

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
<p>Wachstum</p>	<p>■ Wachstumsvorgänge</p>	
	<p>● Zunahme und Abnahme bei Wachstum</p> <p>Bei einem Wachstum kann man die Änderung des Bestandes zwischen den Zeitpunkten t und $t+\Delta t$ auf zwei verschiedene Weise beschreiben:</p> <p>(1) Man berechnet man die Differenz der Werte zwischen den Zeitpunkten t und $t + \Delta t$: $B(t+\Delta t) = B(t) + \Delta B$, wobei ΔB die Absolute Differenz oder Bestandsänderung ist, die Änderung des bestandes innerhalb eines Zeitabschnittes.</p> <p>(2) Man gibt die relative oder prozentuale Änderung p an. Diese wird durch den Quotienten $\frac{B(t+1) - B(t)}{B(t)} = p$ bestimmt.</p> <p>Der Wachstumsfaktor q bestimmt sich aus: $\frac{B(t+1)}{B(t)}$</p> <p>oder aus $q = 1 + p$.</p> <p>(3) Jedes Wachstum beginnt mit einem Anfangsbestand $B(0)$. Dieser Anfangsbestand muß von 0 verschieden sein, weil von 0 nichts wachsen kann.</p> <p>(4) Der Anfangsbestand $B(0)$ ist der Bestand zu einem Zeitpunkt, den man als $t=0$ bezeichnet, ansetzt. Es ist deshalb nicht korrekt, die Verlaufskurve nach links, in Richtung eines früheren Zeitpunktes, zu erweitern, da über diese Zeitpunkte nichts bekannt ist. <i>(In einer Nährlösung kann man mit 10 Bakterien begonnen haben und wartet ein Jahr, bis es 1000 sind. Erst ab diesem Zeitpunkt gilt der angegebene Wachstumsprozess, solange es weniger sind könnten andere Regeln gelten.</i> ODER: <i>Jemand kippt ein Gefäß mit 1000 Bakterien in die Nährlösung, die z.B aus verschiedenen Labors zusammengekauft wurden)</i></p> <p>(5) $B(t)$ ist der Anfangsbestand zum Zeitpunkt t.</p> <p>(6) Ändert sich der Bestand $B(t)$ in einem Zeitintervall Δt um die Bestandsänderung ΔB, so bezeichnet man den Quotienten $\Delta B/\Delta t$ als Änderungsrate R.</p> $R = \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t}$ <p>Verkleinert man das Intervall t immer mehr kommt man zur 1. Ableitung der Funktion $B(t)$ und kann sagen: Die Änderungsrate ist der Tangentenanstieg der Funktion $B(t)$ im Punkt t. Änderungsrate sind auf ein bestimmtes Zeitintervall festgelegt, man kann sie beim Verdoppeln oder Halbieren des Zeitintervalls nicht ebenfalls verdoppelt werden.</p>	

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Lineares Wachstum

Lineares Wachstum

Das lineare Wachstum stellt noch keine wirkliche Neuerung dar. Es ist das gleiche wie eine lineare Zuordnung und besagt nichts weiter, als dass zwei Werte in einem proportionalen Verhältnis miteinander stehen. Ob es sich um Wachstum oder Abnahme handelt liegt an dem Vorzeichen des Steigungskoeffizienten der Geradengleichung.

Das lineare Wachstum ist gleichbleibend. Die Wachstumsrate pro Zeiteinheit ändert sich nicht, also bleibt die Änderungsrate konstant.

1. Dies verdeutlicht z.B. der Abbau von Alkohol im Blut. In einem bestimmten Zeitraum wird ein Teil des Alkohols im Blut abgebaut. Mit Hilfe des linearen Wachstums kann die Polizei also feststellen, wie hoch der Blutalkoholspiegel zur Zeit des Unfalls war.
2. Auch beim Auffüllen von Gefäßen oder einem Stausee kann das lineare Wachstum behilflich sein. Entscheidend ist, dass in der gleichen Zeiteinheit auch die gleiche Menge sich ändert.

- (a) Zum Anfangswert $B(0)$ kommt pro konstanter Einheit t der **konstante** Zuwachs k hinzu. Der Zuwachs $\Delta B = k$ bleibt immer gleich (konstant).
- (b) Als nächstes wird der Anfangsbestand mit dem Zuwachs addiert:
 $B(t) = B(0) + k \cdot t$ (k Änderungsrate)
Dadurch entsteht ein neuer Bestand $B(t)$.
- (c) Für den folgenden Zeitraum wird der neue Bestand $B(t)$ zum Anfangsbestand für den Zeitraum $t+1$. Nun wird zu $B(t)$ wieder der Zuwachs addiert und ein neuer Wert ermittelt: **$B(t+1) = B(t) + k$.**
- (d) Diese Rechnung kann man beliebig fortsetzen und erhält so die **Rekursionsgleichung:**

$$B(t + 1) = B(t) + k$$

- (e) Setzt man für $B(t)$ die Formeln mit $B(t-1)$, $B(t-2)$,... ein erhält man die **Funktionsgleichung:**

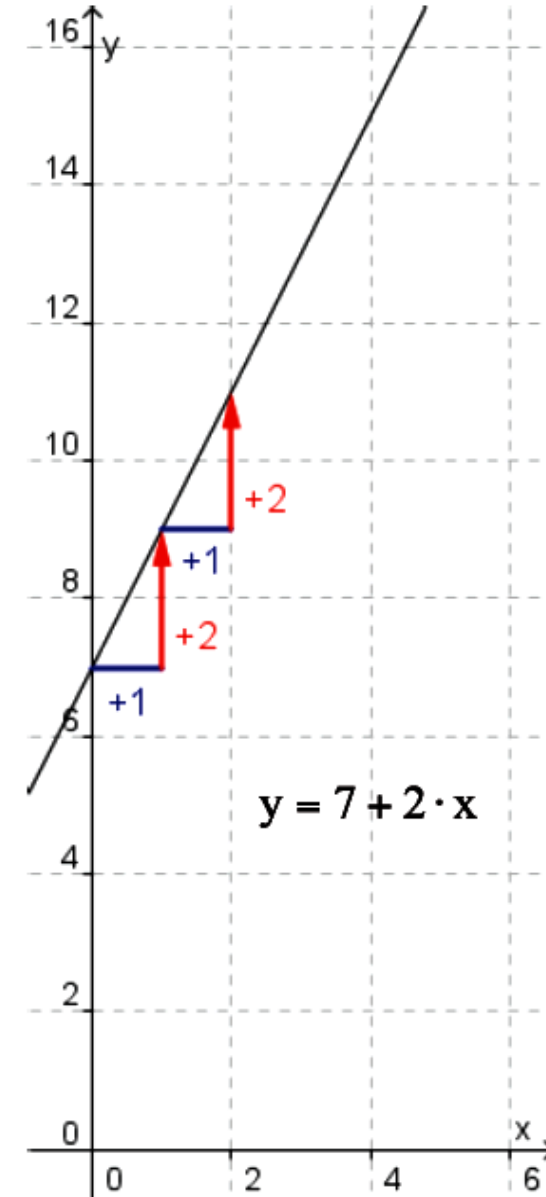
$$B(t) = k \cdot t + B(0)$$

die den aktuellen Bestand aus dem Anfangsbestand $B(0)$ bestimmt.

- (f) Häufig werden Wachstumsprozesse mit Differentialgleichungen beschrieben, weil sie kürzer und aussagefähiger sind. Für eine lineare Funktion würde diese Aussage lauten: Der Anstieg (=1. Ableitung) ist an jeder Stelle der Kurve konstant:

