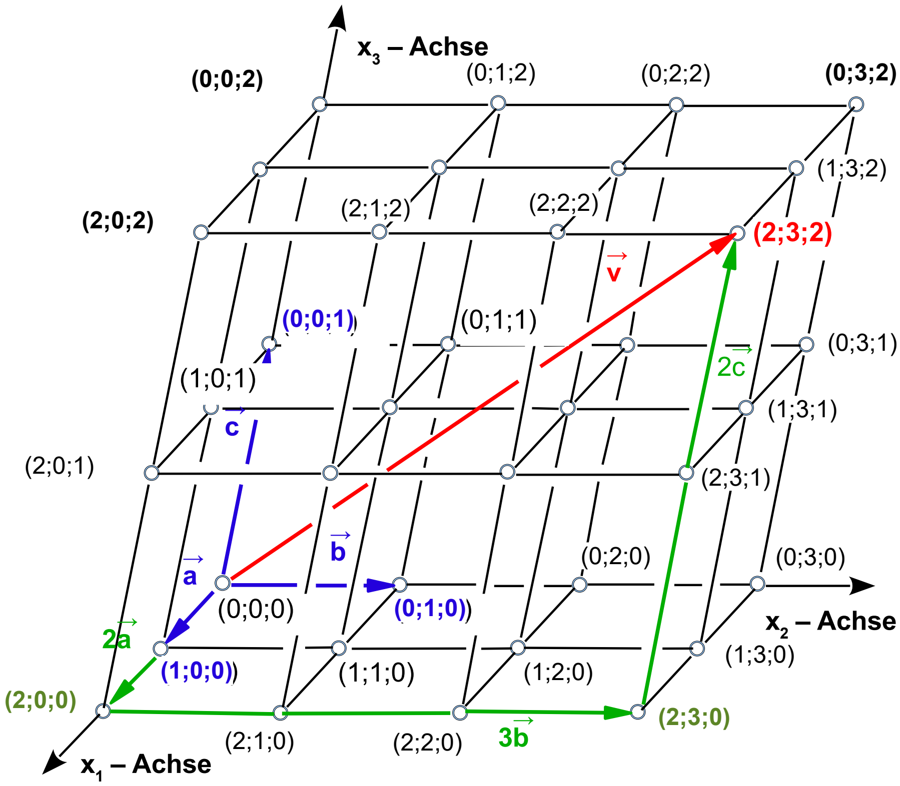
1. Grundlagen zu Vektoren

Um Punkte im Raum angeben zu können, führt man ein räumliches Koordinatensystem ein.
In der Regel zeichnet man die x_1 – Achse nach vorne, die x_2 – Achse nach rechts und die x_3 – Achse nach oben. (Es liegt damit ein rechts drehendes System vor).



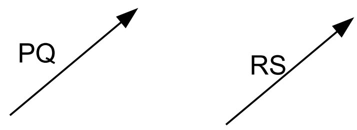
1.1. Definition eines Vektors

Definition: (Pfeil)

1. Jedes geordnete Paar (P|Q) zweier Punkte P und Q beschreibt einen **Pfeil** PQ. P ist der **Anfangspunkt,** Q der **Endpunkt** des Pfeils.

2. Zwei Pfeile PQ und RS heißen **parallel** , wenn folgendes gilt:

   a. PQ || RS Die **(Träger-)Geraden**, auf denen die Vektoren liegen sind parallel.
   b. Sie haben die gleiche **Richtung**
   c. $\overline{PQ} = \overline{RS}$ Sie haben die gleiche **Länge**

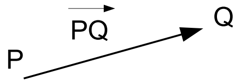


3. Die Menge aller zu PQ paralleler Pfeile heißt **Vektor** PQ. Jeder einzelne Pfeil aus der Menge heißt **Repräsentant des Vektors.**

Bemerkungen

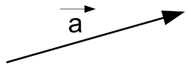
(1) Zeichnen kann man immer nur einen Repräsentanten, nie einen Vektor.
(2) Nicht immer unterscheidet man streng zwischen einem Vektor und seinem Repräsentanten.

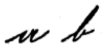
Schreibweisen



(1) $\overrightarrow{PQ}$ Anfangs– und Endpunkt mit einem Pfeil darüber.

(2) $\vec{a}$ Kleinbuchstabe mit einem Pfeil darüber, wenn es sich um einen allgemeinen Vektor handelt, der keinen besonderen Anfangs- und Endpunkt hat.



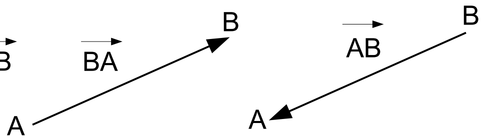
(3)  in alt-deutscher Schrift (Süterlin)

Definition: (Vektor) Vektoren sind Klassen von Pfeilen. Jeder Vektor hat

- eine Länge,
- eine Richtung und
- eine Orientierung.

Definition: (Gegenvektor)

$\overrightarrow{BA}$ ist der **Gegenvektor** zu $\overrightarrow{AB}$. Man schreibt: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$



*Der Gegenvektor hat die **gleiche Richtung**, aber die **entgegengesetzte Orientierung**. Das wird in der Schule meist nicht so scharf unterschieden und als entgegengesetzte Richtung bezeichnet.*

Definition: (Nullvektor)

Der Vektor mit der Länge 0 heißt **Nullvektor** $\vec{0}$.

Geometrisch ist der Nullvektor entweder der Koordinatenursprung oder das Ergebnis einer geschlossenen Vektorkette (siehe weiter hinten)

Definition: (Betrag eines Vektors)

Der Betrag eines Vektors ist die Länge des Vektors.

Definition: (Ortsvektor)

Der Vektor $\overrightarrow{OA}$, der den Ursprung O auf den Punkt A abbildet , heißt der **Ortsvektor** von A .

Oftmals wird aus Gründen der Ersparnis geschrieben: $\vec{a}$ statt $\overrightarrow{OA}$. Also: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$

Folgerungen: Der Punkt A und sein Ortsvektor OA haben die selben Koordinaten.

Man kann daher die Koordinaten eines Punktes bestimmen, indem man die Koordinaten seines Ortsvektors berechnet. Zu beachten ist aber, dass die Koordinaten eines <u>Punktes nebeneinander</u> und die <u>Koordinaten eines Vektors untereinander</u> aufgeschrieben werden. Man verwechsele nie die Objekte Punkt und Vektor.

Unter Einbeziehung der Ortsvektoren gilt also: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

Anmerkungen: Für den Nullvektor gilt: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.2. Addition und Subtraktion von Vektoren

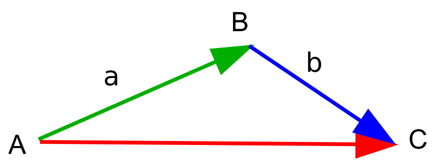
Die Vektoraddition wird dargestellt durch die Addition zweier Repräsentanten. Der Summenvektor beginnt am Fuß des ersten Vektors und endet an der Spitze des zweiten Vektors
(**Fuß – Spitze – Verbindung)**

Definition (Summe)

Sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

Dann heißt $\overrightarrow{AC}$ **Summe der Vektoren** $\vec{a}$ und $\vec{b}$

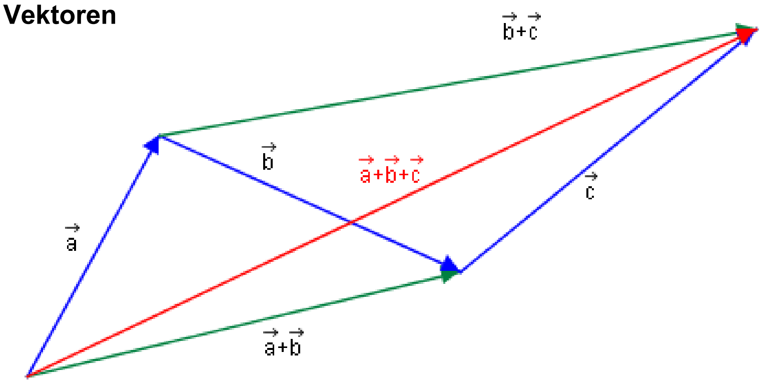
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



