben nichts mit den Farben des normalen Urnenmodells zu tun, sondern dienen lediglich der Unterscheidung.

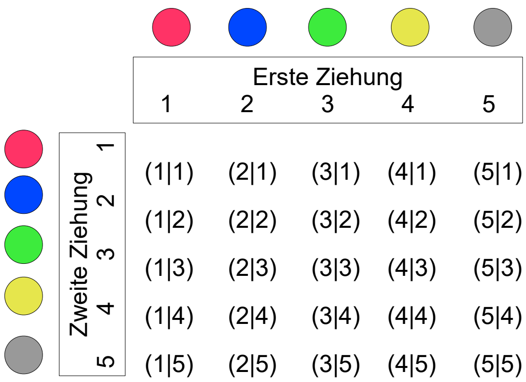


2.2.1. Variation mit Wiederholung – Urnenmodell für n = 5

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 2

Variation mit Wiederholung 25

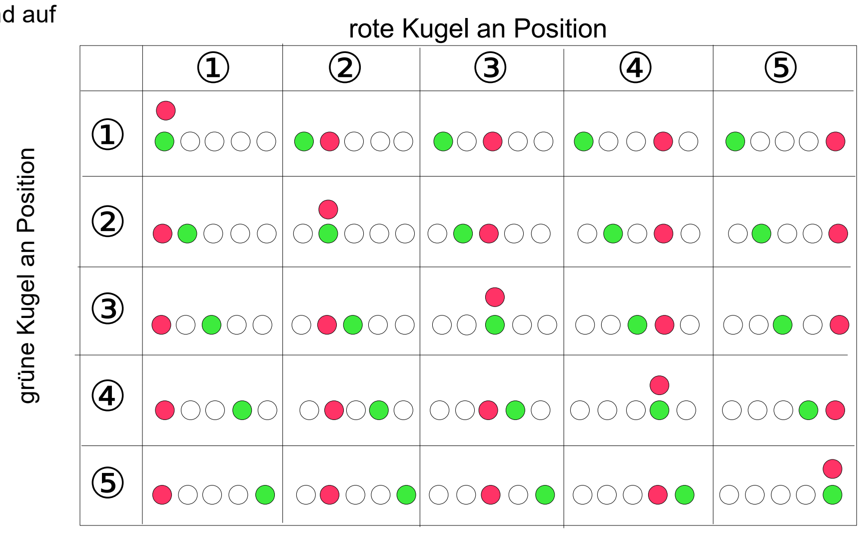




	Erste Ziehung 1	2	3	4	5
Zweite Ziehung 1	(1|1)	(2|1)	(3|1)	(4|1)	(5|1)
2	(1|2)	(2|2)	(3|2)	(4|2)	(5|2)
3	(1|3)	(2|3)	(3|3)	(4|3)	(5|3)
4	(1|4)	(2|4)	(3|4)	(4|4)	(5|4)
5	(1|5)	(2|5)	(3|5)	(4|5)	(5|5)

Duales Urnenmodell:

- 2 unterscheidbare Kugeln sind auf
- 5 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung zulässig

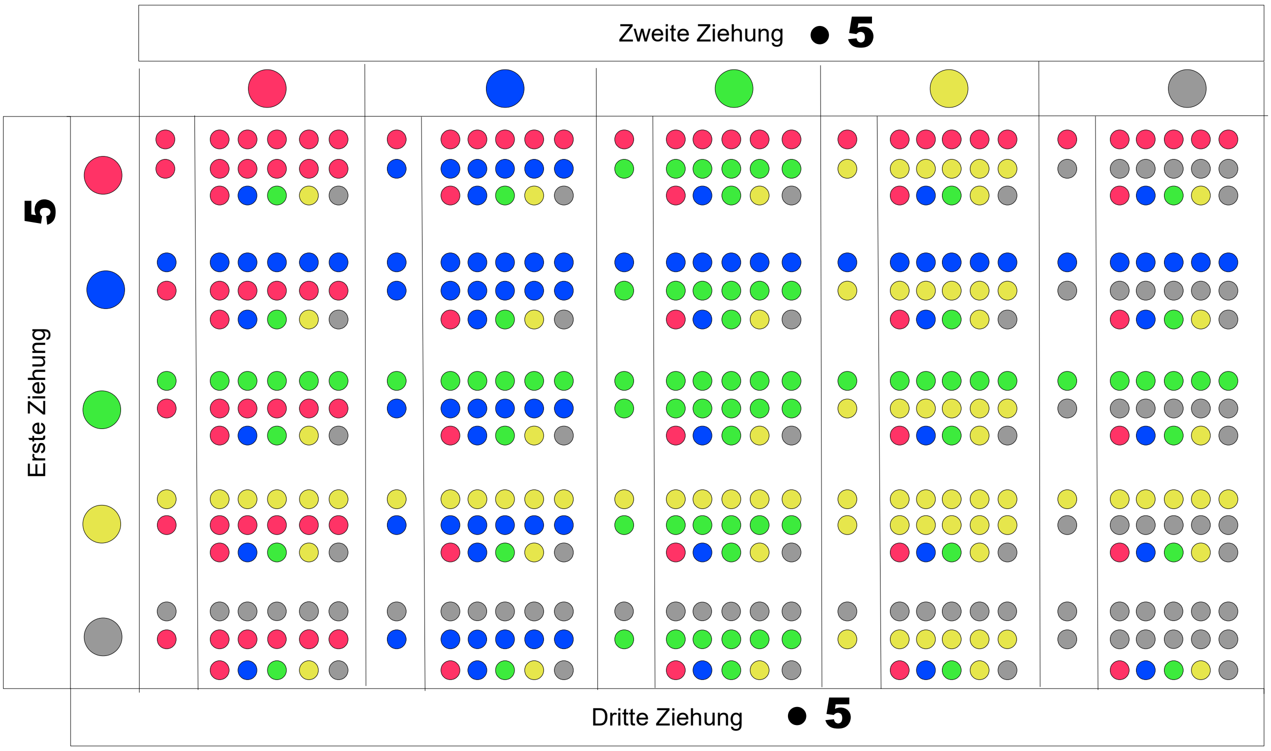


2.2.1. Variation mit Wiederholung – Urnenmodell für n = 5

volle Besetzung der Matrix

Variation mit Wiederholung 125

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 3



Erste Ziehung	Zweite Ziehung	Dritte Ziehung 1	2	3	4	5
1	1	(1|1|1)	(1|1|2)	(1|1|3)	(1|1|4)	(1|1|5)
1	2	(1|2|1)	(1|2|2)	(1|2|3)	(1|2|4)	(1|2|5)
1	3	(1|3|1)	(1|3|2)	(1|3|3)	(1|3|4)	(1|3|5)
1	4	(1|4|1)	(1|4|2)	(1|4|3)	(1|4|4)	(1|4|5)
1	5	(1|5|1)	(1|5|2)	(1|5|3)	(1|5|4)	(1|5|5)
2	1	(2|1|1)	(2|1|2)	(2|1|3)	(2|1|4)	(2|1|5)
2	2	(2|2|1)	(2|2|2)	(2|2|3)	(2|2|4)	(2|2|5)
2	3	(2|3|1)	(2|3|2)	(2|3|3)	(2|3|4)	(2|3|5)
2	4	(2|4|1)	(2|4|2)	(2|4|3)	(2|4|4)	(2|4|5)
2	5	(2|5|1)	(2|5|2)	(2|5|3)	(2|5|4)	(2|5|5)
3	1	(3|1|1)	(3|1|2)	(3|1|3)	(3|1|4)	(3|1|5)
3	2	(3|2|1)	(3|2|2)	(3|2|3)	(3|2|4)	(3|2|5)
3	3	(3|3|1)	(3|3|2)	(3|3|3)	(3|3|4)	(3|3|5)
3	4	(3|4|1)	(3|4|2)	(3|4|3)	(3|4|4)	(3|4|5)
3	5	(3|5|1)	(3|5|2)	(3|5|3)	(3|5|4)	(3|5|5)
4	1	(4|1|1)	(4|1|2)	(4|1|3)	(4|1|4)	(4|1|5)
4	2	(4|2|1)	(4|2|2)	(4|2|3)	(4|2|4)	(4|2|5)
4	3	(4|3|1)	(4|3|2)	(4|3|3)	(4|3|4)	(4|3|5)
4	4	(4|4|1)	(4|4|2)	(4|4|3)	(4|4|4)	(4|4|5)
4	5	(4|5|1)	(4|5|2)	(4|5|3)	(4|5|4)	(4|5|5)
5	1	(5|1|1)	(5|1|2)	(5|1|3)	(5|1|4)	(5|1|5)
5	2	(5|2|1)	(5|2|2)	(5|2|3)	(5|2|4)	(5|2|5)
5	3	(5|3|1)	(5|3|2)	(5|3|3)	(5|3|4)	(5|3|5)
5	4	(5|4|1)	(5|4|2)	(5|4|3)	(5|4|4)	(5|4|5)
5	5	(5|5|1)	(5|5|2)	(5|5|3)	(5|5|4)	(5|5|5)