Differentialgleichung

$$B'(t) = k \quad k \text{ Änderungsrate}$$



Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele	
Lineares Wachstum	☆ Bestimmung des Koeffizienten k		
	Ein erstes und wichtiges Merkmal ist, dass der Koeffizient k eine Maßeinheit haben muß und diese Maßeinheit ein Maß pro Zeiteinheit darstellt. Meter pro Stunde, Liter pro Minute, m ³ pro 2 Tage.		Beim Füllen eines Beckens stellt ein Bademeister fest, daß nach 2 Stunden 14.000 L im Becken sind und nach 14 Stunden 50.000 L.
	In ein Wasserbecken, das bereits 10 Liter Wasser enthält, läuft gleichmäßig Wasser ein. Es ist bekannt, daß pro Minute 2 Liter zufließen.	$B(0) = 10 \text{ l}$ $k = 2 \text{ l/min}$	a) Ermittle die Zufußfunktion $V(t)$. b) Wieviel Wasser ist nach 10 Stunden im Becken ? c) Nach welcher Zeit ist das Becken voll, wenn es 104.000 L faßt ?
	Aus einem Rohr fließen pro Minute 5 Liter Wasser in ein Becken, das anfänglich noch mit 25 Litern gefüllt war.	$B(0) = 25 \text{ l}$ $k = 5 \text{ l/min}$	
a) Berechne die Wassermenge, die sich nach 1, 2, 3, 5, 10, 60 Minuten im Becken befinden. b) Wie lautet die Berechnungsformel für die Menge $m(t)$ in Litern, die sich zum Zeitpunkt t im Becken befindet ? c) Wann ist das 800 Liter fassende Becken voll ?	a) $t = 1, 2, 3, 4 \dots$ $B(t) = ?$ c) $B(t) = 800$ $t = ?$	$B(2) = 14.000 \text{ l}$ $B(14) = 50.000 \text{ l}$ $k = \frac{50.000 \text{ l} - 14.000 \text{ l}}{12 \text{ h}}$ $= 3.000 \text{ l/h}$ $B(t) = 104.000 \text{ l}$ $t = ?$	
Ein Becken wird so mit Wasser gefüllt, daß in 8 Minuten 50 Liter zufließen. Zwei Stunden nach Füllungsbeginn betrug der Beckeninhalte 900 Liter. Stelle die Wachstumsgleichung auf.	$B(0) = 0 \text{ l}$ $k = 50 \text{ l} / 8 \text{ min}$ $B(2\text{h}) = 900$	Aus einem Swimmingpool fließt Wasser aus. Es ist bekannt, daß die Füllmenge nach 40 Minuten noch 368 000 Liter und nach 3 Std. noch 256 000 Liter beträgt. Ermittle die zugehörige Abflußfunktion, die Füllmenge sowie die Dauer der Leerung.	
	ACHTUNG! Zur Berechnung sind Zeiteinheiten von 8 min zugrunde zu legen. Damit sind nach 2 Stunden 15 Zeiteinheiten vergangen und 120 min.	$B(40) = 368.000 \text{ l}$ $B(180) = 256.000 \text{ l}$ $k = \frac{256.000 \text{ l} - 368.000 \text{ l}}{140 \text{ min}}$ $= - 800 \text{ l/min}$ $B(0) = B(40) - k * 40$ $= 358.000 + 32.000$	
		Es geht um einen Abfluß, also muß k ein negativer Wert sein. Nimmt man konsequent den Wert zum späteren Zeitpunkt und subtrahiert den Wert vom früheren Zeitpunkt entsteht das Vorzeichen automatisch. Beim Rückrechnen auf den Zeitpunkt 0 muß man von einem beliebigen Zeitpunkt t subtrahieren, deshalb steht in der Formel $B(0) = B(40) - k*40$ ein Minuszeichen. Durch den negativen Wert von k wird aber schließlich addiert.	

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Lineares Wachstum	<p data-bbox="439 197 909 233">★ Lösung der Differenzialgleichung</p> <p data-bbox="398 264 831 300">$B'(t) = k$ k Änderungsrate</p> <p data-bbox="365 320 1279 467">Diese Differenzialgleichung hat die Form: $y' = k$. Aus der Differenzialrechnung ist bekannt, dass die erste Ableitung von $y = kx$ die obige Gleichung erfüllt. Außerdem ist bekannt, dass bei jeder Integration eine unbestimmte Konstante zu addieren ist. Also ist die Lösung der Differenzialgleichung:</p> <p data-bbox="398 491 600 523">$B(t) = k t + C$</p> <p data-bbox="371 560 1261 735">Da der Wert von k aus der Differenzialgleichung bekannt ist, ist der Wert für die Konstante C noch zu bestimmen. In diesem Zusammenhang spricht man bei Differenzialgleichungen von einem „Anfangswertproblem“. Es muß zu einem festen Zeitpunkt t (meist $t=0$) gegeben werden, welchen Funktionswert die ermittelte Funktion haben muss. Aus dieser Bedingung wird die Konstante C bestimmt.</p> <p data-bbox="371 756 1261 812">Für Wachstumsaufgaben ist es üblicherweise der bestand zum Beginn des Versuchs, also der Wert von $B(0)$, was dann zur endgültige Gleichung führt:</p> <p data-bbox="383 842 629 874">$B(t) = k t + B(0)$</p>	

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Exponentielles Wachstum

Exponentielles Wachstum

Anders als beim linearen Wachstum erfolgt der Zuwachs beim exponentiellen Wachstum nicht konstant, sondern proportional zum vorhandenen Bestand.

Hier ändert sich also die Wachstumsrate pro Zeiteinheit, indem sie mit dem vorhandenen Bestand multipliziert wird. Da manche Wachstumsvorgänge in der Natur so verlaufen, nennt man das exponentielle Wachstum auch natürliches Wachstum. Man kann damit aber nicht nur das Wachstum von Bakterien, Viren oder Tierarten ermitteln, sondern es dient z.B. auch zur Rechnung mit Zinseszinsen.

- (a) Beim exponentiellen Wachstum braucht man zunächst einmal einen **Anfangsbestand B(0)** und einen **Faktor q**.
- (b) Man benutzt hier verschiedene Größen, die genau auseinanderzuhalten sind. Zunächst kennt man die Größe **Wachstumsrate p**, die die Vermehrung des bisherigen Bestandes darstellt und nur die Änderung zwischen den einzelnen Zeitpunkten darstellt. Diese Wachstumsrate wird häufig in Prozent angegeben.

- (c) Anders als beim linearen Wachstum ändert sich hier der Zuwachs proportional zum aktuell vorhandenen Bestand B(t) und nicht unabhängig vom Bestand: $B(t+1) = B(t) + k B(t)$.
Dabei ist k der prozentuale Wert des Wachstumsrate p: $k = p/100$. Aus der vorherigen Gleichung folgt durch Umformung:

$$\begin{aligned} B(t+1) &= B(t) + k B(t) \\ &= B(t) + p/100 B(t) \\ &= B(t) (1 + p/100) B(t) \end{aligned}$$

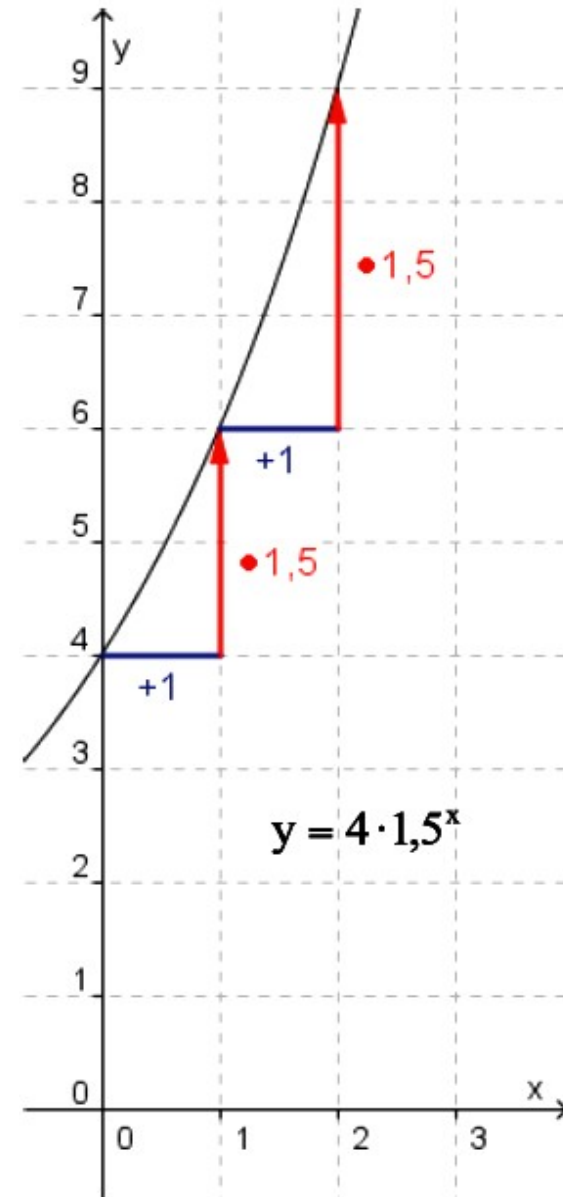
Somit erhält man als **Rekursionsgleichung**:

$$B(t+1) = q \cdot B(t)$$

Damit ergibt sich die Änderungsrate als:

$$R = p \cdot B(t)$$

- (d) Dabei ist der **Wachstumskoeffizienten q**, die nächste verwendete Größe, die sich aus $q = p\% + 1$ ergibt und zum neuen Gesamtbestand führt.