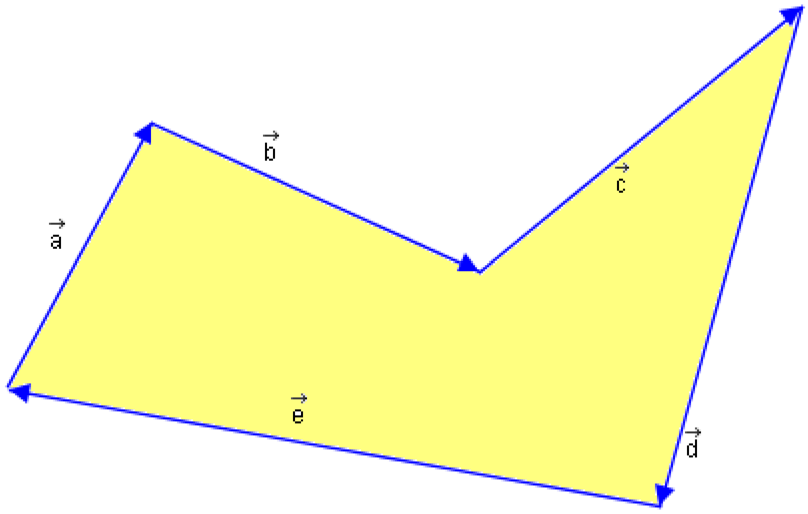
Satz: (Regeln für die Addition von Vektoren)

Vektoren werden zeichnerisch addiert, indem man sie aneinanderreiht.
Vektoren werden rechnerisch addiert, indem man sie koordinatenweise addiert.

Summe von mehr als zwei Vektoren



Summe von mehreren Vektoren : **Geschlossene Vektorkette**



$$a+b+c+d+e = 0$$

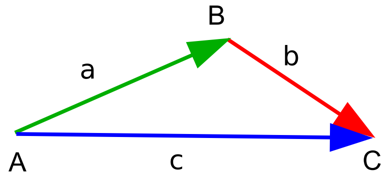
Durch das Aneinanderreihen von mehreren Vektoren entsteht eine Vektorkette. Das Ergebnis dieser Summenbildung ist ein Vektor, der vom Fußpunkt des ersten Vektors bis zur Spitze des letzten Vektor reicht. In diesem Zusammenhang besitzen geschlossene Vektorketten eine besondere Bedeutung. Am Ende einer geschlossenen Vektorkette ist man wieder am Fußpunkt des ersten Vektors angekommen. Das Ergebnis einer geschlossenen Vektorkette ist der Nullvektor.

Definition (Differenz)

Sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

Dann heißt $\overrightarrow{BC}$ **Differenz der Vektoren** $\vec{c}$ und $\vec{a}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$



Satz: (Regeln für die Subtraktion von Vektoren)

Vektoren werden zeichnerisch subtrahiert, indem man die beiden Spitzen verbindet
Vektoren werden rechnerisch subtrahiert, indem man koordinatenweise den Endpunkt minus dem Anfangspunkt bildet.

Definition: (Verbindungsvektor)

Zwei Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$ und $Q(q_1|q_2|q_3)$ legen einen Verbindungsvektor fest
Der Startpunkt dieses Vektors ist der Endpunkt vom Vektor P und der Zielpunkt ist der Endpunkt vom Vektor Q.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

Der Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten ist die Differenz der beiden Vektoren der Punkte.

1.3 Multiplikation eines Vektors mit einer skalaren Größe

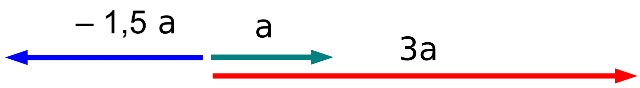
Mit Vektoren gibt es mehrere Produkte die definiert sind. Hier ist zunächst das Produkt eines Vektors mit einer skalaren Größe, damit ist eine reelle Zahl gemeint und kein Vektor.

$\mathbf{a} = k \cdot \mathbf{b}$

$\mathbf{a}$ hat k-fache Länge von $\mathbf{b}$

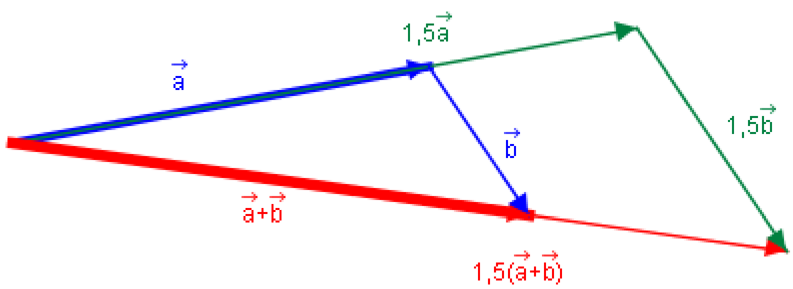
k > 0: gleichgerichtet

k < 0: entgegengesetzte Orientierung



Definition (Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar)

Ist $\mathbf{a}$ ein Vektor und $k \in \Re$, so versteht man unter $k \cdot \mathbf{a}$ einen zu $\mathbf{a}$ parallelen Vektor der |k|-fachen Länge von $\mathbf{a}$, der für $k > 0$ gleichsinnig, für $k < 0$ gegensinnig zu $\mathbf{a}$ orientiert ist ($0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$). Man nennt $k \cdot \mathbf{a}$ die S-Multiplikation.



Definition: (Vervielfachung von Vektoren)

Für einen Vektor $\vec{a}$ und eine reelle Zahl r ($\neq$0) ergibt die Vervielfachung von $\vec{a}$ mit r einen Vektor $r\,\vec{a}$ (lies: r-faches von a), der durch folgende Eigenschaften bestimmt ist:

Die Pfeile von $r\,\vec{a}$ sind parallel zu den Pfeilen von $\vec{a}$,

Für $r > 0$ sind die Pfeile von $r\,\vec{a}$ und $\vec{a}$ gleich gerichtet.

Für $r < 0$ sind die Pfeile von $r\,\vec{a}$ und $\vec{a}$ entgegengesetzt gerichtet,

die Länge der Pfeile von $r\,\vec{a}$ ist das |r|-fache der Länge der Pfeile von $\vec{a}$.

Für r = 0 ergibt sich für $r\,\vec{a}$ der Nullvektor.

Satz: (Rechenegeln für das Vervielfachen von Vektoren)

Ein in Koordinaten gegebener Vektor wird mit einer reellen Zahl r vervielfacht, indem man seine Koordinaten mit r multipliziert

Für das Vervielfachen von Vektoren gilt:

$r\,\vec{a} + r\,\vec{b} = r(\vec{a} + \vec{b})$ (Man kann r ausklammern)

$r\,\vec{a} + s\,\vec{b} = (r + s)\,\vec{a}$ (Man kann a ausklammern)

$r\,(s\vec{a}) = (r \cdot s)\,\vec{a}$ (Man kann Vervielfachungsfaktoren zusammenfassen)

1.4. Linearkombination

Definition: (Linearkombination)

Für k Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k$ und k reelle Zahlen $r_1, r_2, \ldots r_k$ nennt man

$$r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \ldots r_k\vec{a}_k$$

Eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k$

Bei einer Linearkombination werden mehrere Vektoren miteinander addiert, wobei jeder einzelne Vektor noch mit einer reellen Zahl gestreckt oder gestaucht werden kann. Bei einer Multiplikation mit einer negativen Zahl wird der Vektor dann subtrahiert, oder man addiert den Gegenvektor. Das **Ergebnis einer solchen Linearkombination ist ein Vektor**, der durch eine Vektorkette entstanden ist, die aber nicht unbedingt geschlossen sein muss.

1.5. Lineare Unabhängigkeit

Definition: (lineare Unabhängigkeit)

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k$ heißen **linear unabhängig** , wenn die Gleichung

$$r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \ldots r_k\vec{a}_k = 0$$

mit den Variablen $r_1, r_2, \ldots r_k$ nur für r_1=0, r_2=0 . . . r_k =0 erfüllt ist

andernfalls heißen die Vektoren **linear abhängig**

Satz: (Geometrische Interpretation)

1. Ist eine Menge von Vektoren **linear unabhängig**, dann lässt sich aus ihnen **<u>keine</u> geschlossene Vektorkette** erzeugen, damit lässt sich der Nullvektor nicht aus den gegebenen Vektoren bilden. (*Der Nullvektor lässt sich nur durch die **triviale Lösung**, dass alle r_i **gleichzeitig Null** sind, bilden.*)
2. Ist eine Menge von Vektoren **linear unabhängig**, dann lässt sich kein Vektor als Linearkombination der anderen darstellen.