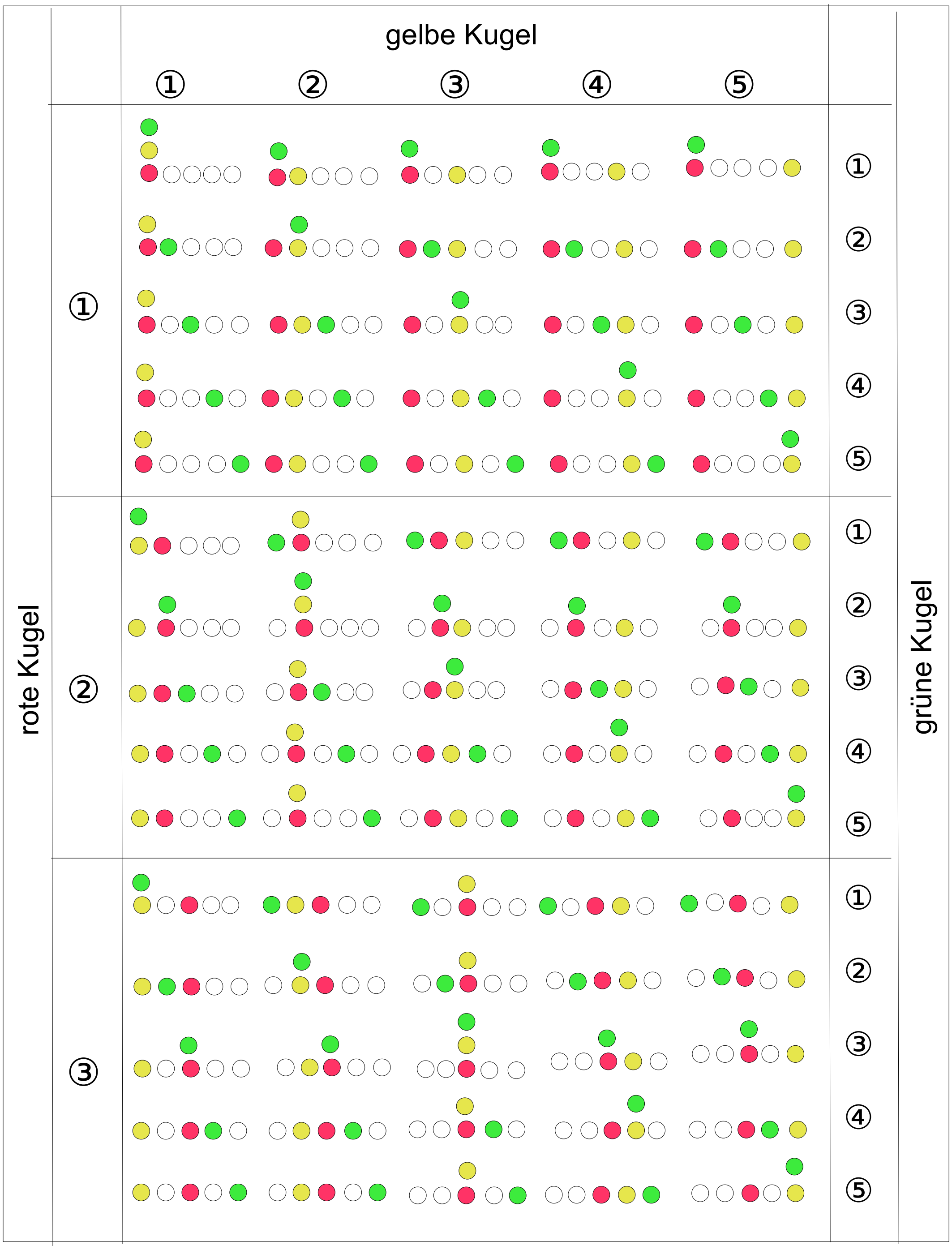
Jede Tabelle entspricht einer Zeile der ersten Ziehung in der obigen Darstellung: 1 = rot ; 2 = blau ; .....
Jeder Spalte entspricht der zweiten Ziehung in der gleichen Farbreihenfolge.
Die dritten Spalten in jeder Anordnung entsprechen den dritten Zeilen in der Farbdarstellung

2.2.1. Variation mit Wiederholung – Duales Urnenmodell für n = 5

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 3

Duales Urnenmodell:

- 3 Unterscheidbare Kugeln sind auf
- 5 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung zulässig ist



2.2.1. Variation mit Wiederholung – Duales Urnenmodell für n = 5

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 3

2.2.1. mit Wiederholung mit Reihenfolge k Elemente

Beispiel 1

Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es bei einem 4-fachen Würfelwurf?

Lösung

	die Kugeln entsprechen den 6 Augenzahlen	n=6	
1	Es sind 4 Würfe	k=4	V/K
2	es ist entscheidend in welcher Reihenfolge die Augenzahlen kommen	mit Reihenfolge	V
3	die Augenzahlen können sich wiederholen	mit Zurücklegen	V_{mW}

Variation mit Wiederholung – k-Tupel aus einer n-Menge

Damit kennt man die Anzahl der Möglichkeiten, nämlich $n^k = 6^4 = 1296$

Beispiel 2

Eine Prüfung bestehe aus 10 Multiple-Choice-Aufgaben mit jeweils 5 Alternativen. Wieviele unter-schiedliche Möglichkeiten gibt es, die Alternativen aller Aufgaben anzukreuzen ?

Klarstellung: Stellen Sie sich vor, die Spalten in einem Statistikprogramm repräsentierten die Aufgaben. In den Zeilen stehen die Alternativen als Daten. Wieviele mögliche unterschiedliche Zeilen gibt es?

Lösung

	Anzahl der Auswahlen ist n (gleichgültig, wieviele Fragen ich habe, sind immer 5 Möglichkeiten vorhanden)	n = 5	
1	Wie oft habe ich die Chance diese 5 Möglichkeiten anzukreuzen	k = 10	V/K
2	das Ankreuzen 1. Frage 1, 2. Frage 2 ist was anderes, als 1. Frage 2 und 2. Frage 1	mit Reihenfolge	V
3	Ich kann die Position 1 mehrfach ankreuzen (da k größer als n, geht das nur „mit Wiederholung“)	mit Wiederholung	V_{mW}

Variation mit Wiederholung – k-Tupel aus einer n-Menge

Damit kennt man die Anzahl der Möglichkeiten, nämlich $n^k = 5^{10} = 9765625$

Beispiel 3

Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen kann man aus den Ziffern

5, 6, 7, 8, 9 0, 2, 4, 6, 8

bilden, wenn Ziffern auch mehrfach vorkommen dürfen

Lösung

5, 6, 7, 8, 9

1. Ziffer		2. Ziffer		3. Ziffer
5	·	5	·	5

$n^k = 5^3 = 125$

Lösung: 125

0, 2, 4, 6, 8

1. Ziffer		2. Ziffer		3. Ziffer
4	·	5	·	5

$4 \cdot n^k = 4 \cdot 5^2 = 100$

Lösung: 100

Auch in diesem Fall bildet die erste Ziffer eine Besonderheit, da nicht alle der 5 Ziffern verwendet werden dürfen. Erst ab der zweiten Ziffer sind – für alle weiteren Positionen – alle 5 Ziffern erlaubt. Deshalb erscheint in der Formel k=2, da nur noch zwei Positionen zu belegen sind. Die erste Position ist wieder gesondert zu behandeln.

2.2.1. mit Wiederholung mit Reihenfolge k Elemente

Beispiel 4

Wieviele 4 stellige Zahlen gibt es, die

a) mit 7 beginnen

b) mit 4 enden

c) mit 7 beginnen und mit 4 enden

e) die nicht die Ziffer 3 enthalten

f) die durch 5 teilbar sind

Lösung

a) mit 7 beginnen

An der ersten Position ist nur eine Ziffer zugelassen, an den anderen drei alle Ziffern:

$1 * n^k = 1\ 10^3 = 1\ 000$

n sind alle 10 Ziffern, k sind noch 3 zu belegende Positionen

b) mit 4 enden

An der ersten Position sind 9 Ziffern zugelassen (keine 0) an den zwei folgenden Positionen sind alle 10 Ziffern zugelassen und an der vierten Position nur eine:

$9 \bullet n^k \bullet 1 = 9 \bullet 10^2 \bullet 1 = 900$

n sind alle 10 Ziffern, k sind noch 2 zu belegende Positionen

c) mit 7 beginnen und mit 4 enden

An der ersten und vierten Position ist nur jeweils eine Ziffer zugelassen, an den Positionen 2 und 3 gibt es keine Einschränkungen, deshalb sind dort alle Ziffern zugelassen.

$1 \bullet n^k \bullet 1 = 1 \bullet 10^2 \bullet 1 = 100$

e) die nicht die Ziffer 3 enthalten

An der ersten Position sind damit nur 8 Ziffern zugelassen (keine 0 und keine 3) und an den weiteren Positionen nur 9 Ziffern.

$8 \bullet n^k = 8 \bullet 9^3 = 5832$

f) die durch 5 teilbar sind

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn sie auf 0 oder 5 endet. Damit gibt es eine Einschränkung für die 4 Ziffer, für die nur 2 Möglichkeiten existieren.

$9 \bullet n^k \bullet 2 = 9 \bullet 10^2 \bullet 2 = 1800$

Beispiel 5

Ein Würfel wird dreimal geworfen. Wieviele Anordnungen der Zahlen von 1 bis 6 sind möglich.

Lösung

1. Wurf		2. Wurf		3. Wurf
6	·	6	·	6

$n^k = 6^3 = 216$

Lösung: 216

2.2.1. mit Wiederholung mit Reihenfolge k Elemente

Beispiel 6

Wieviele verschiedene Zulassungsschilder für Kraftfahrzeuge sind möglich, wenn die Schilder immer mit 2 Buchstaben beginnen
a) drei Ziffern ohne Vornullen
b) vier Ziffern ohne Vornullen
enthalten.

Lösung

a)

1. Buch	2. Buch	1. Ziffer	2. Ziffer	3. Ziffer
26 ·	26 ·	9 ·	10 ·	10

$= 26^2 \cdot 9 \cdot 10^2 = 608\,400$

b)

1. Buch	2. Buch	1. Ziffer	2. Ziffer	3. Ziffer	4. Ziffer
26 ·	26 ·	9 ·	10 ·	10 ·	10

$= 26^2 \cdot 9 \cdot 10^3 = 6\,084\,000$

Beispiel 7

In einer Schule gibt es drei Klassen mit je 20 Schülern. Aus jeder Klasse nimmt der Klassensprecher und sein Vertreter an der Klassensprecherversammlung teil.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Zusammensetzung gibt es, einschließlich der Möglichkeiten Klassensprecher oder Stellvertreter in einer Klasse zu sein.

Lösung

In einer Klasse mit 20 Schülern gibt es für den Klassensprecher 20 Möglichkeiten und für seinen Stellvertreter noch 19, da ja ein Schüler bereits als Sprecher gewählt ist. Hier handelt es sich um **eine Auswahl ohne Wiederholung**.

Die soeben berechnete Anzahl ist aber für jede Klasse gegeben. Da in jeder Klasse 20 Schüler zur Auswahl stehen, unabhängig, wen die andere Klasse gewählt hat. Damit steht die Möglichkeit einer Klasse genau dreimal zu Verfügung. Dabei handelt es sich um
eine Auswahl mit Wiederholung.

Teil 1:
je Klasse

$$20 \bullet 19 = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = 20 \bullet 19 = 380$$

Teil 2:

$$\begin{matrix}\text{Teil 1}\\ \text{Klasse 1}\end{matrix} \bullet \begin{matrix}\text{Teil 1}\\ \text{Klasse 2}\end{matrix} \bullet \begin{matrix}\text{Teil 1}\\ \text{Klasse 3}\end{matrix} = (\text{Teil 1})^3 = (20 \bullet 19)^3 = 380^3 = 54\,872\,000$$

2.2.2. Kombination mit Wiederholung

Auswahl von Elementen aus k gleichen Mengen mit jeweils n Elementen, wobei aus jeder Menge ein Element entnommen wird.