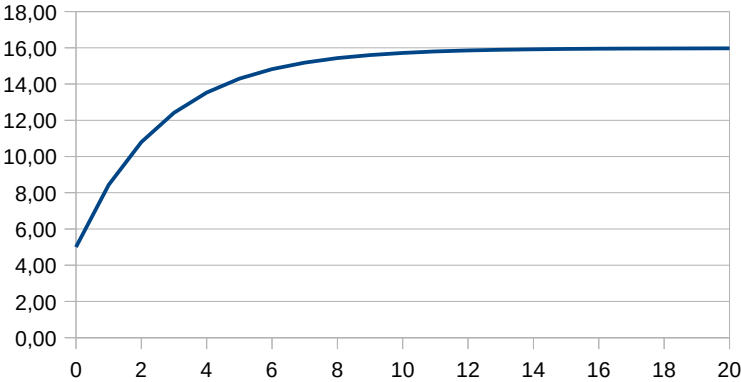


Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

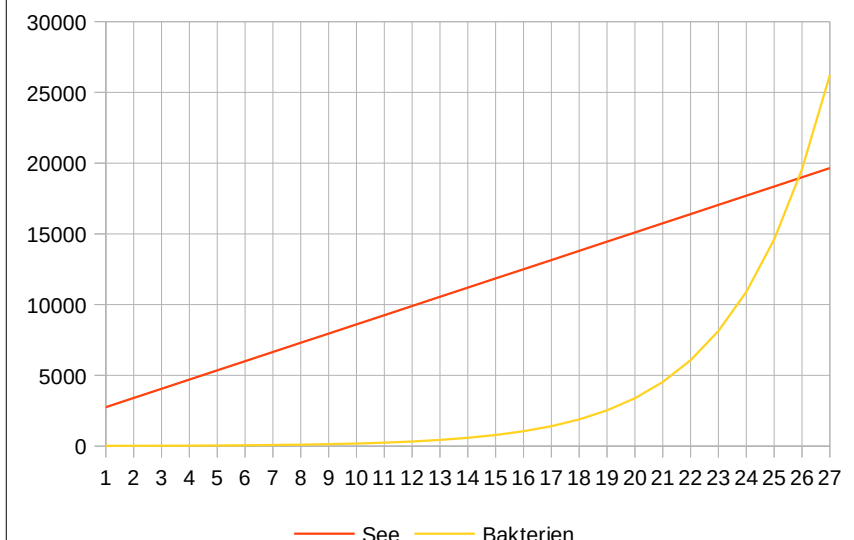
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Exponentielles Wachstum	<p>(e) Setzt man in die Rekursionsgleichung wieder Rückwärts die Formeln für $B(t-1)$; $B(t-2)$;... ein, ergibt sich:</p> $B(1) = q \cdot B(0)$ $B(2) = q \cdot B(1) = q^2 \cdot B(0)$ $B(3) = q \cdot B(2) = q^3 \cdot B(0)$ <p>und erhält die</p> <p>Funktionsgleichung: $B(t) = q^t \cdot B(0)$</p> <p>Ein solches Wachstum kann man auch mit Hilfe einer e Funktion beschreiben. Es gilt bekanntermaßen: $a = e^{\ln(a)}$ woraus folgt:</p> <div style="border: 2px solid blue; padding: 5px; display: inline-block; margin: 10px 0;"> $B(t) = q^t \cdot B(0) = e^{t \cdot \ln(q)} \cdot B(0)$ </div> <p>(f) Der Sachverhalt, dass sich die Änderungsrate proportional zum Bestand verhält ergibt als Differenzialgleichung</p> <div style="border: 2px solid green; padding: 5px; display: inline-block; margin: 10px 0;"> $B'(t) = \ln(q) B(t)$ </div>	$B(0) = \frac{B(t)}{q^t}$ $q = \sqrt[t]{\frac{B(t)}{B(0)}}$ $t = \frac{\lg\left(\frac{B(t)}{B(0)}\right)}{\lg(q)}$
	☆ Bestimmung des Koeffizienten q	
	<p>Der Wert q, der aus dem Wert p resultiert ist ein vom beschriebenen Wachstum abhängige Zahl und kann deshalb nur aus der Aufgabenstellung ermittelt werden.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ergibt sich für $q > 1$, dann handelt es sich um ein exponentielles Wachstum, • ist $0 < q < 1$ handelt es sich um eine exponentielle Abnahme oder exponentiellen Zerfall. 	
	☆ Lösung der Differenzialgleichung	
	<p style="text-align: center;">$B'(t) = \ln(q) B(t)$</p> <p>Diese Gleichung läßt sich durch $B(t)$ dividieren:</p> $\frac{B'(t)}{B(t)} = \ln(q)$ <p>Diese Gleichung ist nach t zu integrieren:</p> $\int \frac{B'(t)}{B(t)} dt = \int \ln(q) dt$ $\ln B(t) = t \ln(q) + C$	

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
<p>Exponentielles Wachstum</p>	<p>Durch exponieren folgt eine Auflöfung nach B(t).</p> <div style="border: 2px solid blue; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $B(t) = e^{t \cdot \ln(q)} \cdot e^c = q \cdot e^t \cdot B(0)$ </div> <p>Die Lösung des Anfangswertproblems (s. Lineares Wachstum) führt dazu, dass die Konstante e^c identisch mit dem Bestand zum Zeitpunkt 0 ist, da zum Zeitpunkt $t=0$ die e – Funktion den Wert 1 liefert.</p> <p>Charakteristisch für das exponentielle Wachstum ist die Eigenschaft, dass der Zuwachs immer proportional zur vorhandenen Population erfolgt. Mathematisch lässt sich dieses Wachstum auch als eine geometrische Reihe beschreiben, wenn es sich dabei um diskrete Schritte handelt oder durch eine Exponentialfunktion im kontinuierlichen Fall bzw. bei genügend großer Anzahl von Individuen. Der kontinuierliche Fall ist mathematisch einfacher zu handhaben als der diskrete Fall.</p> <p>Das mathematische Modell des exponentiellen Wachstums ist, wie die meisten Modelle, natürlich nur eine Idealisierung, die in dieser vereinfachten Art in der Natur so nicht verwirklicht ist. Exponentielles Wachstum setzt voraus, dass es keine Begrenzung durch Ressourcen und Raum gibt. Diese Forderung ist in der Natur natürlich im allgemeinen nicht erfüllt, zumindest nicht über längere Zeiträume hinweg. Wesentlich allerdings ist, dass jede Population das Potential für exponentielles Wachstum hat, daher ist dieses Modell auch so wichtig!</p> <p>Exponentielles Bevölkerungswachstum ist ein wichtiger Schlüsselfaktor in der Evolution, in dem es über die Selektion zu evolutionären Veränderungen kommt. Über kurze Zeiträume kann die Ressourcenfrage allerdings sehr wohl unerheblich sein und dann ist über diesen Abschnitt hinweg exponentielles Wachstum tatsächlich möglich. Das Wachstum von Bakterien, Insektenplagen (Heuschrecken), wucherndes Unkraut und nicht zuletzt das Bevölkerungswachstum von homo sapiens sapiens sind dafür beispielhaft.</p> <p>Bei ausreichendem Angebot an Raum und Nährstoffen vermehrt sich eine Pilzkultur stündlich um $p = 4\%$. In einem biologischen Labor gelangen versehentlich $Z(0) = 1000$ Zellen dieser Kultur in den Vorratsbehälter für die Nährstofflösung.</p> <p>a) Wie viele Zellen enthält die Kultur am nächsten Tag bzw. nach einer Woche um die gleiche Uhrzeit?</p> <p>b) Gib eine Formel an, mit der sich $Z(t)$ nach t Stunden berechnen lässt.</p> <p>c) Nach wie vielen Stunden hat sich der Bestand verdreifacht?</p> <p>d) Gib eine Formel an, mit der sich $Z(t')$ nach t' Minuten berechnen lässt.</p> <p>e) Gib eine Formel an, mit der sich $Z(t'')$ nach t'' Tagen berechnen lässt.</p>	<p>Für exponentielles Wachstum müssen folgende Modellannahmen erfüllt sein:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Abgeschlossene Population, kein Austausch mit anderen Populationen und keine Wanderungsbewegungen. 2. Konstante Geburten- und Sterberate, unbegrenzte Ressourcen. 3. Keine genetische Struktur. Die Nachkommen sind wie die Vorfahren, alle Individuen vermehren sich in der gleichen Weise. 4. Keine Altersstruktur und keine Größenstruktur. 5. Kontinuierliches Wachstum ohne Zeitlücken- aus einem Individuum geht in einer bestimmten Zeitspanne ein weiteres Individuum mit gleichen Eigenschaften hervor, aus diesem wiederum ein weiteres in einer ebenso langen Zeitspanne usw. <p>$q = 1 + p\% = 1,04$</p> <p>b) $Z(t)$ für Stunden: $Z(t) = 1000 \cdot 1,04^t$</p> <p>a) nach 24 Stunden: $Z(24) = 1000 \cdot 1,04^{24} = 1000 \cdot 2,563$ nach 1 Woche: $Z(24 \cdot 7) = 1000 \cdot 1,04^{168} = 1000 \cdot 727,1114$</p> <p>c) $Z(t) = 3000 = 1000 \cdot 1,04^t$</p> <p>$\frac{\log(B(t)/B(0))}{\log q} = \frac{\log(3.000/1.000)}{\log 1,04} = \frac{\lg 3}{\lg 1,04} = \frac{0,4771}{0,0170} = 28,06$ Stunden</p> <p>d) Es ist über die Wachstumsformel der Bestand nach einer Minute auszurechnen und daraus ein neues q zu bestimmen. $Z(1/60) = 1000 \cdot 1,04^{1/60} = 1000,6539$ $q = \frac{1000,6539}{1000} = 1,0006539$ (Benutze die obige Formel für $t=1$)</p> <p>e) Analog zu d) ein neues q zu bestimmen. $Z(24) = 1000 \cdot 1,04^{24} = 2563,304$ $q = \frac{2563,304}{1000} = 2,563304$</p>