1.6. Lineare Abhängigkeit

Definition: (lineare Abhängigkeit)

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k$ heißen **linear abhängig** , wenn sich ein Vektor der Menge als Lienar-kombination der anderen darstellen lässt:

$$r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + \ldots r_{k-1} \vec{a}_{k-1} = \vec{a}_k$$

mit den Variablen $r_1, r_2, \ldots r_{k-1}$ die nicht alle Null sein können.
andernfalls heißen die Vektoren **linear unabhängig.**

Satz: (Geometrische Interpretation)

1. Ist eine Menge von Vektoren linear abhängig, dann lässt sich aus ihnen <u>**eine**</u> **geschlossene Vektorkette** erzeugen, man kann den Nullvektor durch eine Linearkombination erzeugen, bei der **nicht alle r_i gleichzeitig Null sind** .
2. Ist eine Menge von Vektoren linear abhängig, dann lässt sich einer der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen.

Folgerungen:
(1) Ist einer der Vektoren der Nullvektor, so sind die Vektoren linear abhängig.
(2) Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn einer ein Vielfaches des anderen ist.
(3) Wenn sich ein Vektor als Linearkombination anderer Vektoren ausdrücken lässt, sind die Vektoren linear abhängig.
(4) Im zweidimensionalen Raum V^2 gibt es maximal zwei linear unabhängige Vektoren.
(5) Im dreidimensionalen Raum V^3 gibt es maximal drei linear unabhängige Vektoren.

Anmerkungen:

Die Anzahl der möglichen linear unabhängigen Vektoren ist identisch mit der Dimension des Raumes.

Um alle Vektoren eines Vektorraumes mit einer Menge von linear unabhängigen Vektoren darstellen zu können, benötigt man genau so viele linear unabhängige Vektoren, wie die Dimension des Vektorraumes angibt.d.h. : Um <u>alle</u> Vektoren des dreidimensionalen Raumes darstellen zu können benötigt man genau 3 linear unabhängige Vektoren.

Eine Menge linear unabhängiger Vektoren, mit denen man alle Vektoren des Raumes darstellen kann, nennt man **Basis**.

Für einen Vektorraum existieren unendlich viele Basissysteme.

Im zweidimensionalen Raum V^2 bilden zwei linear unabhängige Vektoren eine Basis dieses Raumes.

Die Standardbasis des V^2 lautet: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Im dreidimensionalen Raum V^3 bilden drei linear unabhängige Vektoren eine Basis dieses Raumes.

Die Standardbasis des V^3 lautet $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Komponenten eines Vektors beziehen sich immer auf eine konkrete Basis und sind keine Universalzahlen des Vektors. Üblicherweise wird mit der oben erwähnten Standardbasis gearbeitet. Konkrete Aufgabenstellungen machen einen Wechsel der Basis sinnvoll. Ein Wechsel von einer Basis zu einer anderen erfolgt über ein Gleichungssystem.
- die Spalten des Gleichungssystems sind die neuen Basisvektoren,
- die rechte Seite ist der Vektor, der in der neuen Basis dargestellt werden soll,
- die Lösung sind die Komponenten des Vektors der rechten Seite in der neuen Basis.

1.7. Die Basis eines Vektorraums

Definition
Jede Menge von Vektoren heißt **Basis** des Vektorraums, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- die Menge der Vektoren ist linear unabhängig
- Jeder Vektor des Vektorraums ist eine Linearkombination der Vektoren der Basis

Schlussfolgerungen

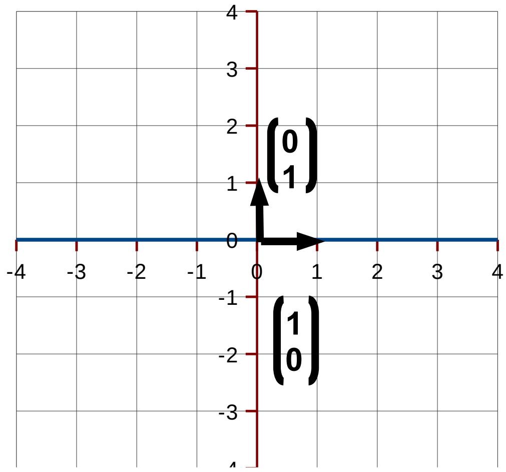
- Eine Basis kann nie mehr Vektoren enthalten, als die Dimension des Raumes angibt.
- Die Vektoren einer Basis müssen nicht senkrecht aufeinander stehen
- Die Länge der Basisvektoren muss nicht 1 sein.

Daraus lässt sich schließen, dass die Menge der Basisvektoren

- der 2-dimensionalen Zeichenebene nicht mehr als 2 sein können, damit diese linear unabhängig sind, dürfen sie nicht auf einer Geraden liegen (nicht kollinear sein)
- des 3-dimensionalen Raumes nicht mehr als 3 sein können, damit diese linear unabhängig sind, dürfen sie nicht in einer Ebene liegen (nicht komplanar sein).

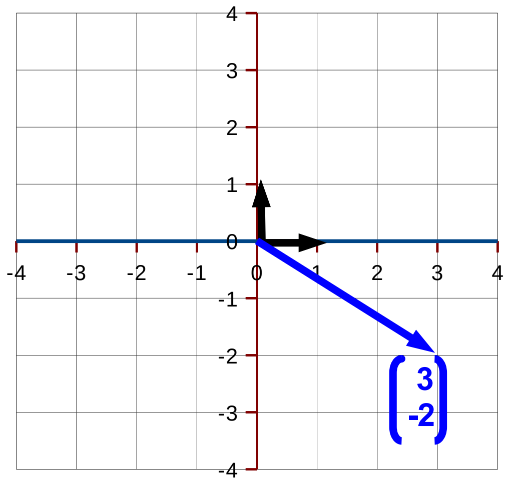
Betrachtungen im 2–dimensionalen Vektorraum

Da bereits aus anderen Gebieten das rechtwinklige Koordinatensystem bekannt ist, benutzt man für die Vektorrechnung häufig diese Form. Im Gegensatz zum Koordinatensystem werden die Achsen nicht einfach mit Zahlen, die die Einheit angeben gekennzeichnet, sondern man schreibt die Einheit einer Achse als 2-dimensionalen Vektor, bei dem die Komponenten, die die Achse angibt mit 1 gekennzeichnet wird und alle anderen Komponenten mit 0



Jeder Vektor der Ebene lässt sich aus diesen beiden Vektoren durch Linearkombination erzeugen. Da es sich um Basisvektoren der Länge 1 handelt, ist der notwendige Linearfaktor identisch mit der jeweiligen Komponente des Vektors:

$$\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$



Diesen Zusammenhang könnte man auch herstellen, indem man folgendes Gleichungssystem aufstellt:

$$\begin{aligned} 3 &= 1x - 0y \\ -2 &= 0x + 1y \end{aligned}$$

Die Lösungen x und y sind die gesuchten Linearfaktoren.

> Die Lösung eines Gleichungssystems sind die Komponenten des Vektors auf der rechten Seite unter Benutzung der Basisvektoren, die als Spalten in der Koeffizientenmatrix in Erscheinung treten.

1.8. Basis und Gleichungssystem

1.8.1. Der Schnittpunkt zweier geometrischer Räume

$3x + 2y = 7$ 1. Geradengleichung
$-1x + 3y = 5$ 2. Geradengleichung

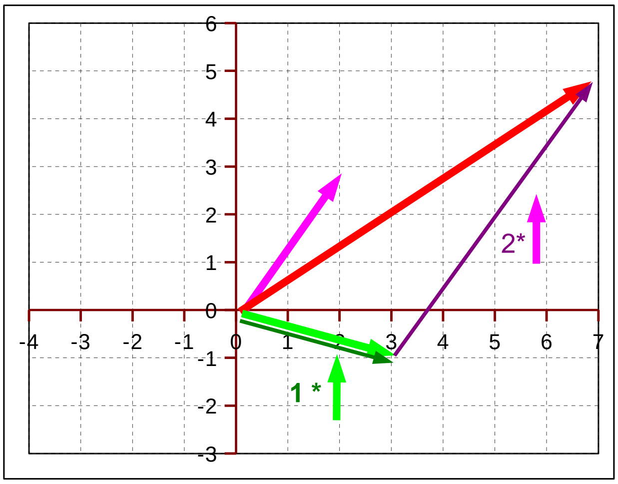
⇒ Die Lösung eines Linearen Gleichungssystems ist der Schnittpunkt der beiden Geraden.