1.2.3. Wieviele Möglichkeiten gibt es **k Elemente** **ohne Beachtung der Reihenfolge** anzuordnen ?

Die Herleitung dieser Formel ist etwas komplizierter. Diese Formel wird für schulische Zwecke auch nicht benötigt. Deshalb soll hier aus diese Formel nicht weiter eingegangen werden. Im Dokument zur Kombinatorik werden zu dieser Formel Ausführungen gemacht.

$$\binom{n-k+1}{k} = \frac{(n-k+1)!}{k!\,(n-1)!}$$

***k*-Kombination** $(x_1, x_2, \ldots x_k)$ einer endlichen Menge M

- ist eine ungeordnete Auswahl von k Elementen aus M
- ist die Anzahl der k-Kombinationen einer n – elementigen Menge

- Alle k-Kombinationen, die aus einer
- n-elementigen Menge erzeugt werden können

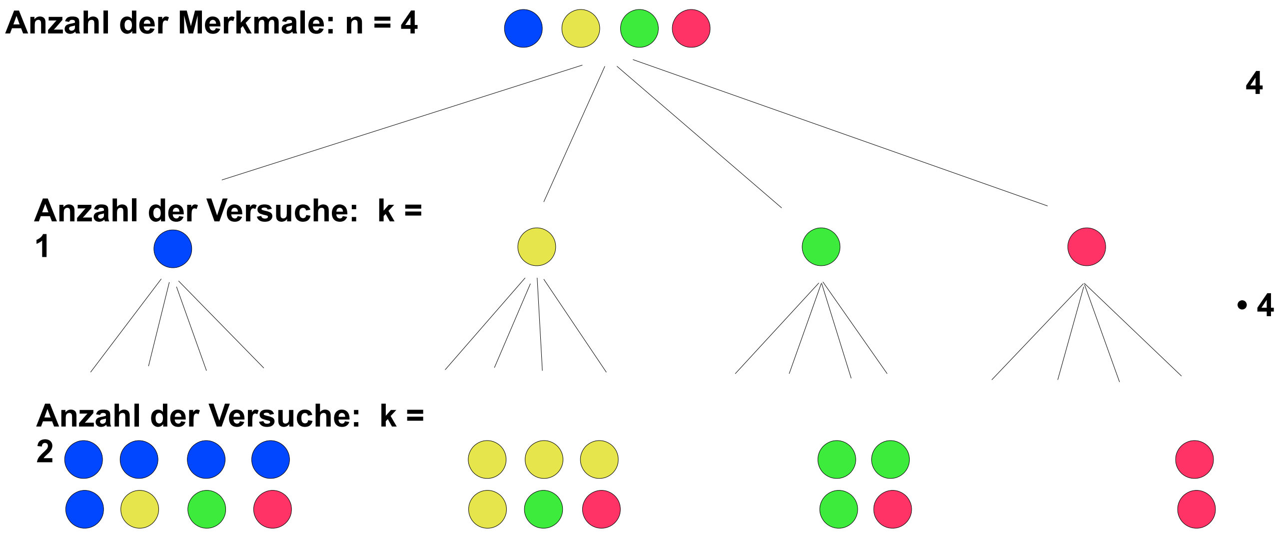
Für die **Auswahl**
- von k Elementen
- aus einer Menge mit n Elementen
- **mit Wiederholung** (das heißt, dass jede Ziehung aus der Urne wie die erste Ziehung ist)
- **ohne Berücksichtigung der Reihenfolge**

Voraussetzungen:
- Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander.
- Es werden einige (k) Elemente ausgewählt.
- Beim Ziehen mit Zurücklegen kann k > n sein, da jeder Versuch die gleichen Bedingungen hat, wie der erste Versuch.
- Ein Element kann mehrmals ausgewählt werden.

Interpretationen
- Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Kugeln mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge (ungeordnete Stichprobe) zu ziehen, wobei k > n sein kann.
- Anzahl der Möglichkeiten, k gleiche (nicht unterscheidbare) Kugeln auf n unterscheidbare Urnen zu verteilen, wobei jede Urne mehrere Kugeln erhalten kann und k > n möglich ist.

2.2.2. Kombination mit Wiederholung – Baumdiagramm und duales Urnenmodell

Im Baumdiagramm ist in jeder Ebene der 1. Teilbaum vollständig besetzt, für jeden weiteren Teilbaum fehlt ein zusätzlicher Pfad. Das Baumdiagramm ist erweiterbar.

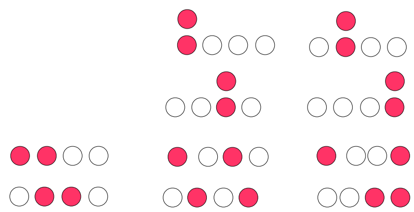


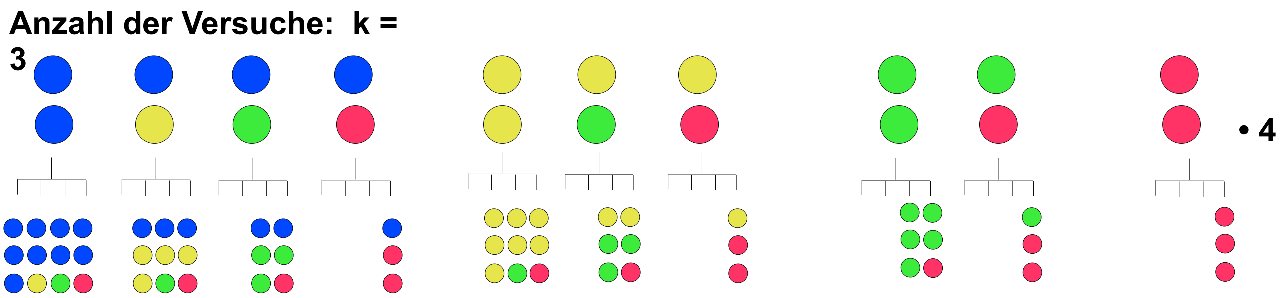
von 16 Zweigen
nur 10 besetzt

$$4 \cdot 4 \cdot \frac{10}{16} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 5}{8} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5!}{2! \cdot 3!}$$

Duales Urnenmodell:

- 2 nicht unterscheidbare Kugeln sind auf
- 4 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung zulässig ist



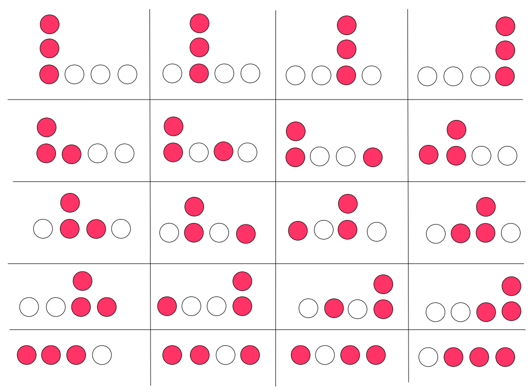


64 Zweige
von Vorebenen nur 10 besetzt
von diesen 40 Zweigen nur 20 besetzt

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{20}{64} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5}{16} = 5 \cdot 4 \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5!}{1! \cdot 3!} = 20$$

Duales Urnenmodell:

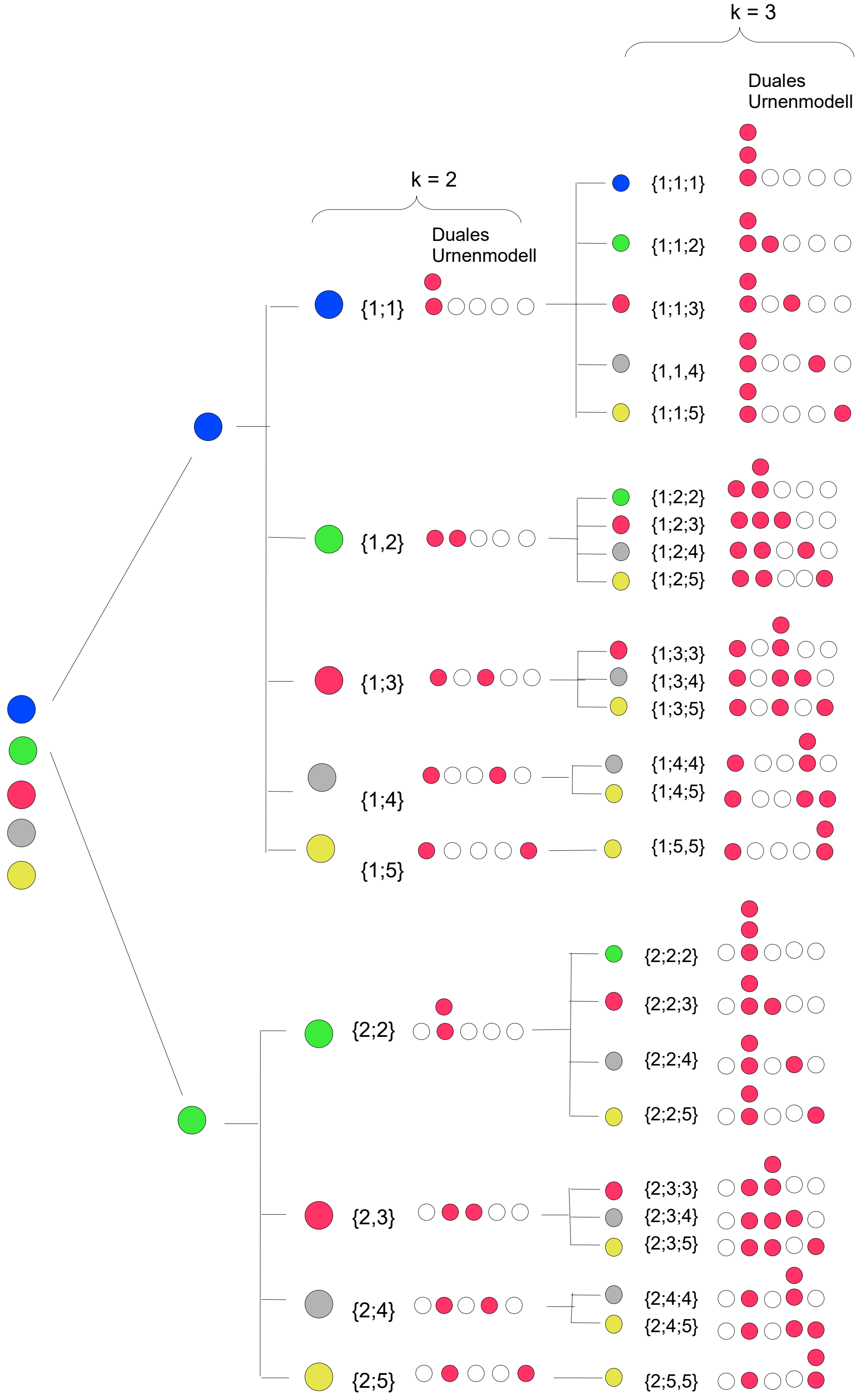
- 3 nicht unterscheidbare Kugeln sind auf
- 4 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung zulässig



Ohne Wiederholung würden nur die letzten vier Möglichkeiten existieren.