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
<p>Exponentielles Wachstum</p>	<p>Überlagerung von exponentiellem und linearen Wachstum</p> $B(t + 1) = B(t) - \frac{p}{100} \cdot B(t) + B(0), \quad B(0) = d$ <p>Für die Grenze G gilt:</p> $G = B(t + 1) = B(t) \Rightarrow B(0) = \frac{p}{100} \cdot G$ $\Rightarrow G = B(0) / k$ <p>mit $k = \frac{p}{100}$</p> <p>Im Fall einer exponentiellen Abnahme liegt ein begrenztes Wachstum vor, da der Ausdruck $q < 1$:</p> $B(0) = B(0);$ $B(1) = B(0) \cdot q + B(0) = B(0) \cdot (1 + q)$ $B(2) = B(1) \cdot q + B(0) = (B(0) \cdot q + B(0)) \cdot q + B(0)$ $= B(0) \cdot (1 + q + q^2)$ $B(3) = B(2) \cdot q + B(0) = (B(0) \cdot (1 + q + q^2)) \cdot q + B(0)$ $= B(0) \cdot (1 + q + q^2 + q^3)$ <p>Es entsteht eine geometrische Reihe, mit deren Summenformel man auf folgende Gleichung kommt:</p> $B(t) = B(0) \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ <p>oder als Rekursionsformel (s. oben):</p> $B(t + 1) = q \cdot B(t) + B(0)$ <p>Überlagerung einer linearen Zunahme mit einer exponentiellen Zunahme</p> <p>Ratensparen mit einer zusätzlichen jährlichen festen Einzahlung entsprechen dem Modell einer linearen mit einer exponentiellen Zunahme. Als Kurve kommt eine stärker wachsende Exponentialfunktion heraus, die nach oben keine Grenze hat.</p>	<p>Eine Forschungsanstalt führt einen Versuch auf einem Feld aus. Auf den Acker werden wöchentlich 5 kg eines Unkrautvertilgungsmittel ausgestreut. Der Bestand nimmt wöchentlich um 31,3 % ab. Nach wieviel Wochen gibt es 15 kg des Unkrautvertilgungsmittel auf diesem Feld ?</p> <p>Teil 1 Geometrische Abnahme: $B_1(t) = q^t \cdot B_1(0)$ mit $q = 1 - p\% = 0,687$</p> <p>Teil 2 Lineares Wachstum: $B_2(t) = k \cdot t$ mit $k = 5\text{kg/Woche}$</p> <p>$B(0) = 5 \text{ kg}$ $B(1) = 0,687 \cdot 5\text{kg} + 5 \text{ kg} = 8,435$ $B(2) = 0,687 \cdot 8,435 \text{ kg} + 5 \text{ kg} = 10,79 \text{ kg}$ $B(3) = 0,687 \cdot 10,79 \text{ kg} + 5 \text{ kg} = 12,41 \text{ kg}$ $B(4) = 0,687 \cdot 12,41 \text{ kg} + 5 \text{ kg} = 13,53 \text{ kg}$ $B(5) = 0,687 \cdot 13,53 \text{ kg} + 5 \text{ kg} = 14,29 \text{ kg}$ $B(6) = 0,687 \cdot 14,29 \text{ kg} + 5 \text{ kg} = 14,82 \text{ kg}$ $B(7) = 0,687 \cdot 14,82 \text{ kg} + 5 \text{ kg} = 15,18 \text{ kg}$ $B(8) = 0,687 \cdot 15,18 \text{ kg} + 5 \text{ kg} = 15,43 \text{ kg}$ $B(9) = 0,687 \cdot 15,43 \text{ kg} + 5 \text{ kg} = 15,60 \text{ kg}$</p> $B(9) = 5 \cdot \frac{1 - 0,687^{10}}{1 - 0,687} = 5 \cdot \frac{0,97658}{0,313} = 5 \cdot 3,1200 = 15,60 \text{ kg}$ <p>Als Grenze ergibt sich in diesem Fall: $G = 5 / 0,313 = 15,9744 \text{ kg}$ Bei $t = 19$ ist der Wert 15,97 schon erreicht.</p> 

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele																																																																																				
<p>Exponentielles Wachstum</p>	<p>Ein Baggersee von derzeit 2750 m² Größe wird nach dem Plan der Baufirma pro Woche um 650 m² ausgebaut. Eine Algenart bedeckt 13 m² der Wasserfläche. Die mit Algen bedeckte Fläche wächst jede Woche auf das 1,34-fache.</p> <p>a) Fertige eine Wertetabelle an. Nach wie vielen Wochen ist die gesamte Fläche des Sees mit Algen bedeckt?</p> <p>b) Gib jeweils eine Funktionsgleichung und den Definitionsbereich an, und stelle beide Funktionen im selben Koordinatensystem dar (Skizze). Achte dabei auf geeignete Skalierungen.</p> <p>Wachstum des des Sees durch den Bagger linear, da jede Woche die gleiche Fläche dazukommt.</p> $F_{\text{SEE}} = 2750\text{m}^2 + 650\text{m}^2/\text{Woche} \cdot t$ <p>Das Wachstum der Bakterien ist exponentiell, da die Vermehrung vom Bestand abhängt.</p> $F_{\text{BAKTERIEN}} = 13\text{m}^2 \cdot 1,34^t$ <p>Es ist zu erkennen, dass die Algen den See nach 25 Tagen bedeckt haben. Es ist der Schnittpunkt der beiden Kurven zu bestimmen. Für diese Art Aufgaben (lineare Funktion mit Exponentialfunktion) gibt es keine Algorithmen. Man muß auf Näherungslösungen des GTR zurückgreifen, oder den Schnittpunkt graphisch bestimmen</p> <p>Auch hier handelt es sich um eine Überlagerung von Wachstumsprozessen, auch, wenn es sich um zwei verschiedene Stoffe handelt:</p> <p>Das Wachstum des Sees beeinflusst das Wachstum der Algen.</p>	 <table border="1" style="margin-top: 10px; width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>Woche</th> <th>See</th> <th>Bakterien</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>2750</td><td>13</td></tr> <tr><td>1</td><td>3400</td><td>17,42</td></tr> <tr><td>2</td><td>4050</td><td>23,34</td></tr> <tr><td>3</td><td>4700</td><td>31,28</td></tr> <tr><td>4</td><td>5350</td><td>41,91</td></tr> <tr><td>5</td><td>6000</td><td>56,17</td></tr> <tr><td>6</td><td>6650</td><td>75,26</td></tr> <tr><td>7</td><td>7300</td><td>100,85</td></tr> <tr><td>8</td><td>7950</td><td>135,14</td></tr> <tr><td>9</td><td>8600</td><td>181,09</td></tr> <tr><td>10</td><td>9250</td><td>242,66</td></tr> <tr><td>11</td><td>9900</td><td>325,16</td></tr> <tr><td>12</td><td>10550</td><td>435,71</td></tr> <tr><td>13</td><td>11200</td><td>583,86</td></tr> <tr><td>14</td><td>11850</td><td>782,37</td></tr> <tr><td>15</td><td>12500</td><td>1048,37</td></tr> <tr><td>16</td><td>13150</td><td>1404,82</td></tr> <tr><td>17</td><td>13800</td><td>1882,46</td></tr> <tr><td>18</td><td>14450</td><td>2522,49</td></tr> <tr><td>19</td><td>15100</td><td>3380,14</td></tr> <tr><td>20</td><td>15750</td><td>4529,39</td></tr> <tr><td>21</td><td>16400</td><td>6069,38</td></tr> <tr><td>22</td><td>17050</td><td>8132,97</td></tr> <tr><td>23</td><td>17700</td><td>10898,17</td></tr> <tr><td>24</td><td>18350</td><td>14603,55</td></tr> <tr><td>25</td><td>19000</td><td>19568,76</td></tr> <tr><td>26</td><td>19650</td><td>26222,14</td></tr> </tbody> </table>	Woche	See	Bakterien	0	2750	13	1	3400	17,42	2	4050	23,34	3	4700	31,28	4	5350	41,91	5	6000	56,17	6	6650	75,26	7	7300	100,85	8	7950	135,14	9	8600	181,09	10	9250	242,66	11	9900	325,16	12	10550	435,71	13	11200	583,86	14	11850	782,37	15	12500	1048,37	16	13150	1404,82	17	13800	1882,46	18	14450	2522,49	19	15100	3380,14	20	15750	4529,39	21	16400	6069,38	22	17050	8132,97	23	17700	10898,17	24	18350	14603,55	25	19000	19568,76	26	19650	26222,14
Woche	See	Bakterien																																																																																				
0	2750	13																																																																																				
1	3400	17,42																																																																																				
2	4050	23,34																																																																																				
3	4700	31,28																																																																																				
4	5350	41,91																																																																																				
5	6000	56,17																																																																																				
6	6650	75,26																																																																																				
7	7300	100,85																																																																																				
8	7950	135,14																																																																																				
9	8600	181,09																																																																																				
10	9250	242,66																																																																																				
11	9900	325,16																																																																																				
12	10550	435,71																																																																																				
13	11200	583,86																																																																																				
14	11850	782,37																																																																																				
15	12500	1048,37																																																																																				
16	13150	1404,82																																																																																				
17	13800	1882,46																																																																																				
18	14450	2522,49																																																																																				
19	15100	3380,14																																																																																				
20	15750	4529,39																																																																																				
21	16400	6069,38																																																																																				
22	17050	8132,97																																																																																				
23	17700	10898,17																																																																																				
24	18350	14603,55																																																																																				
25	19000	19568,76																																																																																				
26	19650	26222,14																																																																																				