1.8.2. Die Linearfaktoren einer Linearkombination

$$x\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$$

⇒ Die Lösung eines Linearen Gleichungssystems ist die Suche nach den Linearfaktoren, um aus vorgegebenen Vektoren einen Vektor als Linearkombination zu erzeugen.

Lösung:
$x = 1$
$y = 2$



1.8.3. Die Komponenten eines Vektors zu einer Basis

Die Vektoren und sind linear unabhängig

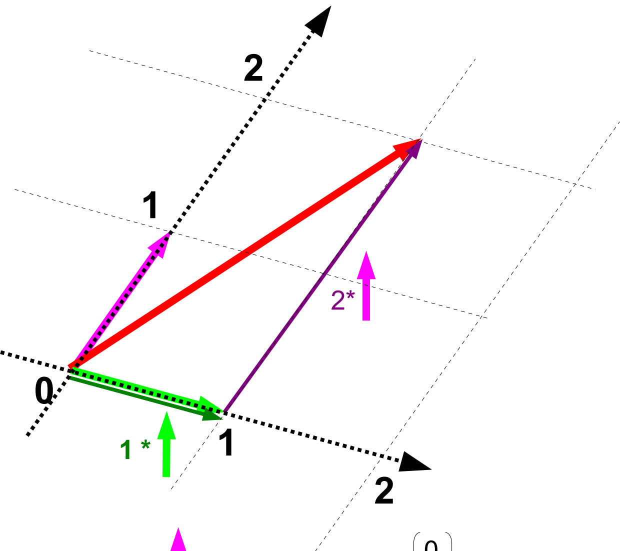
damit sind sie als Basis für den Vektorraum geeignet.

x + y =

Die Komponentendarstellung des Vektors

unter der Basis und ist: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

(Bei diesem Beispiel muss man sich von der Denkweise des üblichen rechtwinkligen Koordinatensystems lösen. Es gibt andere Basisvektoren, die ein anderes Koordinatensystem erzeugen. Es sind die Faktoren für diese Basis gesucht, die den roten Vektor erzeugen.)



In dieser Basis hat der Vektor die Komponenten $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und der Vektor die Komponenten $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

⇒ Die Lösung eines Linearen Gleichungssystems sind die einzelnen Komponenten die den Vektor der rechten Seite als Linearkombination der Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix darstellen.

$$x\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems: $x = 1$; $y = 2$
Der Vektor, der im rechtwinkligen Koordinatensystem die Komponenten $\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$ hat

bei Änderung der Basis auf $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ die Komponenten $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

1.9. Betrag und Einheitsvektor

Definition: (Betrag eines Vektors)

Unter dem **Betrag eines Vektors** $\vec{a}$ versteht man die Maßzahl der Länge seines Pfeils.
Der Betrag von $\vec{a}$ wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet

Folgerungen: $|\vec{a}| \geq 0$; nur der Nullvektor hat die Länge 0.

$|r\vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$

Einen Vektor mit der Länge 1 nennt man Einheitsvektor und schreibt $\vec{a}_0$.

Für $\vec{a} \neq \vec{0}$ gilt : $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Satz: (Berechnung des Betrags)

Für einen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ aus V^3 gilt $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Für Vektoren aus V^2 entsprechend $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Definition: (Einheitsvektor)

Ein Vektor der Länge 1 heißt Einheitsvektor

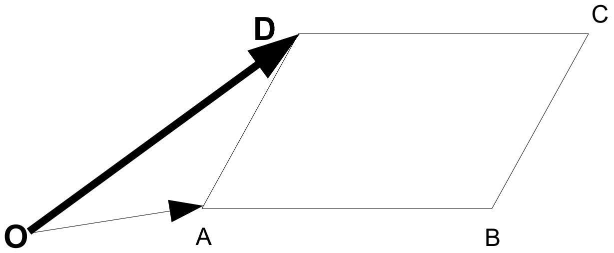
(Um aus einem Vektor einen Einheitsvektor zu erzeugen muss man jede seiner Komponenten durch den Betrag des Vektors dividieren. Die allgemein übliche Bezeichnung eines Einheitsvektor ist eine 0 als Exponent am Vektor: v^0)

$$v^0 = \begin{pmatrix} \dfrac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \\ \dfrac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \\ \dfrac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \end{pmatrix}$$

1.10. Berechnen besonderer Punkte

Was bei solchen Aufgaben gesucht wird, ist immer der **Ortsvektor** zu einem Punkt.

(1) Fehlender Punkt eines Parallelogramms



Gegeben sind die Punkte
A (2/-1/4) , B(8/3/6) und C(10/7/9)

Bestimme D so, dass das entstehende Viereck ein Parallelogramm ist.

Lösungsansatz: Wie kann man den gesuchten Vektor mit Hilfe bekannte Vektoren ausdrücken ?

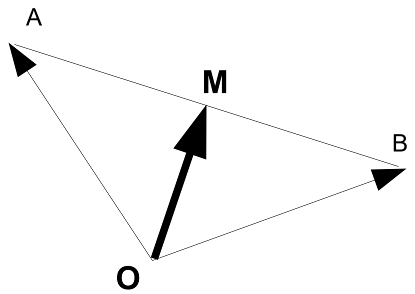
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$$

Der Vektor $\overrightarrow{OA}$ ist als Ortsvektor bekannt, aber nicht $\overrightarrow{AD}$.

Wegen Parallelogramm ist $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(2) Mittelpunkt zweier Punkte / Mittelpunkt einer Strecke



Berechne den Mittelpunkt M der Punkte A(2/-1/4) und B(8/3/6)

Lösungsansatz: Wie kann man den gesuchten Vektor mit Hilfe bekannte Vektoren ausdrücken ?

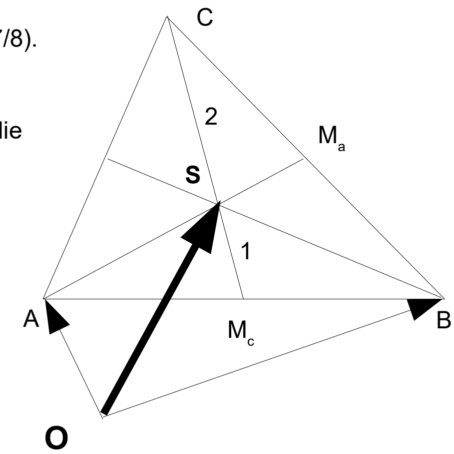
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Der Faktor ½ resultiert aus der Eigenschaft, dass der gesuchte Punkt Mittelpunkt sein soll.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(3) Mittelpunkt zweier Punkte / Mittelpunkt einer Strecke



Berechne den Schwerpunkt S eines Dreiecks A(8/1/7) und B(6/7/9) und C(– 5/7/8).

Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.
Wenn nur die Koordinaten des Schwerpunktes gefragt sind, kann man davon ausgehen, dass man das Teilverhältnis benutzen kann. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.

Lösungsansatz: Wie kann man den gesuchten Vektor mit Hilfe bekannte Vektoren ausdrücken ?

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{M_cC}$$

Die Gleichung $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS}$ macht natürlich nicht viel Sinn, da von AS nichts bekannt ist und auch erst wieder auf andere Vektoren umgerechnet werden muss

$$\overrightarrow{M_cC} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$$

$$OS = OA + \tfrac{1}{2}(OB - OA) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}(OB - OA) + OC - OB\right)$$

$$\overrightarrow{M_cC} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$$

(Prinzipiell wäre es möglich ab hier OS zu berechnen, da alle notwendigen Vektoren berechnet werden können. Im folgenden wird alles noch weiter runter auf die Ortsvektoren reduziert.)

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \tfrac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \tfrac{1}{6}\overrightarrow{OB} - \tfrac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OS} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Auf den detaillierten Rechenweg wird hier verzichtet.
Die Koordinaten des Schwerpunktes sind: $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

2. Das Skalarprodukt

Definition: (Skalarprodukt)

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gegebene Vektoren, so heißt $\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$

Skalarprodukt der Vektoren. Für Vektoren aus V2 entsprechend: $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Das Ergebnis des Skalarproduktes ist eine reelle Zahl.