2.2.2. Kombination mit Wiederholung – Baumdiagramm für n = 5

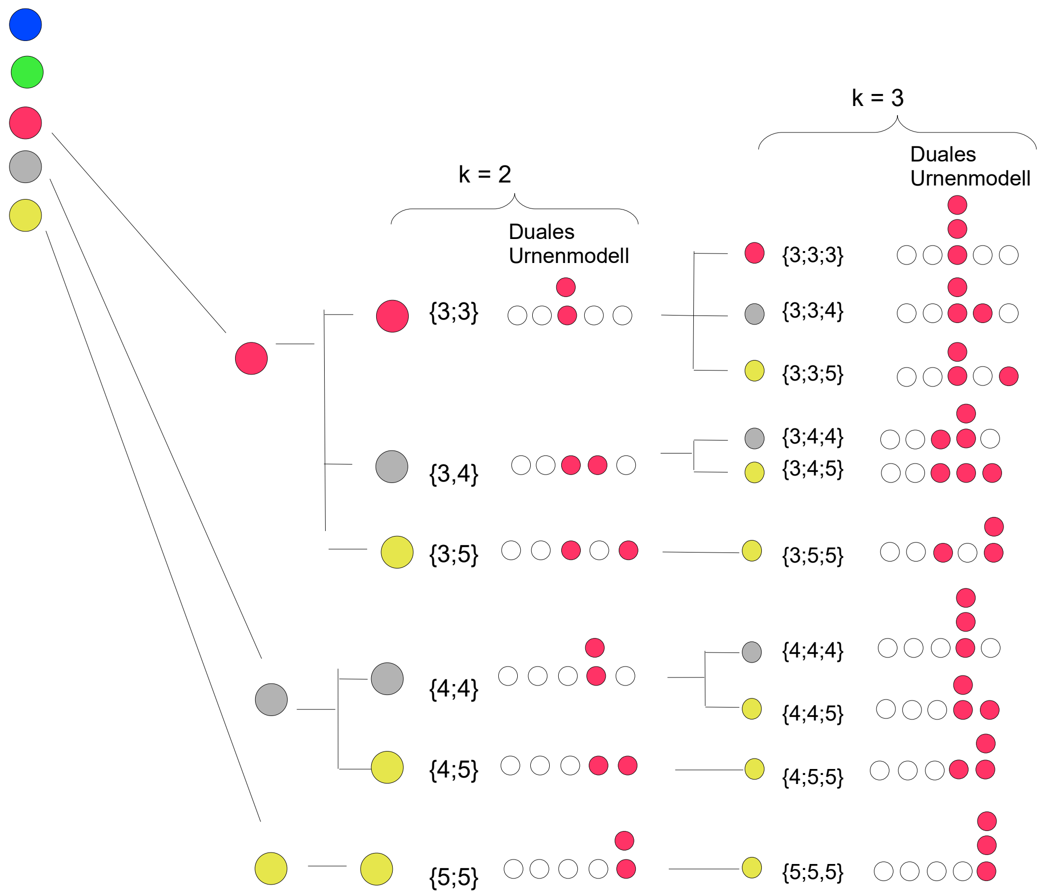
Beim Abzählen mit Wiederholung treten in jeder Stufe die gleiche Anzahl Zweige in jedem Unterbaum auf. Bei 5 Kugeln existieren bei der ersten Auswahl 5 Zweige, in der zweiten und in der Dritten. Dadurch, dass hier ohne Betrachtung der Reihenfolge zu arbeiten ist, fallen einige Ereignisse weg, die nur durch Vertauschung anderer Ereignisse entstanden sind. Wenn man den Anteil der verbleibenden Zweige als Bruch schreibt und mit dem Produkt für eine volle Baumbelegung multipliziert, erhält man ebenfalls die entsprechenden Abzählformel.



Fortsetzung nächste Seite

2.2.2. Kombination mit Wiederholung – Baumdiagramm für n = 5

Fortsetzung



$$5 \bullet 5 \bullet \frac{15}{25} = 5 \bullet 5 \bullet \frac{3}{5}$$

$$= \frac{5 \bullet 3 \bullet\ 4 \bullet 2 \bullet 1\ \bullet 6}{4 \bullet 2 \bullet 1\ \bullet 6}$$

$$= \frac{5 \bullet 4 \bullet\ 3 \bullet 2 \bullet 1\ \bullet 6}{4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1\ \bullet 2}$$

$$= \frac{6!}{4! \bullet 2!} = 15$$

$$5 \bullet 5 \bullet 5\ \frac{35}{125} = 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet \frac{7}{25}$$

$$= \frac{5 \bullet 7\ \ 6 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1}{6 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1}$$

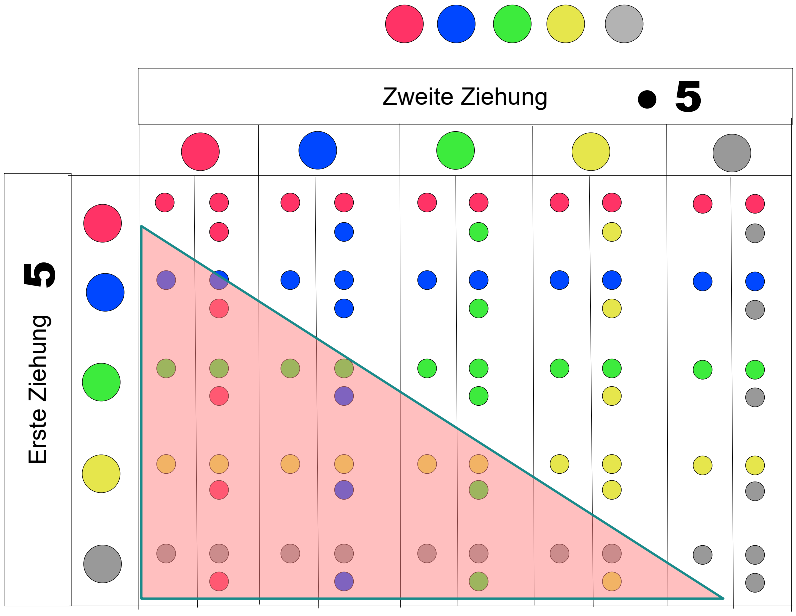
$$= \frac{7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet\ 3 \bullet 2 \bullet 1}{4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1\ \bullet 2 \bullet 3}$$

$$= \frac{7!}{4! \bullet 3!} = 35$$

2.2.2. Kombination mit Wiederholung – Urnenmodel für n = 5

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 2

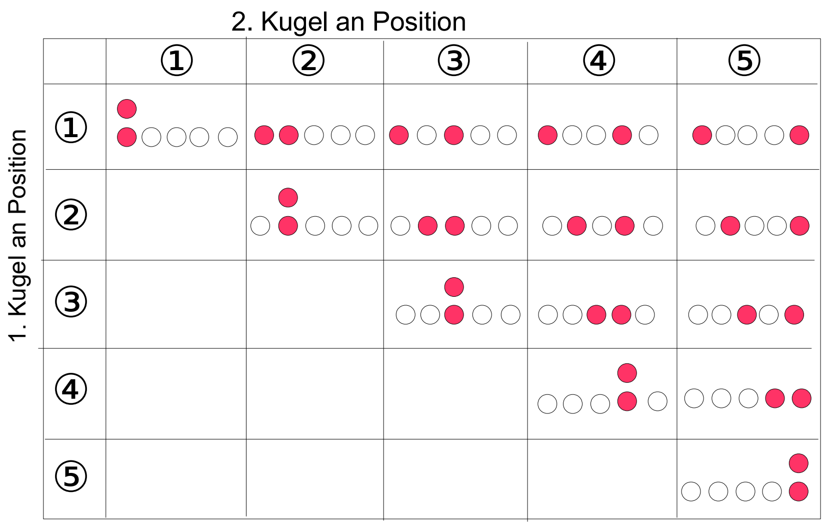
Kombination mit Wiederholung 15



Zweite Ziehung \ Erste Ziehung	1	2	3	4	5
1	(1|1)	(2|1)	(3|1)	(4|1)	(5|1)
2	(1|2)	(2|2)	(3|2)	(4|2)	(5|2)
3	(1|3)	(2|3)	(3|3)	(4|3)	(5|3)
4	(1|4)	(2|4)	(3|4)	(4|4)	(5|4)
5	(1|5)	(2|5)	(3|5)	(4|5)	(5|5)

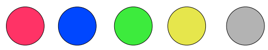
Duales Urnenmodell:

- 2 nicht unterscheidbare Kugeln auf
- 5 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung zulässig ist

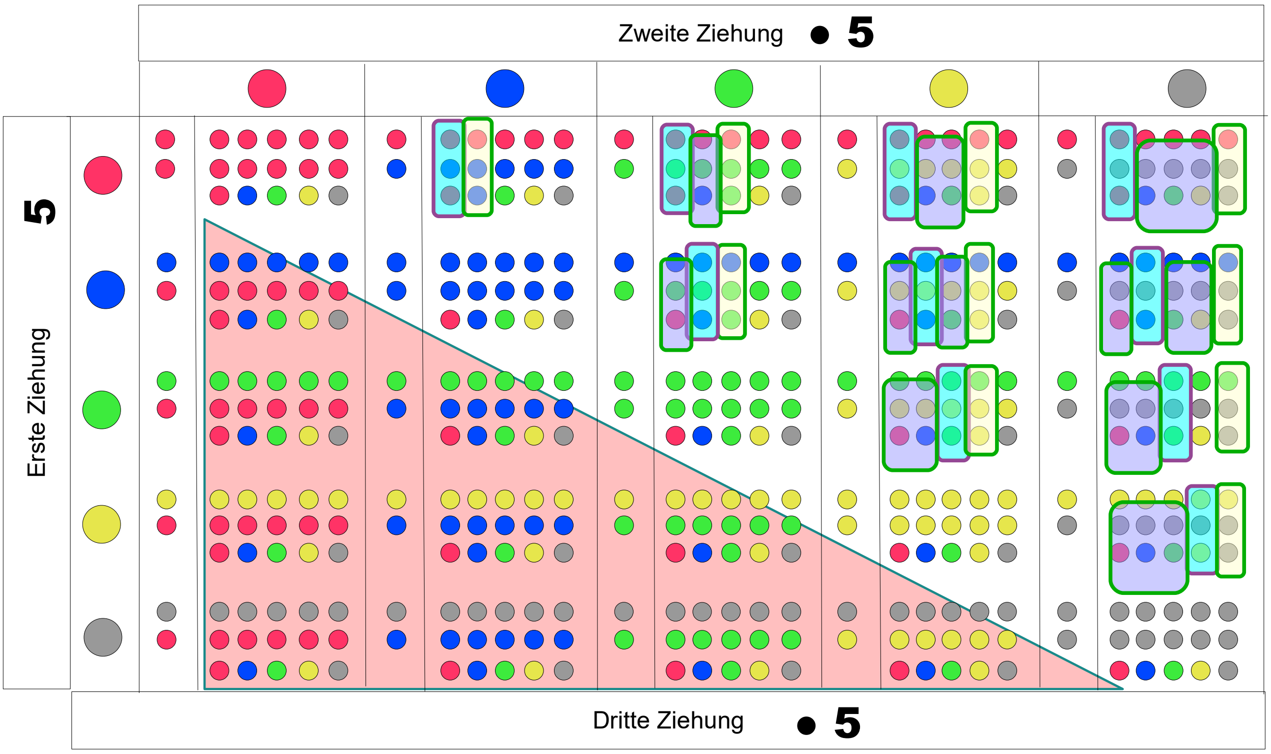


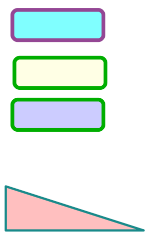
2.2.2. Kombination mit Wiederholung – Urnenmodel für n = 5

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 3



Kombination mit Wiederholung 35





~~Entfällt in der 2. Ziehung wegen der 1. Ziehung (Hauptdiagonale)~~

Entfällt in der 3. Ziehung wegen der 1. Ziehung (1 und 3 gleiche Farbe)

Entfällt in der 3. Ziehung wegen der 2. Ziehung 82 und 3 gleiche Farbe)

Entfällt, weil Nachfolgenummern kleiner sind wie Vorgängernummern (etwas nach unten verschoben)

Es fehlen alle Elemente **unterhalb der Hauptdiagonale**, da sie nur Vertauschungen der Elemente oberhalb der Hauptdiagonale sind (Keine Reihenfolge)

Zu den 10 Elementen von „Kombination ohne Wiederholung“ kommen hier die 25 Elemente der Hauptdiagonale dazu.