© Dipl.-Math.
Armin Richter

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Beschränktes Wachstum

Beschränktes Wachstum

Anders als beim exponentiellen Wachstum ist beim begrenzten Wachstum der Zuwachs proportional zu einem Restbestand.

Dies ist die Differenz zwischen einem Zielwert (Grenze) und dem vorhandenem Bestand und wird auch „Sättigungsmanko“ genannt. Hier kann ein bestimmter Bestand nicht überschritten werden und es gibt eine Grenze, die der Graph der Funktion nicht übersteigen kann (Horizontale Asymptote).

Die Änderungsrate sinkt je weiter wir uns der Grenze nähern. Dieses Wachstum braucht man zum Beispiel, um den Verlauf bei Erwärmungsvorgängen nachzuvollziehen, da man eine bestimmte Temperatur nicht überschreiten kann. Ein Wachstum mit konstanter Wachstumsdifferenz heißt beschränktes Wachstum.

Anders als beim linearen und exponentiellen Wachstum braucht man

- einen Anfangsbestand $B(0)$
- einen Faktor k
- und eine Grenze G .

Diese wird durch den Prozess selbst bestimmt und kann, mathematisch gesehen, jeden beliebigen Wert annehmen. Um den Zuwachs zu ermitteln, bildet man zuerst die Differenz zwischen der Grenze und dem vorhandenem Bestand $B(t)$ und multipliziert dann mit dem Faktor k . $B(t+1)$ ist die Summe aus $B(t)$ und dem Zuwachs.

Rekursionsgleichung

$$B(t+1) = B(t) + k \cdot (G - B(t)) = (1 - k) \cdot B(t) + k \cdot G$$

Mit der Gegengröße $d(t) = G - B(t)$ Differenz zur Grenze, entsteht ein exponentielles Wachstum.

$$d(t) = G - B(t) \Leftrightarrow B(t) = G - d(t)$$

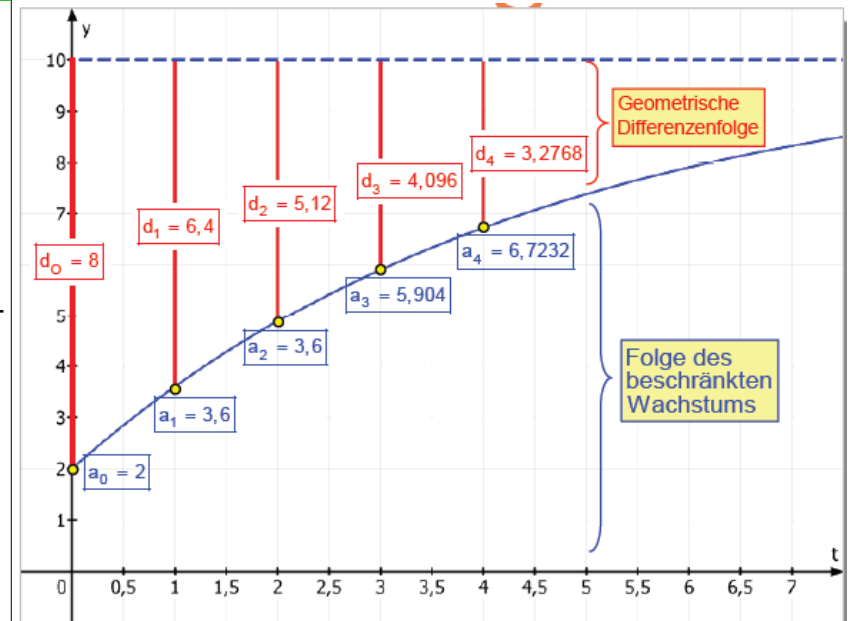
$$d(t+1) = G - B(t+1) = G - (1-k) \cdot B(t) - k \cdot G = (1-k) (G - B(t))$$

oder

$$d(t) = (1-k) \cdot d(t-1) \\ = (1-k)^2 \cdot d(t-2)$$

$$\dots \dots \dots \\ d(t) = (1-k)^t \cdot d(0)$$

Damit zeigt die Differenzfunktion $d(t)$ exponentielles Verhalten (Der neue Wert entsteht aus einem Faktor mit einem Exponenten und einem Grundwert).



Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

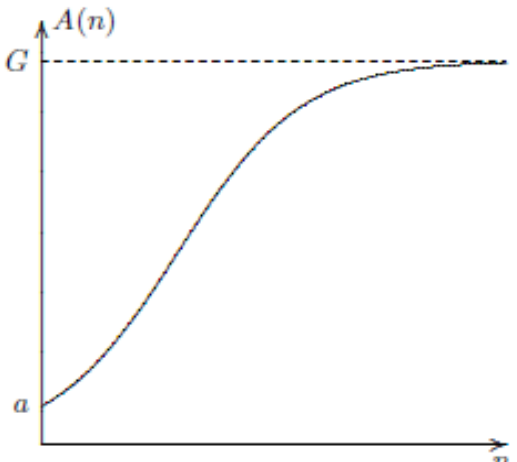
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
<p>Beschränktes Wachstum</p>	<p>Die Änderungsrate R bestimmt sich damit aus:</p> $R = k \cdot (G - B(t))$ <p>Unter Benutzung der Differenzfunktion und des dort erzeugten Exponentialausdrucks erhält man für die Bestandsentwicklung</p> $\begin{aligned} B(t) &= G - d(t) \\ &= G - (1-k)^t \cdot d(0) \\ &= G - (1-k)^t \cdot (G - B(0)) \end{aligned}$ <p>dabei ist zu berücksichtigen, dass bei einem exponentiellem Wachstum der konstante Faktor q in diesem Fall gleich $1 - k$ ist. Da andererseits $q = 1 + p\%$ oder $1 + p/100$ ist, folgt daraus, dass der Wert k des beschränkten Wachstums dem Wert p% oder</p> $-k = p / 100$ <p>Daraus folgt, dass k gleich dem Wachstum in Prozent entspricht. Dieser Zusammenhang wird zwar in manchen Aufgaben verlangt, ist aber nirgends klar ausgeführt!</p> <p>Das führt damit zu folgender Funktionsgleichung:</p> <div style="border: 2px solid blue; padding: 5px; display: inline-block;"> $B(t) = G - (1-k)^t \cdot (G - B(0)) = G - (G - B(0)) \cdot e^{t \cdot \ln(1-k)}$ </div> <p>Die Differenzialgleichung erhält man aus der Feststellung, dass die Zuwachsrate zum Zeitpunkt t proportional zur Differenz von der Grenze zum aktuellen Bestand ist.</p> <p>Differenzialgleichung:</p> <div style="border: 2px solid green; padding: 5px; display: inline-block;"> $B'(t) = - \ln(1-k) \cdot (G - B(t))$ </div>	<p>Nach dem Logarithmengesetz folgt aus:</p> $e^{t \cdot \ln(1-k)} = e^{\ln(1-k)^t} = (1 - k)^t$ $B'(t) = \ln(1-k) \cdot (1 - k)^t \cdot (G - B(0))$ $B(t) = G - (1 - k)^t \cdot (G - B(0))$ $- (1 - k)^t \cdot (G - B(0)) = G - B(t)$ $B'(t) = - \ln(1-k) \cdot (G - B(t))$ <p>Dieser Ausdruck entspricht der Änderungsrate, wenn man die Beziehungen zwischen den zwei unterschiedlichen k Werten berücksichtigt, wie sie anschließend ausgeführt sind.</p>
	<p>★ Bestimmung des Koeffizienten k</p>	
	<p>Der Koeffizient k, der Wert von B(0) und die Grenze G sind normalerweise durch das fachliche Problem begründet und <u>nicht</u> über mathematische Mittel zu bestimmen. Trotzdem tauchen in Schulbüchern Aufgaben auf, bei denen aus dem Bestand zu einem Zeitpunkt t_1 (meist wird dazu der Zeitpunkt $t=0$ benutzt) und einem Zeitpunkt t_2 (meist der Zeitpunkt $t=1$) der Wert des Parameters k zu berechnen ist. Dazu ist dann die Rekursionsformel</p> $B(t+1) = B(t) + k \cdot (G - B(t))$ <p>zu benutzen.</p>	<p>Bezeichnet man an dieser Stelle die Konstante der Differenzialgleichung sauber mit k', so kann man den Zusammenhang</p> $k' = - \ln(1-k)$ <p>herstellen.</p> <p>Andererseits kann man über eine Wertetabelle einfach zeigen, dass für kleine k die Werte für k und k' sich kaum unterscheiden. Für $k'=0,04$ beträgt die Differenz 0,0008 und für 0,09 noch 0,004, also ganze Zehnerpotenzen kleiner als der tatsächliche Wert.</p>