Wenn man zwei Vektoren an einem gleichen Anfangspunkt beginnen lässt, dann bilden sie einen Winkel miteinander. Der Wert des Skalarproduktes kann dann auch mit Hilfe der Vektoren und dem Wert des eingeschlossenen Winkel ausgedrückt werden. So erhält man für das Skalarprodukt eine

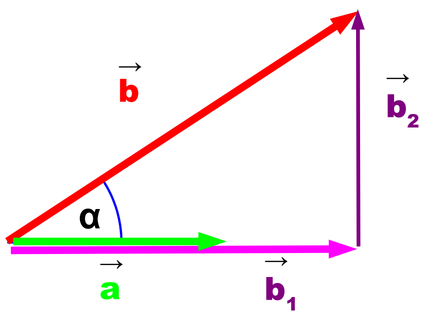
2. Definition: $\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\measuredangle\, \vec{a}, \vec{b})}$

In den meisten Fällen ist aber der Winkel zwischen den Vektoren nicht bekannt, sondern man benutzt die beiden Definitionen des Skalarprodukts, um den Winkel zwischen den Vektoren zu berechnen.

2.1. Rechenregeln für das Skalarprodukt

$\mathfrak{a} \odot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\odot\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\odot\mathfrak{c}$	Das Skalarprodukt ist distributiv
$\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \odot \mathfrak{a}$	Das Skalarprodukt ist kommutativ
$\mathfrak{a} \odot \mathfrak{a} = \|\mathfrak{a}\|^2 = a^2$	Das Skalarprodukt mit sich selbst ist das Quadrat des Betrages
$\|\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}\| \leq \|\mathfrak{a}\| * \|\mathfrak{b}\|$	Der Betrag des Skalarproduktes aus zwei Vektoren ist immer kleiner als das Produkt der beiden Beträge
$(\alpha\, \mathfrak{a}) \odot b = \alpha\, (\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b})$	Ein skalarer Faktor kann ausgeklammert werden.
$\mathfrak{a}_b = (\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}^0)\, \mathfrak{b}^0$	Komponente von a in Richtung b
$\mathfrak{a}_b = \mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}^0 = \|\mathfrak{a}\| \cos \measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}^0)$	Projektion von a auf b
$\mathfrak{a}_b^{\perp} = \|\mathfrak{a}\| \sin \measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}^0)$	Projektion von a senkrecht zu b

2.2. Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren



Bildet ein Vektor $\vec{b}$ einen Winkel α mit einem Vektor $\vec{a}$, so kann man $\vec{b}$ in zwei Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ zerlegen, von denen $\vec{b}_1$ ein Vielfaches von a ist ($\vec{b}_1 = s \cdot \vec{a}$) und $\vec{b}_2$ senkrecht auf $\vec{a}$ steht.

Das geht immer, da es eine Zerlegung des Vektors $\vec{b}$ in seine Komponenten in Richtung der Basisvektoren darstellt.

Damit ergibt sich für das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a}\cdot(\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a}\cdot(s\,\vec{a} + \vec{b}_2) = s\,|a|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b}_2 = s\,|a|^2$$

Da a und b_2 senkrecht sind, fällt der zweite Summand weg und es bleibt nur der erste Summand stehen.

Damit stellt sich die Frage: Lässt sich s durch die beiden Vektoren a und b ausdrücken?

Aus der Zeichnung ist leicht zu erkennen, dass die Vektoren a bzw b_1 zum Winkel α die Ankathete darstellen, während der Vektor b die Hypotenuse darstellt. Damit ergibt sich aus der Trigonometrie:

$\cos\alpha = \dfrac{|b_1|}{|b|} \quad \Rightarrow \quad |b| \cdot \cos\alpha = |b_1|$ $\qquad$ b_1 ist aber nur eine Verlängerung von a.

$|b| \cdot \cos\alpha = s\,|a|$

$s = \dfrac{|b| \cdot \cos\alpha}{|a|}$ $\qquad$ setzt man den Wert s in die Berechnung des Skalarprodukts ein

$a \circ b = s\,|a|^2 = \dfrac{|b| \cdot \cos\alpha}{|a|}\,|a|^2$

$$\boxed{a \circ b = |a|\,|b| \cos\alpha}$$

Satz: (Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren)

Ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und ein Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ aus V^3 bilden den Winkel mit $0 \leq \varphi \leq 180^0$

Es gilt: $\boxed{\cos\varphi = \frac{a \circ b}{|a|\,|b|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|a|\,|b|}}$

Für Vektoren aus V^2 entsprechend

Folgerungen: (1) $\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90^0$

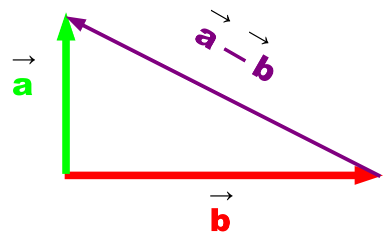
Zwei Vektoren a , b mit $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$ sind genau dann orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt.

(2) $\vec{a} \circ \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst liefert das Quadrat des Betrages des Vektors. Damit gibt es eine weitere Möglichkeit den Betrag eines Vektors zu berechnen:

$$|a| = \sqrt{a \circ a}$$

2.3. Wenn das Skalarprodukt 0 ist stehen die beiden Vektoren senkrecht und umgekehrt wenn die beiden Vektoren senkrecht stehen ist das Skalarprodukt 0



Zur Herleitung dieses Sachverhalts sollen zunächst zwei senkrechte Vektoren betrachtet werden.
Wenn die beiden Vektoren senkrecht stehen, dann bilden sie mit dem Verbindungsvektor a - b ein rechtwinkliges Dreieck. Im rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz den Pythagoras:

$$|a|^2 + |b|^2 = |a - b|^2$$

Damit sind die Beträge der einzelnen Vektoren zu quadrieren, dh. von der Betragsberechnung entfallen die Wurzelzeichen:

$$|a|^2 \quad + \quad |b|^2 \quad = \quad |a - b|^2$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$$

Für die rechte Seite kommt die 2. Binomische Formel zum Einsatz

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2) + (a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2) + (a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2)$$

Woraus zu erkennen ist, dass sich die quadratischen Glieder auf beiden Seiten aufheben.

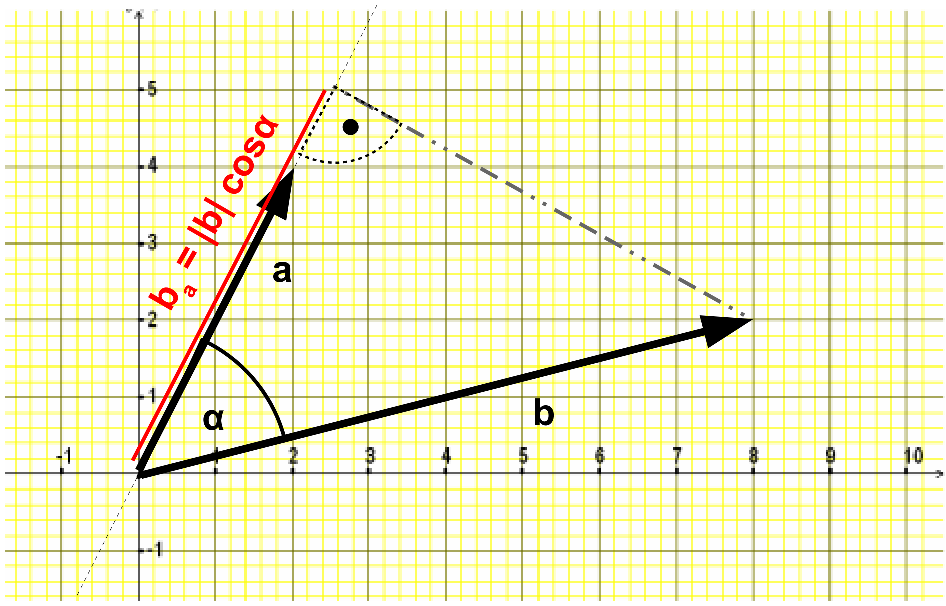
$$0 = -2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3$$
$$= -2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

nach dem Grundsatz, dass ein Produkt nur 0 sein kann, wenn mindestens einer der beiden Faktoren 0 ist, muss $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ gleich 0 sein !

Für den umgekehrten Beweis kann man von der Gleichung des Skalarproduktes ausgehen und durch beiderseitige Ergänzung der Gleichung rückwärts schließen, bis man wieder beim Pythagoras angekommen ist. Auch, wenn das etwas seltsam anmutet: Es sind genauso mathematisch korrekte Umformungen, die zu einer neuen Aussage führen. Auf dem Hinweg wurde auch nichts anderes gemacht.