2.2.2. Kombination mit Wiederholung – Urnenmodel für n = 5

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 3

Kombination mit Wiederholung 35

Erste Ziehung	Zweite Ziehung	Dritte Ziehung 1	2	3	4	5
Erste Ziehung = 1	1	(1|1|1)	(1|1|2)	(1|1|3)	(1|1|4)	(1|1|5)
	2	(1|2|1)	(1|2|2)	(1|2|3)	(1|2|4)	(1|2|5)
	3	(1|3|1)	(1|3|2)	(1|3|3)	(1|3|4)	(1|3|5)
	4	(1|4|1)	(1|4|2)	(1|4|3)	(1|4|4)	(1|4|5)
	5	(1|5|1)	(1|5|2)	(1|5|3)	(1|5|4)	(1|5|5)
Erste Ziehung = 2	1	(2|1|1)	(2|1|2)	(2|1|3)	(2|1|4)	(2|1|5)
	2	(2|2|1)	(2|2|2)	(2|2|3)	(2|2|4)	(2|2|5)
	3	(2|3|1)	(2|3|2)	(2|3|3)	(2|3|4)	(2|3|5)
	4	(2|4|1)	(2|4|2)	(2|4|3)	(2|4|4)	(2|4|5)
	5	(2|5|1)	(2|5|2)	(2|5|3)	(2|5|4)	(2|5|5)
Erste Ziehung = 3	1	(3|1|1)	(3|1|2)	(3|1|3)	(3|1|4)	(3|1|5)
	2	(3|2|1)	(3|2|2)	(3|2|3)	(3|2|4)	(3|2|5)
	3	(3|3|1)	(3|3|2)	(3|3|3)	(3|3|4)	(3|3|5)
	4	(3|4|1)	(3|4|2)	(3|4|3)	(3|4|4)	(3|4|5)
	5	(3|5|1)	(3|5|2)	(3|5|3)	(3|5|4)	(3|5|5)
Erste Ziehung = 4	1	(4|1|1)	(4|1|2)	(4|1|3)	(4|1|4)	(4|1|5)
	2	(4|2|1)	(4|2|2)	(4|2|3)	(4|2|4)	(4|2|5)
	3	(4|3|1)	(4|3|2)	(4|3|3)	(4|3|4)	(4|3|5)
	4	(4|4|1)	(4|4|2)	(4|4|3)	(4|4|4)	(4|4|5)
	5	(4|5|1)	(4|5|2)	(4|5|3)	(4|5|4)	(4|5|5)
Erste Ziehung = 5	1	(5|1|1)	(5|1|2)	(5|1|3)	(5|1|4)	(5|1|5)
	2	(5|2|1)	(5|2|2)	(5|2|3)	(5|2|4)	(5|2|5)
	3	(5|3|1)	(5|3|2)	(5|3|3)	(5|3|4)	(5|3|5)
	4	(5|4|1)	(5|4|2)	(5|4|3)	(5|4|4)	(5|4|5)
	5	(5|5|1)	(5|5|2)	(5|5|3)	(5|5|4)	(5|5|5)

Die Diagonale bleibt erhalten, die Zeilen und Spalten belieben ebenfalls erhalten. Dort treten nur Elemente mit den gleichen Nummern auf und Wiederholung ist erlaubt.

Zweite Ziehung kleiner als erste Ziehung, deshalb in erster Ziehung schon vorhanden

Dritte Ziehung kleiner als die erste Ziehung, Spaltennummer der davor gelöschten Zeile.

Entfällt weil Spaltennummer größer als Zeilennummer (ohne Reihenfolge)

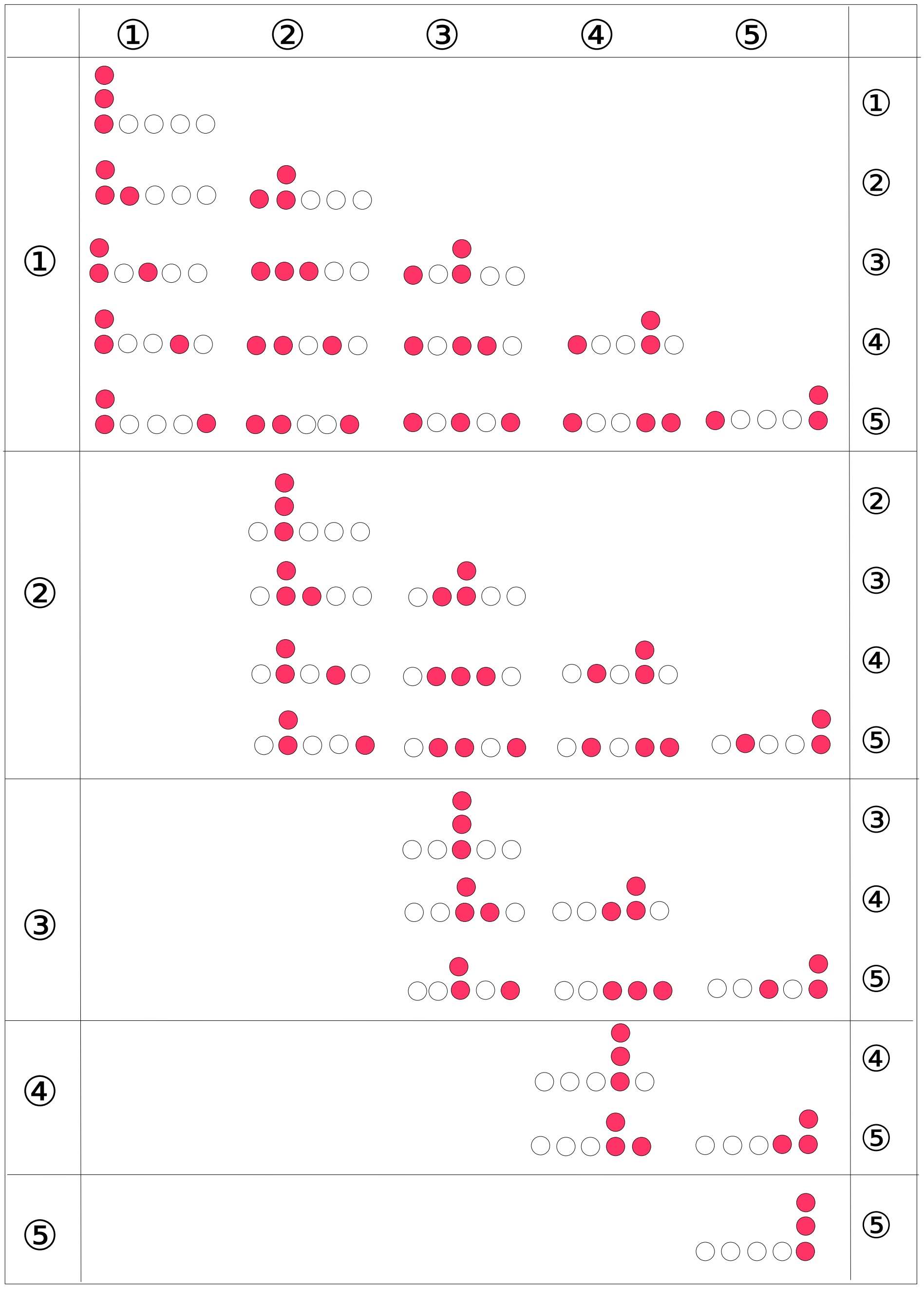
(Wenn eine kleinere Nummer nach einer größeren auftritt, dann muss in den bisherigen Ziehungen mindestens in der 1. Ziehung die kleine Nummer bereits vorhanden sein. Da die Reihenfolge nicht zu beachten ist, ist dieses Trippel bereits erfasst.)

2.2.2. Kombination mit Wiederholung – duales Urnenmodel für n = 5

Anzahl der Merkmale: n = 5
Anzahl der Versuche: k = 3

Duales Urnenmodell:

- 3 nicht unterscheidbare Kugeln auf
- 5 Urnen zu verteilen wobei
- Mehrfachbelegung zulässig ist



2.2.2. mit Wiederholung ohne Reihenfolge k Elemente

Beispiel 1

Sie gehen mit 3 Mitschülern in ein Bistro. Dort stehen 5 verschiedene Menüs zur Auswahl. Während sich die Mitschüler bereits auf die Plätze setzen, erhalten Sie den Auftrag, für sich und für die 3 Mit-schüler jeweils irgendein Essen zu besorgen, weil es sich in allen Fällen um die Spezies "Allesfresser" handelt und jedem egal ist, was er ißt. Wieviele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es insgesamt, die Menü's auszuwählen.

Lösung

	die Anzahl der Menüs ist n	n = 5	
1	die Anzahl der benötigten Essen ist	k = 4	V/K
2	die Reihenfolge der Essen ist uninteressant, da sowieso noch nicht klar ist, wer welches Essen bekommt	ohne Reihenfolge	K
3	Es können mehrere Essen gleichzeitig ausgewählt werden.	mit Wiederholung	K_{mW}

Kombination mit Wiederholung – k-Kombination aus einer n-Menge

Die Anzahl der Möglichkeiten $\binom{5+4-1}{4} = \binom{8}{4} = \frac{8*7*6*5}{1*2*3*4} = 2*7*5 = 70$

Die hier aufgeführten Formeln des Multiplikationsprinzips stellen nur einige häufig benutzte Zusammenhänge her. Grundlage bleibt das Multiplikationsprinzip: Existieren verschiedene durchschnittsfremde Mengen und ist die Anzahl der Zusammenstellung von Elementen aus je einer Menge gesucht, dann ist die Anzahl durch das Produkt der Anzahl der Elemente jeder einzelnen Menge gekennzeichnet.