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Beschränktes Wachstum	★ Lösung der Differenzialgleichung	
	<p style="text-align: center;">$B'(t) = -\ln(1 - k) \cdot (G - B(t))$</p> <p>Eine relativ einleuchtende Methode diese Differenzialgleichung zu lösen, ist die Einführung einer neuen Funktion $h(t) = G - B(t)$, bei der für die erste Ableitung $h'(t) = -B'(t)$, so dass aus der obigen Differenzialgleichung entsteht:</p> <p style="text-align: center;">$-h'(t) = -\ln(1 - k) \cdot h(t)$</p> <p>Die Lösung der Differenzialgleichung erfolgt wie bei der Lösung exponentiellen Wachstums.</p> <p style="text-align: center;">$\ln h(t) = t \ln(1 - k) + C$</p> <p>Das Auflösen dieser Gleichung nach $h(t)$ führt zu:</p> <p style="text-align: center;">$h(t) = e^{t \ln(1 - k)} e^C$</p> <p>Jetzt erfolgt eine Rücksubstitution der Funktion $h(t)$</p> <p style="text-align: center;">$G - B(t) = (1 - k)^t \cdot e^C$</p> <p>Das Anfangswertproblem für $t = 0$ führt auf der linken Seite zu $G - B(0)$ und damit auf der rechten Seite zu $e^C = G - B(0)$. Beachtet man das Minuszeichen auf der rechten Seite folgt aus der obigen Funktion</p> <p style="text-align: center;">$B(t) = G - (1 - k)^t \cdot (G - B(0))$</p> <p><i>Bemerkung:</i> Das Einführung der neuen Funktion $h(x)$ ist keine undurchsichtige Trixerei, da im anderen Fall die Umstellung der Differenzialgleichung zu folgendem Ausdruck führt:</p> $\int \frac{B'(t)}{(G - B(t))} dt = - \int \ln(1 - k) dt$ <p>Das linke Integral ist auch nur über eine Substitutionsmethode lösbar, die darauf hinausläuft, dass die neue Funktion $h(t) = G - B(t)$ gesetzt werden muß.</p>	<p>Auflösen der Formel für $B(t)$ nach den einzelnen Formelbestandteilen: (Auf negative Vorzeichen im Exponenten der e-Funktion achten!)</p> $B(0) = \frac{B(t) - G}{(1 - k)^t} + G = (B(t) - G) e^{-t \ln(1 - k)} + G$ $k = \sqrt[t]{\frac{G - B(t)}{G - B(0)}} + 1$ $t = \frac{\lg \left(\frac{G - B(t)}{G - B(0)} \right)}{\lg(1 - k)} = \frac{\lg(G - B(t)) - \lg(G - B(0))}{\lg(1 - k)}$ <p>Zum Berechnen benutzt man den Logarithmus zur Basis 10 (Basisumrechnung), oder den natürlichen Logarithmus.</p> $t = \frac{\ln \left(\frac{G - B(t)}{G - B(0)} \right)}{\ln(1 - k)} = \frac{\ln(G - B(t)) - \ln(G - B(0))}{\ln(1 - k)}$ $G = \frac{B(t) - (1 - k)^t B(0)}{1 - (1 - k)^t} \quad \frac{B(t) - B(0) \cdot e^{t \cdot \ln(1 - k)}}{1 - e^{t \cdot \ln(1 - k)}}$

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Beschränktes Wachstum	★ Bestimmung des Koeffizienten k	
	<p>Eine Petrischale mit einer Gesamtfläche von 40 cm² ist zur Zeit t = 0 bereits zur Hälfte mit einer Pilzkultur bedeckt. Für das weitere Wachstum wurde experimentell die Formel $B(t + 1) = 0,75 \cdot B(t) + 10$ ermittelt. Dabei ist B(t) die nach t Tagen bedeckte Fläche in cm².</p> <p>a) Berechne B(t) für t = 1, 2, 3, 4 und 5 Tage. b) Zeige, dass es sich um beschränktes Wachstum handelt und gib die Sättigungsgrenze G sowie den Änderungsfaktor k an. Bringe dazu die ermittelte Gleichung auf die Form $B(t + 1) - B(t) = k [G - B(t)]$</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>B(0) = 20 cm² B(t+1) = (1 - k) B(t) + k G 1 - k = 0,75 ; k = 0,25; G = 10 : 0,25 = 40 cm²</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>a) B(1) = 40 - 20 · 0,75 = 25 B(2) = 40 - 20 · 0,75² = 28,75 B(3) = 40 - 20 · 0,75³ = 31,56 B(4) = 40 - 20 · 0,75⁴ = 33,67 B(5) = 40 - 20 · 0,75⁵ = 35,25</p> </div> </div> <p>B(t) = G - (G - B(0)) · (1 - k)^t = 40 - 20 · 0,75^t</p> <p>b) B(t+1) = 0,75 B(t) + 0,25 B(t) - 0,25B(t) + 10</p> <div style="text-align: center; margin-left: 100px;"> <p>damit 1 * B(t) entsteht</p> <p>B(t+1) - B(t) = 10 - 0,25 B(t) = 0,25 · (40 - B(t))</p> </div> <p>Einem Patienten werden 5 mg eines Medikamentes pro Minute per Tropfinfusion ins Blut geleitet. Von der im Blut vorhandenen Menge werden jede Minute 4 % über die Nieren wieder ausgeschieden.</p> <p>a) Berechne den Gehalt B(t) des Medikamentes im Blut für t = 1, 2, 3 und 4 Minuten. b) Zeige, dass es sich um beschränktes Wachstum handelt und gib die Sättigungsgrenze S sowie den Änderungsfaktor k an.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>B(0) = 5 mg k = p% k = 0,04 B(t+1) = 5 mg + 0,96 B(t)</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>B(1) = 5 mg + 0,96 · 5 mg B(1) = 9,8 mg</p> <p>B(t+1) - B(t) = k (G - B(t)) B(1) - B(0) = k (G - B(0)) 9,8 mg - 5,0 mg = 0,04(G - 5,0mg)</p> </div> </div> <p>B(t) = G - 0,96^t (G - B(0))</p> <p style="text-align: center;">G = $\frac{9,8 - 5,0}{0,04}$ mg + 5,0 mg = 125 mg</p>	<p>Exponentielle Abnahme und beschränktes Wachstum beim radioaktiven Zerfall) Radon-222 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 3,6 Tagen in das sehr viel stabilere Isotop Polonium-218 (t_{1/2} = 3 Mio Jahre).</p> <p>a) Gib die tägliche Zerfallsrate p in % an. b) Wie viele Polonium-Atome sind nach 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20 und 30 Tagen aus ursprünglich 1000 Radon-Atomen gebildet worden? c) Stelle ein Formel auf, mit der sich die Zahl B(t) der nach t Tagen gebildeten Polonium-Atome berechnen lässt. d) Beschreibe das Verhalten von B(t) für t und gib die Sättigungsgrenze G an. e) Zeige, dass der Zuwachs B(t+1) - B(t) proportional zum Sättigungsmanko S - B(t) ist und berechne die Wachstumskonstante k: $B(t + 1) - B(t) = k [S - B(t)]$.</p> <p>a) Man nimmt einen willkürlichen Anfangsbestand, z.B. 1000 Atome nach 3,6 Tagen sind es noch 500. (Halbwertszeit heißt, dass die Hälfte der Atome in dieser Zeit zerfallen sind).</p> <p style="text-align: center;">B(3,6) = 500 = B(0) · (1 - k)^{3,6} = 1000 · (1 - k)^{3,6}</p> <p style="text-align: center;">1 - k = $\sqrt[3,6]{\frac{500}{1000}}$ = $\left(\frac{500}{1000}\right)^{\frac{10}{36}}$ = 0,8247</p> <p style="text-align: center;">k = 0,1753</p> <p style="text-align: center;">k = $\frac{p}{100}$ p = - 17,53 %</p> <p>c) B(t) = 1000 · 0,8247^t</p> <p>b) B(1) = 1000 - 1000 · 0,8247 = 175 B(2) = 1000 - 1000 · 0,8247² = 319 B(3) = 1000 - 1000 · 0,8247³ = 439 B(4) = 1000 - 1000 · 0,8247⁴ = 537 B(5) = 1000 - 1000 · 0,8247⁵ = 618 B(10) = 1000 - 1000 · 0,8247¹⁰ = 854 B(20) = 1000 - 1000 · 0,8247²⁰ = 978 B(30) = 1000 - 1000 · 0,8247³⁰ = 996</p> <p>c) Sättigungsgrenze ist 1000, weil mit dieser Zahl gestartet wurde und alle Atome zerfallen können, da es keine Zeitbegrenzung gibt. d) k ist oben schon berechnet worden mit k = 0,1753</p>