2.4. Das Skalarprodukt und die Trigonometrie

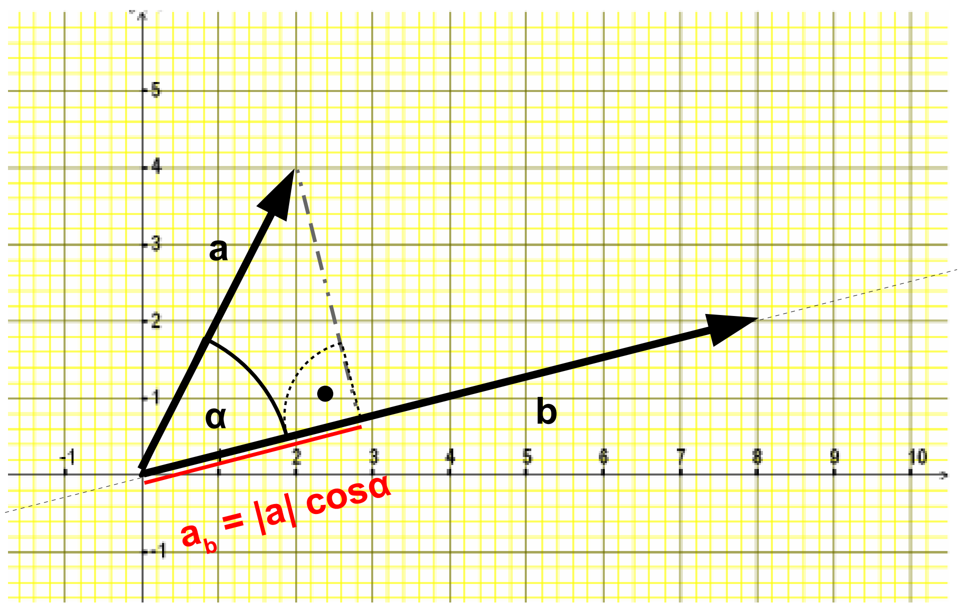
Die Darstellung von zwei Vektoren, die von einem Punkt ausgehen, kann man so ergänzen, dass rechtwinklige Dreiecke entstehen. Der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist dann immer ein Winkel zwischen einer Kathete und einer Hypotenuse. Da die Kathete anliegend ist handelt es sich um die Ankathete und die zugehörige trigonometrische Funktion zu Ankathete und Hypotenuse ist die cos – Funktion. Die Länge der Projektion eines Vektors auf die Trägergeraden des anderen Vektors liefert den Wert : Betrag des Vektors mal cos des eingeschlossenen Winkels. Das ist ein wesentlicher Bestandteil des Skalarproduktes. Für den Wert des Skalarproduktes selbst ist nur noch mit dem Betrag des Vektors zu multiplizieren, auf den projiziert wurde.



$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\alpha = |\mathbf{a}|\, \mathbf{b}_a \qquad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_a = 5{,}36 \quad |\mathbf{a}| = 4{,}47$$

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 23{,}97$$

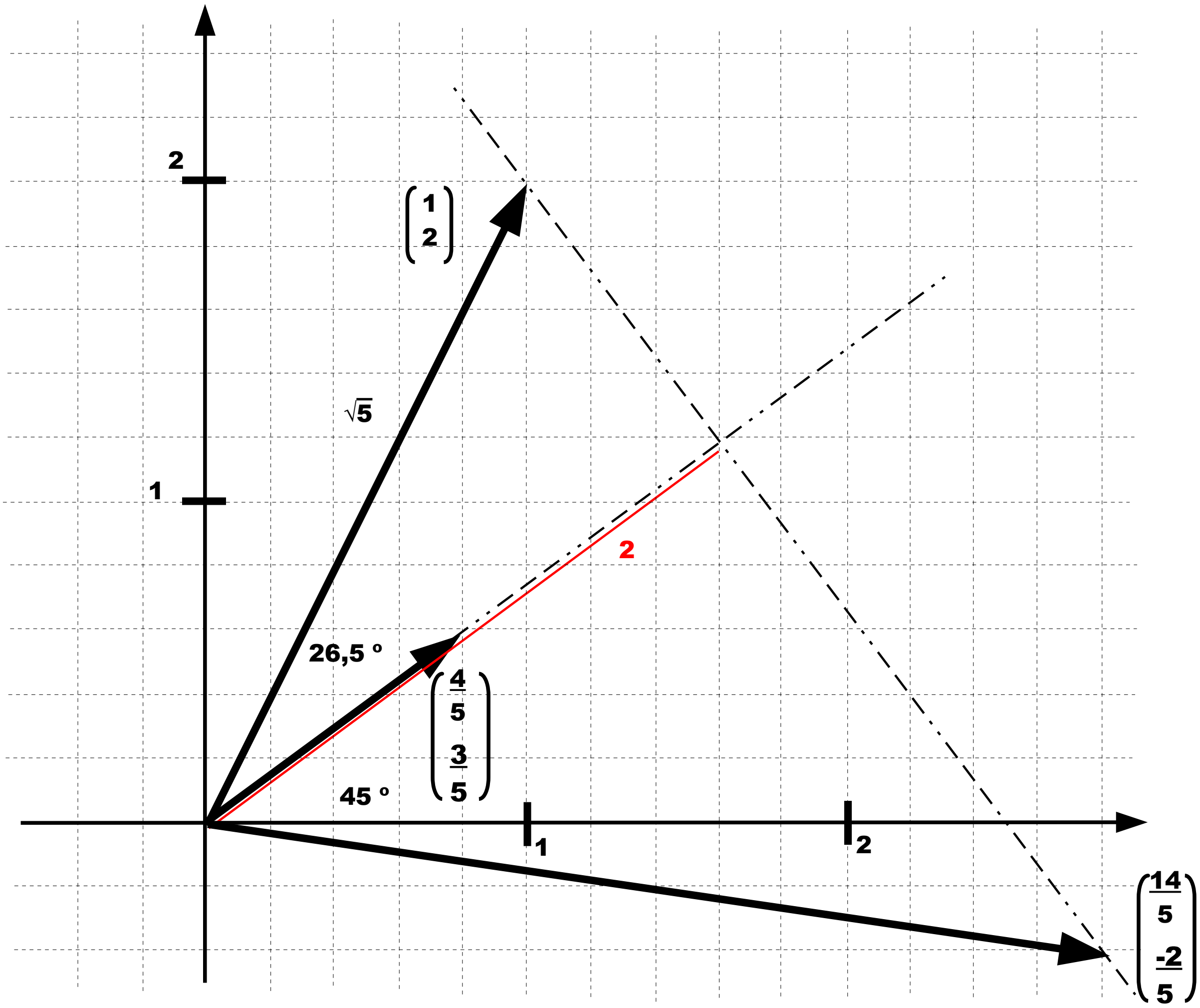
(Die Werte von b_a und |a| sollen durch ausmessen bestimmt werden, auch, wenn dabei die Genauigkeit von zwei Stellen hinter dem Komma nicht erreicht wird. Für die Berechnung gilt, dass der eingeschlossene Winkel 49,4° beträgt)



$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\alpha = |\mathbf{b}|\, \mathbf{a}_b \qquad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_b = 2{,}91 \quad |\mathbf{b}| = 8{,}24$$

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 23{,}99$$

2.5. Das Skalarprodukt mit einem Einheitsvektor



Der Vektor $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge 1 und damit ein Einheitsvektor.