Das Multiplikationsprinzip umfasst nur gleichzeitig eintretende Ereignisse:
ein Element aus A, ein Element aus B .... zwei Elemente aus M

Das Multiplikationsprinzip kann die folgende Aufgabenstellungen nicht abdecken:

- ein Element aus A, ein ***oder*** zwei Elemente aus B .... zwei Elemente aus M
- ***mindestens*** zwei Elemente aus A, ein Element aus B ...... zwei Elemente aus M

Die Frage nach ein oder zwei Elementen aus B ist nicht mehr unabhängig. Wenn ein Element aus A gewählt wurde, dann können nicht zwei Elemente aus B gewählt werden.

Wenn mindestens zwei Elemente aus A gewählt werden sollen, dann ist nicht klar, ob es 5 Elemente oder 7 Elemente sind, bzw wieviele Möglichkeiten es noch gibt.

II. Summenregel

Summenregel (Additionsprinzip)
Lässt sich ein Objekt a aus einer Menge A auf m Arten auswählen und ein Objekt b aus einer anderen Menge B auf n Arten auswählen, so lässt sich a oder b (entweder a oder b) auf m + n Arten auswählen.

- Zerlegen einer Aufgabenstellung in durchschnittsfremde Teilaufgaben.
- Ermitteln der Anzahlen für jede Teilaufgabe.
- Addieren aller Einzelanzahlen.

Besonderer Augenwerk ist hier auf eine durchschnittsfremde Zerlegung zu achten, da anderenfalls bestimmte Konstellationen doppelt gezählt werden.
Außerdem muss die Zerlegung vollständig sein, es darf keine Teilereignisse geben, die nicht mit erfasst sind.

Das ist der zweite Teil des Zählprinzips. In dieser Summenregel werden alle Aufgabenstellungen zusammengefasst, in denen mehrere Elementarereignisse auftreten:

ein Element aus A, ein ***oder*** zwei Elemente aus B .... zwei Elemente aus M wird zerlegt in:

ein Element aus A, ein Elemente aus B .... zwei Elemente aus M ***und***
ein Element aus A, zwei Elemente aus B .... zwei Elemente aus M

mindestens zwei Elemente aus A, ein Element aus B ...... zwei Elemente aus M wird zerlegt in:
zwei Elemente aus A, ein Element aus B ...... zwei Elemente aus M ***und***
drei Elemente aus A, ein Element aus B ...... zwei Elemente aus M ***und***
vier Elemente aus A, ein Element aus B ...... zwei Elemente aus M ***und***
. . . . ***und***
n Elemente aus A, ein Element aus B ...... zwei Elemente aus M

Man kann wohl als Grundidee folgendes sich merken:

Die Summenregel zerlegt das Gesamtereignis in einzelne Teilereignisse, die mit der Multiplikationsregel zu lösen sind.

Aufgabe 1

Wieviele verschiedene Zahlen kann man aus den Ziffern 3, 5, 6 , 7 bilden, wenn keine Ziffer in einer Zahl mehrmals auftreten darf.

Lösung

Hier beginnt das Problem, dass es 1-stellige, 2-stellige, 3-stellige und 4-stellige Zahlen gibt. Von jeder möglichen Art gibt es aber unterschiedlich viele. Deshalb ist es ratsam, die drei verschiedenen Arten getrennt zu betrachten. Durchschnittsfremd sind sie dann auf alle Fälle. Vollständig sind sie dann auf alle Fälle auch.

1 – stellige: 4 Möglichkeiten

2 – stellige: bilde aus 4 Ziffern Gruppen zu 2 ohne Wiederholung:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 =$$ 12 Möglichkeiten

3 – stellige: bilde aus 4 Ziffern Gruppen zu 3 ohne Wiederholung:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$ Möglichkeiten

4 – stellige: bilde aus 4 Ziffern Gruppen zu 4 ohne Wiederholung:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$ Möglichkeiten

Gesamtanzahl: 64 Möglichkeiten

Aufgabe 2

Wieviele verschiedene vierstellige Zahlen enthalten . . . . . .

a) die Ziffer 3 ?

b) die Ziffer 3 und/oder die Ziffer 5 enthalten

Lösung

a) die Ziffer 3 ?

1. Stelle: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

Diese Anzahl enthält auch alle Zahlen, in denen die 3 mehrfach auftritt, wenn nur in der 1.Position eine 3 steht.

2 – stellige: $8 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 = 800$

Diese Anzahl enthält alle Zahlen, in denen die 3 mehrfach auftritt, wenn nur in der 1.Position keine 3 steht, dafür aber in der 2.

3 – stellige: $8 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 10 = 720$

Diese Anzahl enthält alle Zahlen, in denen 2-mal die 3 auftritt, wenn nur in der 1.Position keine 3 (und keine 0) steht und in der zweiten Position keine 3, dafür aber in der 3.

4 – stellige: $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 648$

Gesamtanzahl: 3 168 Möglichkeiten

b) die Ziffer 3 und/oder die Ziffer 5 enthalten

1. Stelle: 3 oder 5

$2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2\,000$

Diese Anzahl enthält auch alle Zahlen, in denen die 3 oder die 5 mehrfach auftritt, wenn nur in der 1.Position eine 3 oder eine 5 steht.

2. Stelle: 3 oder 5, aber nicht in der ersten Stelle

$7 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,400$

Diese Anzahl enthält alle Zahlen, in denen die 3 oder 5 mehrfach auftritt, wenn nur in der 1.Position keine 3 oder 5 steht, dafür aber in der 2.

3. Stelle: 3 oder 5, aber nicht in der ersten oder zweiten Stelle

$7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 10 = 1\,120$

4. Stelle: 3 oder 5, aber nicht in der ersten Stelle

$7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2 = 896$

Bei der 1. Stelle ist immer mit zu berücksichtigen, dass auch die 0 nicht auftreten darf. Deshalb bleiben an der ersten Position nur 7 Möglichkeiten, während in Position 2 und 3 jeweils 8 Möglichkeiten übrigbleiben.

Aufgabe 3

In einer Klasse mit 25 Schülern sollen 2 Klassensprecher gewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

Lösung

Zählprinzip:

Multiplikationsregel:
Für den Klassensprecher stehen 25 Schüler zu Auswahl
Für den Stellvertreter stehen (noch) 24 Schüler zur Auswahl

$25 \cdot 24$

Kombinatorik:

Wähle aus
25 Schülern
2 Schüler aus,
mit Beachtung der Reihenfolge
ohne Wiederholung

n = 25
k = 2 => V/K
V
V_{oW}

$\frac{25!}{(25-2)!}$

Aufgabe 4

In der einer staatlichen FOS/BOS gibt es zehn 11. Klassen und acht Klassen. Zur Klassensprecherkonferenz kommen die beiden Klassensprecher einer Klasse. Von allen Klassensprechern sollen drei für eine Zusammenarbeit mit den Klassensprechern anderer Schulen ausgewählt werden. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Wahl?

Lösung

Zählprinzip:

Multiplikationsregel:
Für die Wahl stehen 18 *2 = 36 Schüler zu Auswahl
aus diesen Schülern sind 3 auszuwählen

$36 \cdot 35 \cdot 34$

Da die Reihenfolge uninteressant ist, lassen sich 3 Personen in 3! Anordnungen zusammenstellen, die als 1 Anordnung zu sehen ist.

: 3!

Kombinatorik:

Wähle aus
36 Schülern
3 Schüler aus,
ohne Beachtung der Reihenfolge
ohne Wiederholung

n = 36
k = 3 => V/K
K
K_{oW}

$\binom{36}{3}$

Aufgabe 5

Die 4 Orte A, B. C und D sind folgendermaßen miteinander verbunden:
zwischen A und B gibt es 3 Straßen, zwischen B und C gibt es 4 Straßen, zwischen C und D gibt es 5 Straßen.
a) Wie viele Reiserouten gibt es für die Fahrt von A über B und C nach D?
b) Wie viele Rundreiserouten ABCDCBA gibt es? (Straße darf doppelt befahren werden)
c) Ein Handelsvertreter macht eine solche Rundreise, wobei er in jedem Ort
zufällig ein der möglichen Verbindungsstraßen auswählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit benutzt er keine Straße zweimal.

Lösung

a) Zählprinzip: Multiplikationsregel:
Die Benutzung der Straßen ist unabhängig voneinander $3 \cdot 4 \cdot 5$

Kombinatorik: keine geschlossene Formel

b) Zählprinzip: Multiplikationsregel:
Die Benutzung der Straßen ist unabhängig voneinander $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

c) Zählprinzip: Multiplikationsregel:
Bei der Hinfahrt von A bis D sind noch alle Straßen möglich, bei der Rückfahrt darf jeweils eine Straße nicht benutzt werden $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

Für die Wahrscheinlichkeit ist diese Zahl durch die Zahl aus b) zu dividieren.

Aufgabe 6

Wie viele Flaggen mit drei waagrechten Streifen kann man bilden, wenn man dafür aus 7 Farben wählen kann und benachbarte Streifen nicht dieselbe Farbe haben dürfen?

Lösung

Zählprinzip: Multiplikationsregel: $7 \cdot 6 \cdot 6$
Für den 1. Streifen stehen 7 Farben zur Auswahl.
Für den 2. Streifen stehen 6 Farben zur Auswahl (ohne 1)
Für den 3. Streifen stehen 6 Farben zur Auswahl (ohne 2)

Kombinatorik: keine geschlossene Formel.

Für zwei Streifen kann man zu jeder Farbe des 1. Streifens noch 6 Farben für den zweiten Streifen auswählen.

Wähle aus
7 Farben
2 Farben aus,
mit Beachtung der Reihenfolge
ohne Wiederholung

$n = 7$
$k = 2$ => V/K
V
V_{oW}

$$\frac{7!}{(7-2)!}$$

Für den dritten Streifen stehen 6 Farben zur Verfügung. $\cdot 6$

Aufgabe 7

6 Politiker treffen sich zu einer Konferenz. Jeder begrüßt jeden per Hand schütteln. Wie viele Hände werden geschüttelt.

Lösung

Zählprinzip: Multiplikationsregel:
Der 1. Politiker schüttelt 5 Hände
Der 2. Politiker schüttelt 4 Hände
(da er den 1. nicht noch einmal begrüßt)
Der 3. Politiker schüttelt 3 Hände

$5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 5!$

Kombinatorik: Standardaufgabe der Permutation

Folgende anschauliche Vorstellung:
Der 1. Politiker wird in eine Kabine gestellt.
Alle anderen Politiker laufen an ihm vorbei, damit hat **er** alle begrüßt
Alle Politiker bleiben unmittelbar danach stehen.
Für den zweiten Politiker wird eine zweite Kabine hereingebracht.
Alle noch vorhandenen Politiker ziehen an der zweiten Kabine vorbei.
. . . . .

$5!$

Aufgabe 8

Wie viele „Wörter" kann man aus den Buchstaben „EIS" bilden? Wie viele aus den Buchstaben „SCHNEE"?