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
<p>Logistisches Wachstum</p>	<p>Logistisches Wachstum <i>(Kein Abiturstoff)</i></p> <p>Das logistische Wachstum erfolgt proportional zu einem Restbestand (dies ist die Differenz zwischen einem Zielwert (Grenze) und dem vorhandenem Bestand: „Sättigungsmanko“) und proportional zum Ist-Bestand (B alt), d.h. zuerst hat man näherungsweise ein exponentielles Wachstum, dann aber verlangsamt sich das Wachstum und kommt langsam zum Erliegen.</p> <p>Ein Wachstum heißt logistisches Wachstum mit der Schranke G, wenn sich der Bestand B(t) nach t Zeitschritten im nächsten Zeitschritt um $k \cdot B(t) \cdot [G - B(t)]$ ändert, wenn also die Änderungsrate zum Produkt aus Bestand und Sättigungsmanko proportional ist.</p> <p>Die meisten Wachstumsvorgänge in der Natur verlaufen so, da zwar erst der Artenbestand wie beim exponentiellen Wachstum wächst, dann aber irgendwann nicht weiter wachsen kann, da es nicht genug Platz oder Futter gibt. Dieses Modell kommt der Realität also sehr nah, da es mehr Faktoren als das lineare, beschränkte oder exponentielle Wachstum berücksichtigt.</p> <p>Um mit dem logistischen Wachstum rechnen zu können, braucht man</p> <ul style="list-style-type: none"> • einen Anfangsbestand, • eine Zahl für den Faktor • und eine Grenze. <p>Der (Anfangs-) Bestand (B alt) ändert sich nach jeder Rechnung. Um den neuen Bestand (Bneu) zu errechnen, addiert man B alt mit dem Zuwachs.</p> <p>Da der Zuwachs sich aber bei jeder Rechnung ändert, muss man für ihn eine Formel aufstellen. Um den Zuwachs zu ermitteln, multipliziert man zuerst den Faktor mit dem vorhandenen Bestand (Anfangsbestand oder B alt). Dieses Produkt wird dann mit der Differenz von der Grenze und B alt multipliziert.</p> <p>Rekursionsgleichung</p> $ \begin{aligned} B(t + 1) &= B(t) + \frac{p}{100} \cdot B(t) \cdot \left(1 - \frac{B(t)}{G}\right) \\ &= B(t) + \frac{p}{100} \cdot B(t) \cdot \frac{G - B(t)}{G} \\ &= B(t) + \frac{p}{100 \cdot G} \cdot B(t) \cdot (G - B(t)) \\ &= B(t) + k \cdot B(t) \cdot (G - B(t)) \\ &= (1 + k \cdot G) \cdot B(t) - k \cdot B(t)^2 \end{aligned} $	

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Logistisches Wachstum	<p>Die Änderungsrate R bestimmt sich damit aus:</p> $R = k \cdot B(t) \cdot (G - B(t))$ <p>Funktionsgleichung:</p> <div style="border: 2px solid blue; padding: 10px; margin: 10px 0;"> $B(t) = \frac{G}{1 - \frac{G}{B(0) - 1} \cdot e^{-kGt}}$ <p style="text-align: center;">bzw. ohne Doppelbruch:</p> $B(t) = \frac{B(0) \cdot G}{B(0) + (G - B(0)) \cdot e^{-kGt}}$ </div> <p>Differentialgleichung</p> <div style="border: 2px solid green; padding: 5px; margin: 10px 0;"> $B'(t) = k \cdot B(t) \cdot (G - B(t))$ </div>	<p>Da die Grenze G im Exponenten der e-Funktion und im normalen Bruch auftaucht, kann dieser Wert nicht berechnet werden. (Mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln)</p> $k = - \frac{1}{G \cdot t} \ln \left(\frac{B(0)}{G - B(0)} \frac{G - B(t)}{B(t)} \right)$ $= - \frac{1}{G \cdot t} \ln \left(\frac{B(0)}{B(t)} \frac{G - B(t)}{G - B(0)} \right) \cdot e^{-kGt}$ $B(0) = \frac{G \cdot B(t)}{B(t) (e^{-kGt} - 1) + G}$
	<p>★ Bestimmung des Koeffizienten k</p>	
	<p>Zur Bestimmung des Koeffizienten k gilt das gleiche, was unter dem Kapitel „Beschränktes Wachstum“ steht.</p> <p>Wegen der nichttrivialen Funktionsgleichung für das logistische Wachstum wird im schulischen Bereich mit der Rekursionsformel gerechnet.</p> $B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (G - B(t))$ <p>womit sich Berechnung von k auf die Formel reduziert:</p> $k = \frac{B(t+1) - B(t)}{B(t) \cdot (G - B(t))}$ $G = B(t) + \frac{B(t+1) - B(t)}{k \cdot B(t)}$	<p>Es existieren besonders diese Varianten von Aufgaben, bei denen k und G gesucht sind. Nach dem mathematischen Grundsatz, dass mit einer Gleichung nur eine Variable zu bestimmen ist, werden in diesem Fall zwei Gleichungen benötigt, was bedeutet, es müssen entweder</p> <ul style="list-style-type: none"> • 3 zusammenhängende B(t): B(t), B(t+1) und B(t+2) oder • 4, wobei jeweils zwei sich nur um eine Zeiteinheit unterscheiden dürfen: B(t₁), B(t₁ + 1) und B(t₂), B(t₂ + 1) <p>damit entsteht ein lineares Gleichungssystem von zwei Variablen: k und G.</p> <p>Es wäre auch noch möglich grundsätzlich 2 Zeiteinheiten zu nehmen, aber es müssen in beiden Gleichungen die gleichen Zeiteinheiten sein.</p> <p>Beliebt ist auch folgende Aufgabenkombination: Es ist nur der Anfangswert B(0) bekannt, man geht davon aus, dass sich zu Beginn ein exponentielles Wachstum einstellt (was dem Kurvenverlauf entspricht) und gibt einen Wert k an, der einem exponentiellen Wachstum entspricht. Damit erreicht man einen Wert B(1). Dann ist unter Berücksichtigung einer Grenze ein neuer Wert k für ein logistisches Wachstum zu berechnen.</p>

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Logistisches Wachstum	☆ Lösung der Differenzialgleichung	Fortsetzung: mit der Lösung: $\frac{1}{G} \ln B(t) - \frac{1}{G} \ln G - B(t) = k t + C$ Bringt man G auf die rechte Seite und wendet auf der linken Seite das Logarithmengesetz an, erhält man folgende Gleichung: $\ln \frac{B(t)}{G - B(t)} = G k t + G C$ Um nach B(t) auflösen zu können muss die Gleichung exponiert werden: $\frac{B(t)}{G - B(t)} = e^{Gkt} * e^{GC}$ $B(t) = (G - B(t)) * e^{Gkt} * C1$ $B(t) (1 + e^{Gkt} * C1) = G * e^{Gkt} * C1$ $B(t) = \frac{G * e^{Gkt} * C1}{1 + e^{Gkt} * C1} = \frac{G}{1 + e^{Gkt} * C1}$ $B(t) = \frac{G}{1 + C2 e^{-Gkt}}$ Das Anfangswertproblem für die Funktion zum Zeitpunkt t=0 liefert: $B(0) = \frac{G}{1 + C2} \quad \text{oder} \quad C2 = \frac{G - B(0)}{B(0)}$ das führt zur endgültigen Funktion: $B(t) = \frac{G}{1 + \frac{G - B(0)}{B(0)} e^{-Gkt}} = \frac{B(0) * G}{B(0) + (G - B(0)) e^{-Gkt}}$ Dieses Ergebnis entspricht dem auf der zweiten Seite zum Thema „Logistisches Wachstum“
	<p style="text-align: center;">ACHTUNG! Hier wird es richtig hart .</p> $B'(t) = k * B(t) * (G - B(t))$ <p>Die Umstellung der Differenzialgleichung führt zu folgendem Ausdruck:</p> $\frac{B'(t)}{B(t) * (G - B(t))} = k$ <p>Um das linke Integral lösen zu können benötigt man die Partialbruchzerlegung. Man betrachtet zunächst nur den Nenner und setzt den Zähler erst mal auf 1. Wenn man die beiden Partialbrüche erstellt hat, wird jeder einzelne mit dem Faktor B'(t) multipliziert.</p> $\frac{1}{B(t) * (G - B(t))} = \frac{A}{B(t)} + \frac{B}{G - B(t)}$ <p>Durch Hauptnennerbildung auf der rechten Seite erhält man folgenden Ausdruck:</p> $\frac{A * G - A * B(t) + B * B(t)}{B(t) * (G - B(t))} = \frac{A * G + (B - A) * B(t)}{B(t) * (G - B(t))}$ <p>Durch Vergleich der Zähler erhält man (bei Partialbruchzerlegung übliches Vorgehen):</p> $A * G + (B - A) * B(t) = 1$ <p>Was dazu führt: $\frac{A * G}{B - A} = \frac{1}{0}$ oder $\frac{A}{B} = \frac{1}{G}$</p> $= B'(t) \frac{1}{G * B(t)} + B'(t) \frac{1}{G(G - B(t))}$ $= \frac{1}{G} \int \frac{B'(t)}{B(t)} dt - \frac{1}{G} \int \frac{-B'(t)}{G - B(t)} dt$ $\frac{1}{G} \int \frac{B'(t)}{B(t)} dt - \frac{1}{G} \int \frac{-B'(t)}{G - B(t)} dt = \int k dt \Rightarrow$	