Skalarprodukt mit : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4/5 • 1 + 3/5 • 2 = 10/5 = 2

Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck:

Hypotenuse: √5 eingeschlossener Winkel : 26,5 °

Ankathete: A = √5 • cos 26,5 ° = 2

Skalarprodukt mit $\begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$

4/5 • 14/5 - 3/5 • 2/5 = 50/25 = 10/5 = 2

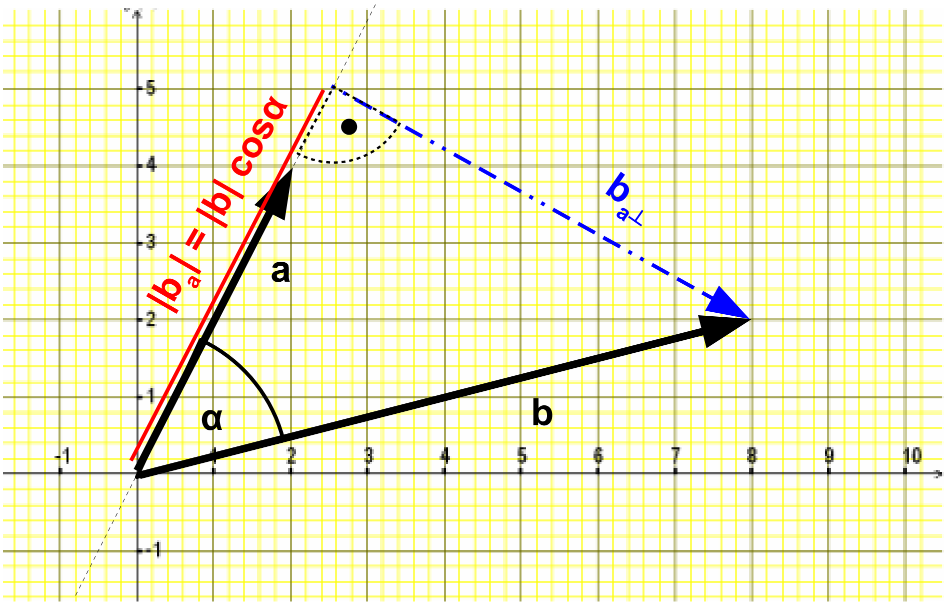
Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck:

Hypotenuse: 2√2 eingeschlossener Winkel : 45º

Ankathete: A = 2√2 • cos 45 ° = 2

Ist der Vektor, auf den projiziert wird, der Einheitsvektor des Richtungsvektors, dann ist das Skalarprodukt identisch mit dem Abstand des Fußpunktes vom Aufpunkt.

2.6. Orthogonale Zerlegung eines Vektors



$$a \circ b = |a|\,|b| \cos\alpha = |a|\, b_a \qquad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad a \circ b = 24$$

$$|b_a| = \frac{a \circ b}{|a|} = \frac{16+8}{\sqrt{20}} = \frac{24}{\sqrt{20}} = \frac{24\sqrt{20}}{20} = \frac{12\sqrt{5}}{5} = 5{,}36 \qquad |a| = \sqrt{20} = 4{,}47$$

Der Vektor b_a hat die Länge von b_a und die Richtung von a. Um den Vektor zu erstellen muss der Einheitsvektor von a mit der Länge b_a multipliziert werden.

$$b_a = \underbrace{\frac{24}{\sqrt{20}}}_{|b_a|} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{a^0} = \frac{24}{20} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{12}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} \qquad b_{a\perp} = b - b_a = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ -2{,}8 \end{pmatrix}$$

Dass b_a und $b_{a\perp}$ addiert b ergeben ist trivial, denn so wurde $b_{a\perp}$ bestimmt. Aber es ist auch das Skalarprodukt von b_a und $b_{a\perp}$ gleich 0, dh, die beiden Vektoren sind tatsächlich senkrecht. Damit existiert eine senkrechte Zerlegung von b, bei der eine Komponente in Richtung von a verläuft. Der Vektor $b_{a\perp}$ ist der Vektor des Abstandes der Spitze des Vektors b zu Trägergeraden des Vektors a.

Diese Zerlegung macht man sich auf zwei verschiedene Arten zu Nutze:

(1) Für die Berechnung des **Abstandes eines Punktes zu einer Geraden** wird der Verbindungsvektor vom Aufpunkt der Geraden zum Punkt P auf den Richtungsvektor der Geraden projiziert. Damit erhält man den Lotfußpunkt. Der Verbindungsvektor des Lotfußpunktes zum Punkt P ist der Abstandsvektor.

(2) Für die Berechnung des **Abstandes eines Punktes zu einer Ebene** wird der Verbindungsvektor vom Aufpunkt der Ebene zum Punkt P auf den Normalenvektor projiziert. Die Länge dieser Projektion ist der Abstand des Punktes von der Ebene.

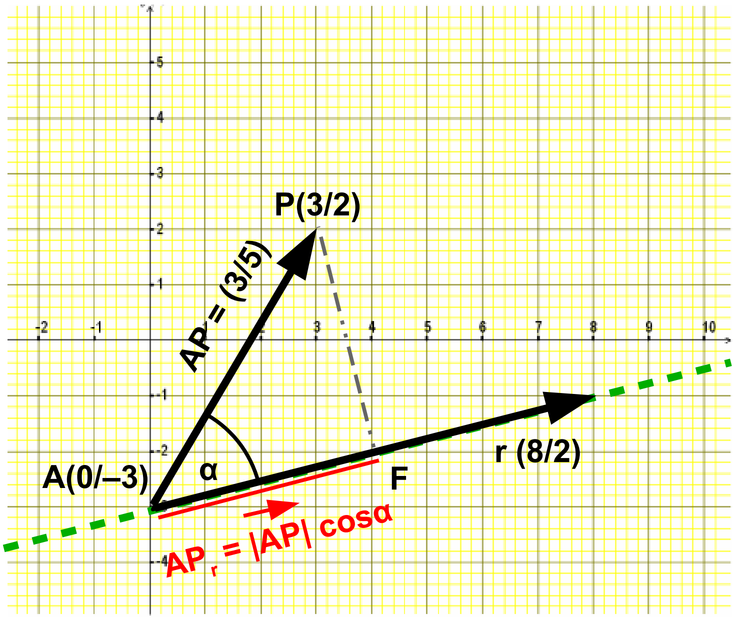
Bei der Berechnung des Abstandes von einer Geraden kann man schwer auf den orthogonalen Raum projizieren, da dieser Raum zweidimensional ist. man benötigt für diesen zweidimensionalen Raum eine orthogonale Basis, die etwas aufwendig zu bestimmen ist. Dabei müsste ein Vektor dieser Basis in der Ebene liegen, in der die Gerade und der Punkt sich befindet und senkrecht zur Geraden sein. Der Teilraum der Geraden hat nur eine Richtung.
Das gleiche gilt bei einer Ebene. Die Projektion des Verbindungsvektor von Aufpunkt und Punkt P auf die Ebene hat eine unbekannte Richtung, da er aus den beiden Richtungsvektoren gebildet werden müsste, die außerdem nicht von vornherein rechtwinklig sein müssen. Deshalb müsste man auch dort erst eine orthogonale Basis erstellen.

2.7. Abstandsberechnung und Skalarprodukt

Die Projektionseigenschaften des Skalarproduktes macht man sich der der Berechnung der Abstände zu Nutze.

2.7.1. Abstandsberechnung bei Geraden

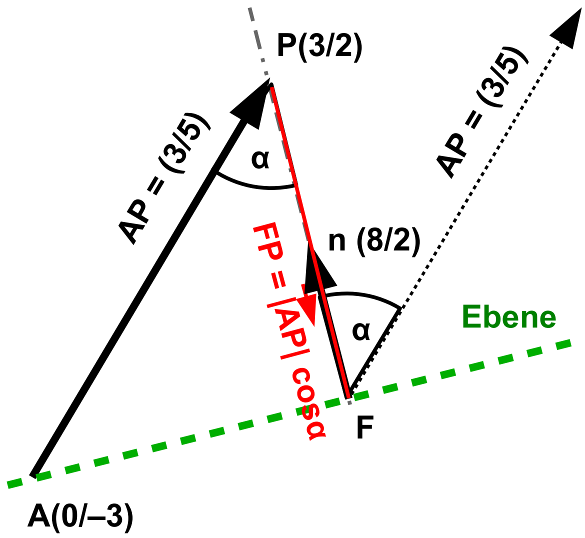
Bei Geraden ist das geometrische Objekt selbst, die gerade, ein eindimensionaler Vektorraum. Deshalb projiziert man den Verbindungsvektor P – A auf den Richtungsvektor der Geraden. Dann erhält man, wie viele Anteile des Richtungsvektors notwendig sind, um zum Lotfußpunkt zu gelangen. Üblicherweise projiziert man auf den Einheitsvektor des Richtungsvektors, dann erhält man genau die Entfernung des Lotfußpunktes vom Stützvektor der Geraden. Der Differenzvektor zwischen dem Lotfußpunkt und dem Punkt P ist der Abstandsvektor und dessen Länge der Abstand.
Die Projektion auf den senkrechten Raum ist im dreidimensionalen schwierig, da die benötigte Richtung aus einer Ebene auszuwählen ist.
Deshalb geht bei der Abstandsberechnung zur Geraden fast alles über den Lotfußpunkt.