Lösung

„EIS"

Zählprinzip: Multiplikationsregel:
Für den 1.Buchstaben stehen 3 Buchstaben zur Auswahl
Für den 2. Buchstaben stehen 2 Buchstaben zur Auswahl
Für den 3. Buchstaben steht 1 Buchstabe zur Auswahl

$3 \bullet 2 \bullet 1 = 3!$

Kombinatorik: Das ist Permutation in Reinform

$5!$

„SCHNEE"

Zählprinzip: Multiplikationsregel:
Für den 1. Buchstaben stehen 5 Buchstaben zur Auswahl
Für den 2. Buchstaben stehen 4 Buchstaben zur Auswahl
Für den 3. Buchstaben stehen 3 Buchstaben zur Auswahl
Für den 4. Buchstaben stehen 2 Buchstaben zur Auswahl
Für den 5. Buchstaben steht 1 Buchstabe zur Auswahl

$5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 5!$

Leider tauchen alle Worte doppelt auf, da die beiden E nicht unterscheidbar sind.

„$CHNE_1SE_2$" „$CHNE_2SE_1$"

Deshalb ist diese Anzahl durch 2 zu dividieren

$: 2$

Kombinatorik: Standardaufgabe der Permutation mit Wiederholung

Anordnung von 5 Buchstaben, von den 2 nicht unterscheidbar sind

$\frac{5!}{2!}$

Aufgabe 9

Ein Computerhändler verkauft seine sonst gleichartigen Computer mit fünf verschiedenen Monitoren, drei verschiedenen Festplatten und zwei verschiedenen Größen des Arbeitsspeichers. Er hat alle möglichen Konfigurationen aufgebaut in seinem Laden stehen. Wie viele Computer müssen mindestens im Laden stehen?

Lösung

Zählprinzip: Multiplikationsregel:
Die Benutzung der Straßen ist unabhängig voneinander $5 \cdot 3 \cdot 2$

Kombinatorik: keine geschlossene Formel

Aufgabe 10

Jemand kann mit vier verschiedenen Fluglinien zwischen Wien und Paris fliegen. Wie viele Möglichkeiten hat er, eine Fluglinie für einen Flug von Wien nach Paris und zurück auszuwählen, wenn
a) er für beide Flüge dieselbe Fluglinie
b) er nicht unbedingt für beide Flüge dieselbe Fluglinie
c) er für beide Flüge auf jedem Fall verschiedene Fluglinien wählt

Lösung

a) Zählprinzip: Multiplikationsregel:
Für den Hinflug 4 Möglichkeiten
Für den Rückflug 1 Möglichkeit. $4 \cdot 1$

Kombinatorik: Wähle aus
4 Fluglinien — $n = 4$
1 Fluglinie aus, — $k = 1$ => V/K
ohne Beachtung der Reihenfolge — K
ohne Wiederholung — K_{oW}

$$\binom{4}{1} = 4$$

Bei der Auswahl von „1“ ist Reihenfolge und Wiederholung irrelevant:

Wähle aus
4 Fluglinien — $n = 4$
1 Fluglinie aus, — $k = 1$ => V/K
mit Beachtung der Reihenfolge — V
ohne Wiederholung — V_{oW}

$$\frac{4!}{(4-1)!} = 4$$

Wähle aus
4 Fluglinien — $n = 4$
1 Fluglinie aus, — $k = 1$ => V/K
mit Beachtung der Reihenfolge — V
mit Wiederholung — V_{mW}

$$4^1 = 4$$

b) Zählprinzip: Multiplikationsregel:
Für den Hinflug 4 Möglichkeiten
Für den Rückflug 4 Möglichkeit. $4 \cdot 4$

Kombinatorik: Wähle aus
4 Fluglinien — $n = 4$
1 Fluglinie aus, — $k = 1$ => V/K
ohne Beachtung der Reihenfolge — K
ohne Wiederholung — K_{oW}

$$\binom{4}{1}$$

und das zweimal — $n =$
mit Beachtung der Reihenfolge — $k = 2$ => V/K
mit Wiederholung — V
V_{oW}

$$\binom{4}{1}^2$$

Obwohl Reihenfolge keine Rolle spielt muss man unterscheiden:
Fluglinie 1 – Fluglinie 1 ist nur eine Möglichkeit, Vertauschung ist das Gleiche
Fluglinie 1 – Fluglinie 2 sind zwei Möglichkeiten, Vertauschung sind verschieden

Aufgabe 11

Auf wie viele Arten kann man 5 Hotelgäste in 10 freie Einzelzimmer unterbringen?

Lösung

Zählprinzip:

Multiplikationsregel:
Die Hotelgäste werden um 5 weitere Hotelgäste „niemand" erweitert. Da diese nicht zu sehen sind, weiß man auch nicht, wie sie sich die verbleibenden 5 Zimmer aufteilen.

10 Hotelgäste wählen 10 Zimmer aus, 5 dieser Hotelgäste sind nicht unterscheidbar (damit erhält jedes Zimmer einen Hotelgast) mit Beachtung der Reihenfolge mit Wiederholungen	$n = 10$ $n_1 = 5$ => P P P_{mW}	$\frac{10!}{5!}$
Die Reihenfolge der realen Hotelgäste ist aber uninteressant:		: 5!

Kombinatorik:

Gruppiere 10 Zimmer zu jeweils 5 Zimmern, die einen Hotelgast bekommen, ohne Beachtung der Reihenfolge ohne Wiederholung	$n = 10$ $k = 5$ => V/K K K_{oW}	$\binom{10}{5}$

Aufgabe 12

Sie haben die fünf Ziffern 1, 2, 2, 3, 4 und sollen aus diesen alle möglichen fünfstelligen Zahlen bilden. Die Zahlen denken Sie sich der Größe nach geordnet in einer Liste.
Folglich ist die erste Zahl der Liste 12234 und die letzte Zahl der Liste 43221.

a. Wie viele Zahlen stehen in der Liste?
b. Wie viele Zahlen der Liste beginnen mit 2?
c. Wie viele Zahlen der Liste beginnen mit 3?
d. An welcher Stelle der Liste steht 13242?
e. Welche Zahl steht an der 50. Stelle?

Lösung

a) Es sind 5 Ziffern anzuordnen, davon sind 2 nicht unterscheidbar $\frac{5!}{2!} = 60$

b) Nach einer 2 sind 4 Elemente frei kombinierbar: 4! = 24

c) Nach einer 3 sind 4 Elemente frei kombinierbar, wovon 2 nicht unterscheidbar sind. $\frac{4!}{2!} = 12$

d) Wenn an der zweiten Stelle eine 3 steht, müssen die 2 erst vorbei sein.
Für 12. . . sind noch 3 Elemente frei kombinierbar: 3! = 6
132 . . ist damit die 7. Position nach den 122. .
13224 ist die 7. Position
13242 ist die 8. Position

e) nach der ersten Zahl 1 : 4 Zahlen, 2 nicht unterscheidbar $\frac{4!}{2!} = 12$

nach der ersten Zahl 2 : 4 Zahlen unterscheidbar 4! = 24

nach der ersten Zahl 3 : 4 Zahlen, 2 nicht unterscheidbar $\frac{4!}{2!} = 12$

48

Die 50. Zahl beginnt mit 41 . . . die erste Folgezahl ist 223
die zweite Folgezahl ist 232 **=> 41232**

Aufgabe 13

Bernd lauscht außerhalb des Raumes einem Fest. Als alle anstoßen, zählt er die Anzahl der „Kling“ mit und kommt auf 25.

a. Warum muss er sich verzählt haben?

b. Angenommen er hat zu wenig gezählt. Was ist dann die untere Grenze für die Anzahl der Leute, die an dem Fest teilnehmen?

Lösung

Beim Anstoßen werden aus den Personen Paare gebildet, dabei ist die Reihenfolge egal und es gibt keine Wiederholung (Wenn AB angestoßen haben stoßen BA nicht noch einmal an).

Damit gibt es eine Kombination ohne Wiederholung: $\binom{n}{k} = \binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}$

$$\tfrac{1}{2}\,(n^2 - n) = 25$$
$$n^2 - n - 50 = 0$$
$$n_{1/2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 50}$$
$$n_{1/2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{50{,}25}$$
$$= 0{,}5 \pm 7{,}08$$
$$n_1 = 7{,}58$$
$$n_2 = -6{,}58 \text{ (entfällt)}$$

Die nächstmögliche ganzzahlige Lösung ist n = 8.

Aufgabe 14

Wie viele verschiedene achtstellige Anordnungen der Elemente der Menge { 1,2,3,4,5,6,7,8 } beginnen …

a) ... mit 6, wenn keine Ziffer mehrmals auftreten darf ?

b) ... mit 234, wenn keine Ziffer mehrmals auftreten darf ?

c) ... mit 7534, wenn keine Ziffer mehrmals auftreten darf ?

Lösung

a) Zählprinzip:

Multiplikationsregel:	
Für die 1. Zahl steht 1 Ziffer zur Auswahl	1
Für die 2. Zahl stehen 7 Ziffern zur Auswahl	• 7
Für die 3. Zahl stehen 6 Ziffern zur Auswahl	• 6
. . . . .	
Für die 8. Zahl steht 1 Ziffer zur Auswahl	• 1
	1 • 7! = 5 040

b)

Multiplikationsregel:	
Für die 1. Zahl steht 1 Ziffer zur Auswahl	1
Für die 2. Zahl steht 1 Ziffer zur Auswahl	• 1
Für die 3. Zahl steht 1 Ziffer zur Auswahl	• 1
Für die 4. Zahl stehen 5 Ziffern zur Auswahl	• 5
Für die 5. Zahl stehen 4 Ziffern zur Auswahl	• 4
. . . . . .	
Für die 8. Zahl steht 1 Ziffer zur Auswahl	• 1
	1 • 5! = 120

c) 1 • 1 • 1 • 1 • 4! = 24

Aufgabe 15

Sechs Personen sollen an einem runden Tisch Platz nehmen. Die Plätze sind nummeriert.
Bedingung: Hans und Anna sollen nebeneinander sitzen.

Lösung

Zählprinzip: Multiplikationsregel:

Anna setze sich zuerst: sie hat 6 Möglichkeiten	6
dann setzt sich Hans neben sie: 2 Möglichkeiten, links oder rechts	6•2
die dritte Person hat noch 4 Wahlmöglichkeiten	6•2 • 4
die vierte Person hat noch 3 Wahlmöglichkeiten	6•2 • 4•3
die fünfte Person hat noch 2 Wahlmöglichkeiten	6•2 • 4•3•2
die sechste Person hat noch 1 Wahlmöglichkeit	6•2 • 4•3•2•1

6•2 • 4•3•2•1 = 288

Kombinatorik:

Es sollen nur die Fälle betrachtet werden, in denen Hans nach Anna sitzt. Die andere Anzahl entsteht einfach durch verdoppeln, Das gleiche noch einmal, indem Hans von Anna sitzt.