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Logistisches Wachstum	<p><i>Die folgenden Aussagen sind primär auf Bevölkerungswachstum bezogen, lassen sich aber auch für andere Wachstumsarten anwenden.</i></p> <p>Das Modell des exponentiellen Wachstums berücksichtigt nicht die Rückkopplung auf das weitere Wachstum, wie es aber in der Natur praktisch überall der Fall ist. In der Ökologie gab es zu dieser Frage zwei Denkschulen:</p> <p>Eine Schule propagierte im Prinzip ein exponentielles Wachstumsmodell, das in mehr oder weniger unregelmäßigen Abständen immer wieder durch katastrophale Ereignisse abrupt beendet wird. Nach dem erfolgten Massensterben beginnt dann ein erneuter Zyklus mit exponentiellem Wachstum. Wesentlich in dieser Vorstellung ist, dass der Auslöser des katastrophalen Ereignisses, das zum Ende des exponentiellen Wachstums führt, von der Populationsdichte unabhängig ist. Es gibt also keine Rückkoppelung.</p> <p>Die zweite, inzwischen allgemein akzeptierte, Denkschule sieht in der zunehmenden Populationsdichte eine negative Rückkoppelung auf die Wachstumsrate durch Reduzierung der Geburtenrate oder Erhöhung der Sterberate oder eine Kombination davon.</p> <p>Annahmen für logistisches Wachstum:</p> <ol style="list-style-type: none">(1) Abgeschlossene Population, kein Austausch mit anderen Populationen und keine Wanderungsbewegungen.(2) Keine genetische Struktur. Die Nachkommen sind wie die Vorfahren, alle Individuen vermehren sich in der gleichen Weise.(3) Keine Altersstruktur und keine Größenstruktur.(4) Kontinuierliches Wachstum ohne Zeitlücken- aus einem Individuum geht in einer bestimmten Zeitspanne ein weiteres Individuum mit gleichen Eigenschaften hervor, aus diesem wiederum ein weiteres in einer ebenso langen Zeitspanne usw.(5) Konstante Umweltkapazität (Carrying capacity). Die Verfügbarkeit der Ressourcen ist zeitlich konstant.(6) Lineare Dichteabhängigkeit: Die Wachstumsrate nimmt linear mit der Dichte (Anzahl der Individuen) ab	

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
<p>Logistisches Wachstum</p>	<p>Im Jahre 1705 wurden 5 Hasen auf einer Pazifikinsel ausgesetzt, um die Frischfleischversorgung bei künftigen Besuchen zu sichern. Ein Jahr später wurden bereits 12 Hasen gesichtet.</p> <p>(a) Bestimme die jährliche Zuwachsrate in %.</p> <p>(b) Wie viele Hasen wären bei der Annahme exponentiellen Wachstums im Jahre 1711 auf der Insel zu erwarten?</p> <p>(c) Nach jeweils wie vielen Monaten verdoppelt sich der Bestand unter der Annahme exponentiellen Wachstums?</p> <p>(d) Tatsächlich wurden auch Jahrzehnte nach der Aussetzung niemals mehr als 100 Hasen auf der Insel gezählt. Setze logistisches Wachstum an und berechne den Änderungsfaktor k auf 4 Nachkommastellen genau.</p> <p>(e) Wie viele Hasen wären im Jahr 1711 auf der Insel zu erwarten, wenn man den Ansatz für logistisches Wachstum verwendet?</p> <p>(f) Begründe den Ansatz für logistisches Wachstum anhand der Lebensumstände einer Hasenpopulation auf einer einsamen Insel: Warum ist der Zuwachs proportional zum Bestand? Warum ist der Zuwachs aber auch proportional zum Sättigungsmanko?</p> <p>(a) $B(0) = 5$; $B(1) = 12$; Als exponentielles Wachstum: $B(1) = q \cdot B(0)$ mit $q = (1 + \frac{p}{100})$ $q = B(1) / B(0) = 12 / 5 = 2,4 \Rightarrow p = 1,4 = 140 \%$</p> <p>(b) $B(0) = 5$; $t = 6 \Rightarrow B(6) = 5 \cdot 2,4^6 = 955$ Hasen</p> <p>(c) $B(t) = 2 B(0) = q^t \cdot B(0) = 2,4^t \cdot 5$ $t = \frac{\lg(2 \cdot 5 / 5)}{\lg(2,4)} = 0,8$ Jahre</p> <p>(d) $G = 100$</p> <p>Berechnung des Wertes für k mittels Rekursionsformel: $k = \frac{B(t+1) - B(t)}{B(t) \cdot (G - B(t))} = \frac{B(1) - B(0)}{B(0) \cdot (G - B(0))} = \frac{12 - 5}{5 \cdot (100 - 5)} = 0,0147$</p>	<p>Berechnung des Wertes für k mittels Funktionsgleichung: $k^{\wedge} = -\frac{1}{G \cdot t} \ln \left(\frac{B(0)}{G - B(0)} \cdot \frac{G - B(t)}{B(t)} \right)$ $= \frac{1}{100 \cdot 1} \ln \left(\frac{5}{100 - 5} \cdot \frac{100 - 12}{12} \right)$ $0,01 \ln (0,0526 \cdot 7,33) = 0,01 \cdot \ln (0,3857) = 0,009526$</p> <p>(e) $t = 6$ Rekursionsformel mit $k = 0,0147$ $B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (G - B(t))$ $B(1) = B(0) + 0,0147 B(0) (G - B(0)) = 5 + 0,0147 \cdot 5 \cdot 95 = 11,98$ $B(2) = B(1) + 0,0147 B(1) (G - B(1)) = 11,98 + 0,0147 \cdot 11,98 \cdot 88,02 = 27,48$ $B(3) = B(2) + 0,0147 B(2) (G - B(2)) = 27,48 + 0,0147 \cdot 27,48 \cdot 72,52 = 56,77$ $B(4) = B(3) + 0,0147 B(3) (G - B(3)) = 56,77 + 0,0147 \cdot 56,77 \cdot 46,23 = 95,34$ $B(5) = B(4) + 0,0147 B(4) (G - B(4)) = 95,34 + 0,0147 \cdot 95,34 \cdot 4,66 = 101,87$ $B(6) = B(5) + 0,0147 B(5) (G - B(5)) = 101,87 + 0,0147 \cdot 101,87 \cdot (-1,87) = 99,06$</p> <p>Berechnung mittels Funktionsformel $B(t) = \frac{B(0) \cdot G}{B(0) + (G - B(0)) \cdot e^{-k \cdot G \cdot t}}$ $= \frac{5 \cdot 100}{5 + (100 - 5) \cdot e^{-0,009526 \cdot 100 \cdot 6}} = \frac{500}{5 + 95 \cdot 0,00329}$ $= \frac{500}{5 + 0,3125} = \frac{500}{5,3125} = 94,11$</p> <p>Am Beispiel der Rekursionsformel zeigt sich die Fragwürdigkeit dieser Methode, das k zu berechnen, da der Bestand sogar über 100 steigt. Rechnet man den Wert k^{\wedge} um auf den Wert k ($k^{\wedge} = -\ln(1-k)$) so erhält man für k den Wert 0,0094. Rechnet man mit diesem Wert die Rekursionsformeln durch erhält man bessere Werte, die auch nicht die 100 übersteigen.</p>

© Dipl.-Math.
Armin Richter