{A H x x x x}
{x A H x x x}
{x x A H x x}
{x x x A H x}
{x x x x A H}
{H x x x x A}

Es gibt 6 Positionen, auf denen Anna sitzen kann. 6

Da der Stuhl neben ihr automatisch belegt ist, stehen nur noch 4 Stühle zur Verfügung.
Jede Klammer hat an den x – Positionen eine Permutation von 4! • 4!

Hans und Anna vertauschen • 2!

Gibt es n Plätze zu verteilen	n
wollen k Personen zusammensitzen	• (n-k)!
die k Personen in beliebiger Reihenfolge	• k!

ACHTUNG! Das gilt nur, wenn die Stühle im Kreis stehen. Wenn sie in einer Linie stehen ist die Zahl geringer, weil dann die letzte Zeile nicht mehr möglich ist.

Um 6 Personen auf 6 Stühle zu verteilen, existieren 6! verschieden Möglichkeiten.
In diesem Fall sollen aber nur die Ereignisse gezählt werden, wo Hans direkt neben Anna sitzt.

Anna wählt sich den 1. Platz aus, dann gibt es für Hans folgende Möglichkeiten:

6 Personen auf 6 Stühle anordnen: 6!

{A H x x x x}
{A x H x x x}
{A x x H x x}
{A x x x H x}
{A x x x x H}

Diese Aufstellung kann man für jede Platznummer machen. Es wird dadurch offensichtlich die 5 – fache Anzahl von Ereignissen gezählt, als gewollt. Mit anderen Worten: aus diesen 5 Ereignissen ist ein Ereignis zu machen. : 5

Hans und Anna vertauschen • 2!

$$\frac{6!}{5} \cdot 2! = 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$$
$$= 6 \cdot 4! \cdot 2!$$

Aufgabe 16

Jedes Element darf nur einmal verwendet werden.

Gegeben: 5 Buchstaben: A, b, C, d, E
Wieviel Wörter lassen sich davon bilden
a) aus 3 Buchstaben
b) aus 5 Buchstaben
c) aus 5 Buchstaben, der erste ist gross
d) aus 5 Buchstaben, der erste ist klein
e) aus 5 Buchstaben, zuerst alle grossen
f) aus 5 Buchstaben, wechselweise gross - klein

Lösung

a) Wörter aus 3 Buchstaben

für den 1. Buchstaben des Wortes:	5 Zeichen	5
und		•
für den 2. Buchstaben des Wortes:	4 Zeichen	4
und		•
für den 3. Buchstaben des Wortes:	3 Zeichen	3

Die ***und*** *Verknüpfung sichert das Multiplikationszeichen*

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b) Wörter aus 5 Buchstaben

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$

c) Wörter aus 5 Buchstaben, der erste ist groß

$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 4! = 72$

Für den 1. Buchstaben stehen 3 Möglichkeiten zur Verfügung, ab dem 2. Buchstaben noch 4 immer um 1 abnehmend.

d) Wörter aus 5 Buchstaben, der erste ist klein

$2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 4! = 48$

Für den 1. Buchstaben stehen 2 Möglichkeiten zur Verfügung, ab dem 2. Buchstaben noch 4 immer um 1 abnehmend.

e) Wörter aus 5 Buchstaben, zuerst alle grossen

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \cdot 2! = 12$

Für den 1. Buchstaben stehen 3 Möglichkeiten zur Verfügung, für den 2. Buchstaben noch 2 und für den 3. noch 1; für den 4. stehen dann wieder 2 Buchstaben zur Verfügung und für den 5. noch 1er.

f) Wörter aus 5 Buchstaben, wechselweise gross - klein

3	1. Großbuchstabe
•	
2	1. Kleinbuchstabe
•	
2	2. Großbuchstabe
•	
1	2. Kleinbuchstabe
•	
1	3. Großbuchstabe

$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$

Aufgabe 17

Anordnungen mit Wiederholung; jedes Element darf mehrmals verwendet werden.

Gegeben: 5 Buchstaben: A, b, C, d, E

a) Wörter aus 3 Buchstaben
b) Wörter aus 3 Buchstaben alle gross
c) Wörter aus 3 Buchstaben alle klein
d) Wörter aus 3 Buchstaben mit grossem Anfangsbuchstaben
e) Wörter aus 3 Buchstaben, die mit C beginnen
f) Wörter aus 3 Buchstaben, Buchstabenreihenfolge gross klein gross
g) Wörter aus 4 Buchstaben
h) Wörter aus 6 Buchstaben

Lösung

mit Beachtung der Reihenfolge mit Wiederholung

a) für den 1. Buchstaben des Wortes: 5 Zeichen 5
und •
für den 2. Buchstaben des Wortes: 5 Zeichen 5
und •
für den 3. Buchstaben des Wortes: 5 Zeichen 5

Die ***und*** *Verknüpfung sichert das Multiplikationszeichen*

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$

b) Gleiche Überlegung, aber wir haben nur 3 Buchstaben zur Verfügung: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$

c) Gleiche Überlegung, aber wir haben nur 2 Buchstaben zur Verfügung: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

d) Achtung! Das heißt nicht, dass die anderen zwei klein sein müssen : $3 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 5^2 = 75$

Für den 1. Buchstaben stehen 3 Möglichkeiten zur Verfügung, ab dem 2. Buchstaben aber immer 5. Wegen Wiederholung kann auch der 1. Buchstabe noch einmal auftreten.

e) $1 \cdot 5 \cdot 5 = 1 \cdot 5^2 = 25$

f) Für den 1. Buchstaben stehen 3 Möglichkeiten zur Verfügung,
für den 2. Buchstaben stehen 2 Möglichkeiten zur Verfügung,
für den 3. Buchstaben stehen 3 Möglichkeiten zur Verfügung

3 1. Großbuchstabe
•
2 1. Kleinbuchstabe
•
3 2. Großbuchstabe

$3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$

g) siehe Erklärung zu a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$

h) siehe Erklärung zu a)
Da mit Wiederholung gearbeitet wird, können die Wörter auch länger sein, als die Anzahl der Buchstaben, da für jede Position immer wieder die komplette Anzahl der Buchstaben zur Verfügung steht.

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15\,625$

Aufgabe 18

Aus einer Urne, die 14 rote, 15 grüne und eine blaue Kugel enthält, werden nacheinander ohne Zurücklegen 2 Kugeln entnommen.

Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Mindestens eine gezogene Kugel ist grün“.

Lösung

Zählprinzip:

Die Wahrscheinlichkeit jeweils 2 Kugeln zu ziehen, bei der mindestens eine grüne dabei ist. Jedes Elementarereignis mit der Anzahl 2 verschiedene Elemente zu erreichen. 2 Elemente anzuordnen liefert 2! Möglichkeiten. Die Anordnung grün/grün existiert nur einmal.

$$P(r;g)\ \text{Anzahl} + P(g;g)\ \text{Anzahl} + P(b;g)\ \text{Anzahl}$$

$$\frac{14}{30}\,\frac{15}{29}\quad 2! \qquad \frac{15}{30}\,\frac{14}{29}\quad 1! \qquad \frac{1}{30}\,\frac{15}{29}\quad 2!$$

$$0{,}2414 * 2 + 0{,}2414 * 1 + 0{,}0172 * 2 = 0{,}7586$$

Kombinatorik:

2 Kugeln aus 30 zu ziehen ergibt eine Anzahl von $\binom{30}{2} = 435$

1 grüne aus 15 und 1 andersfarbige aus 15 zu ziehen: $\binom{15}{1}\binom{15}{1} = 15 * 15 = 225$

2 grüne zu ziehen: $\binom{15}{2}\binom{15}{0} = 105$

$$\frac{225 + 105}{435} = 0{,}7586$$

Aufgabe 19

Aus schwarzen und weißen Legosteinen wird ein Turm aufgebaut, indem immer acht Steine übereinander gestapelt werden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten zu folgenden Ereignissen:
A: Nur ein Stein ist weiß.
B: Der erste und der letzte Stein haben dieselbe Farbe. Die Farbe der anderen Steine ist uninteressant

Lösung

Zählprinzip:

$$P(w;7s)\ \text{Anzahl}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^7 \quad \frac{8!}{7!} = \frac{8}{2^8} = 0{,}03125$$

Kombinatorik:

2 Steine werden mit Wiederholung in 8 Fächer gelegt: 2^8

8 Steine werden angeordnet, wobei 7 nicht unterscheidbar sind: $\frac{8!}{7!}$

$$\frac{8}{2^8} = 0{,}03125$$

Zählprinzip:

$$P(2w;6s)\ \text{Anzahl} \ * 2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6 * 2^6 \quad * 2 = \frac{2^7}{2^8} = 0{,}5$$

Der erste und der letzte Stein liegen fest. Damit sind nur die restlichen 6 Plätze variierbar.
Auf 6 Plätzen sind 2 Steine mit Wiederholung zu legen.
Da die ersten und letzten Steine sowohl weiß als auch schwarz sein können ist mit 2 zu multiplizieren.

Aufgabe 20

In einer Urne sind 7 weiße, 5 schwarze und 3 rote Kugeln. Es werden gleichzeitig 3 Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
- alle Kugeln weiß sind.
- von jeder Farbe eine Kugel dabei ist.

Lösung

Zählprinzip:

Von 15 Kugeln werden 3 ausgewählt: Für die 1. Kugel 15 Möglichkeiten
für die 2. Kugel 14 Möglichkeiten
für die 3. Kugel 13 Möglichkeiten

Die Reihenfolge ist uninteressant: : 3!

von 7 weißen Kugel sollen 3 ausgewählt werden: Für die 1. Kugel 7 Möglichkeiten
für die 2. Kugel 6 Möglichkeiten
für die 3. Kugel 5 Möglichkeiten

Die Reihenfolge ist uninteressant: : 3!

$$\frac{\frac{7\ 6\ 5}{3!}}{\frac{15\ 14\ 13}{3!}} = \frac{7\ 6\ 5}{15\ 14\ 13} = 0{,}0769$$

Kombinatorik:

Aus 15 Kugeln 3 Kugeln ohne Reihenfolge auswählen: $\binom{15}{3} = 455$

Aus 7 weißen Kugeln 3 Kugeln ohne Reihenfolge auswählen: $\binom{7}{3} = 35 \qquad \frac{35}{455} = 0{,}0769$

Zählprinzip:

Von jeder Farbe 1 Kugel: Für die 1. Farbe 7 Möglichkeiten
für die 2. Farbe 5 Möglichkeiten
für die 3. Farbe 3 Möglichkeiten

$$\frac{7 * 5 * 3}{\frac{15\ 14\ 13}{3!}} = 0{,}23077$$

Kombinatorik:

Von jeder Farbe 1 Kugel: $\binom{7}{1}\binom{5}{1}\binom{3}{1}$ $\qquad \frac{\binom{7}{1}\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{15}{3}}$