2.7.2. Abstandsberechnung bei Ebenen

Zur Anschauung sein die Ebene so gewählt, daß sie senkrecht zur $x_2 – x_3$ Koordinatenebene ist, so daß die eingezeichneten Punkte ebenfalls in diese Koordinatenebene liegen und deshalb nur zwei Koordinaten besitzen. Die x_1 Koordinate ist 0.

Bei der Ebene ist das geometrische Objekt selbst zweidimensional und deshalb schwierig den Lotfußpunkt zu bestimmen. Dieser ergibt sich als Linearkombination aus Stützvektor und den beiden Richtungsvektoren. Bei einer Ebene ist aber der senkrechte Raum eindimensional, nämlich die Lotgerade. Deshalb projiziert man den Verbindungsvektor P – A nicht auf die Ebene, sondern auf den Normalenvektor. Mit dieser Projektion hat man aber schon den Abstandsvektor.
Projiziert man nicht auf den allgemeinen Normalenvektor sondern auf dessen Einheitsvektor, hat man gleichzeitig den Abstand des Punktes von der Ebene.
Deshalb ist zur Abstandsberechnung bei Ebenen der Lotfußpunkt nicht unbedingt notwendig.

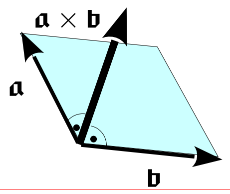


3. Das Vektorprodukt

Während das Skalarprodukt unabhängig von der Dimension des betrachteten Raumes berechnet werden kann, existiert das Vektorprodukt nur im dreidimensionalen Raum. Es gibt kein Vektorprodukt in der Ebene.

Von zwei zweidimensionale Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ lässt sich kein Vektorprodukt berechnen, von zwei dreidimensionalen Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ aber schon. Es sind nicht die gleichen Vektoren, die nur um eine Komponente erweitert wurden. Die Vektoren sind aus Räumen mit verschiedener Dimension.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$



Das Ergebnis des Vektorproduktes ist ein Vektor, der senkrecht auf der von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Ebene steht. Diese Eigenschaft ist besonders interessant für die Arbeit mit Ebenen im R^3.
Der Betrag dieses Vektors (Betrag des Vektorproduktes) ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ erzeugt wird

3.1. Rechenregeln für das Vektorprodukt

$\lvert \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rvert = \lvert\mathbf{a}\rvert \, \lvert\mathbf{b}\rvert \sin \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	Betrag des Vektorproduktes
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{c} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$	Das Vektorprodukt ist distributiv
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b}\times\mathbf{a}$	Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = - \mathbf{b}\times\mathbf{a}$	Der Ergebnisvektor hat die entgegengesetzte Richtung (Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ, sondern antisymmetrisch. Beim Vertauschen der beiden Vektoren entsteht ein Vektor mit dem gleichen Betrag, aber in entgegengesetzte Richtung weisend. Für die obenstehende Determinante der Definition bedeutet das, man vertauscht die Zeilen für $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$)
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}\odot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\odot\mathbf{b})$	(Grassman Identität)
$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}\odot\mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}\odot\mathbf{c})$	
$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \odot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}\odot\mathbf{c})\,(\mathbf{b}\odot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\odot\mathbf{d})\,(\mathbf{b}\odot\mathbf{c})$	(Lagrange Identität)
$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$	Das Vektorprodukt mit sich selbst ist der Nullvektor
$\mathbf{a} \odot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \odot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$	Das Skalarprodukt eines Vektors mit dem Ergebnis aus dem Vektorprodukt des gleichen Vektors mit einem anderen ist 0.
$(\alpha\, \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha\, (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$	Ein skalarer Faktor kann ausgeklammert werden.
$\mathbf{a}_b^{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_b = \mathbf{b}^0 \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}^0)$	Komponente von a senkrecht zu b

3.2. Der Betrag des Vektorproduktes

Der Vektor des Vektorprodukts aus zwei Vektoren: $\lvert \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rvert = \begin{vmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{vmatrix}$

Zur Vermeidung der Quadratwurzel soll zunächst das Quadrat des Betrages betrachtet werden.

$\lvert \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rvert^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$

nach den Binomischen Formeln ergibt sich auf der rechten Seite:

$$= (a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2) + (a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2) + (a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2)$$

Die Klammeren sind nicht notwendig und sollen nur demonstrieren, wo die einzelnen Ausdrücke herkommen.

$$= (a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2) + (a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2) + (a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2)$$

$$= a_1^2(b_3^2 + b_2^2) + a_2^2(b_3^2 + b_1^2) + a_3^2(b_2^2 + b_1^2) - 2(a_2a_3b_2b_3 + a_1a_3b_1b_3 + a_1a_2b_1b_2)$$

Bei den Quadraten der Komponenten von a fehlt jeweils ein Quadrat der Komponenten von b und zwar jeweils dasjenige, das die gleiche Komponenten von b enthält.
Addiert man das bei den ersten Summanden hinzu muss man es am Ende wieder subtrahieren.

$= a_1^2(b_3^2 + b_2^2 + b_1^2) + a_2^2(b_3^2 + b_1^2 + b_2^2) + a_3^2(b_2^2 + b_1^2 + b_3^2)$
$\quad - 2(a_2a_3b_2b_3 + a_1a_3b_1b_3 + a_1a_2b_1b_2) - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2)$

Bei den ersten drei Summanden lässt sich die Klammer mit den Quadraten der b Komponenten ausklammern, da sie jetzt bei allen Quadraten der a Komponenten vorhanden sind.
Die Elemente mit negativem Vorzeichen lassen sich zu einem Binom aus drei Komponenten zusammenfassen:
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ac + 2bc + 2ac$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

Die ersten beiden Klammern enthalten das Quadrat den Betrages des Vektors a und des Vektors b.
Die Klammer nach dem Minuszeichen enthält das Skalarprodukt des Vektors a mit dem Vektor b.
Für dieses Skalarprodukt gibt es auch eine Formel, die die Beträge der Vektoren benutzt:

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= |a|^2\,|b|^2 - (|a|\,|b| \cos\alpha)^2 \\ &= |a|^2\,|b|^2 - |a|^2\,|b|^2 \cos^2\alpha \\ &= |a|^2\,|b|^2 (1 - \cos^2\alpha) \\ &= |a|^2\,|b|^2 \sin^2\alpha \end{aligned}$$

nach dem Pythagoras der Trigonometrie:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

oder für den Betrag des Vektorproduktes selbst:

$$\boxed{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |a|\,|b| \sin\alpha}$$

3.3. Zusammenhang zwischen den Beträgen Skalarprodukt und Vektorprodukt

$\boxed{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |a|\,|b| \sin\alpha}$

$\boxed{|\mathbf{a} \odot \mathbf{b}| = |a|\,|b| \cos\alpha}$

es gilt : $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |a|\,|b| \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

der cos lässt sich aus dem Skalarprodukt ermitteln

$$\frac{|\mathbf{a} \odot \mathbf{b}|}{|a|\,|b|} = \cos\alpha$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |a|\,|b| \sqrt{1 - \left(\frac{|\mathbf{a} \odot \mathbf{b}|}{|a|\,|b|}\right)^2}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |a|\,|b| \sqrt{\frac{|a|^2\,|b|^2 - |\mathbf{a} \odot \mathbf{b}|^2}{|a|^2\,|b|^2}}$$

$$\boxed{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|a|^2\,|b|^2 - |\mathbf{a} \odot \mathbf{b}|^2}}$$

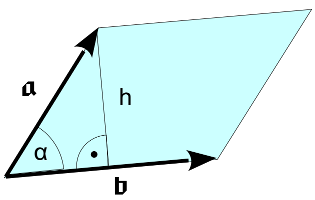
Hier werden nur Skalarprodukte gebildet, um den Betrag eines Vektorproduktes zu bestimmen.
Skalarprodukte lassen sich einfacher berechnen als Vektorprodukte.

3.4. Geometrische Interpretation des Betrages

3.4.1. Fläche des Parallelogramms

Zwei Vektoren spannen immer ein Parallelogramm auf. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms berechnet sich aus Grundseite * Höhe.

Die Grundseite dieses Parallelogramms wäre etwa der Vektor b und die Länge der Grundseite |b|. α ist der von den Vektoren a und b eingeschlossene Winkel. Damit gilt für α in dem rechtwinkligen Dreieck.



$\sin\alpha = \frac{h}{|a|}$ oder $h = |a| \sin\alpha$ und für den Flächeninhalt des Parallelogramms:

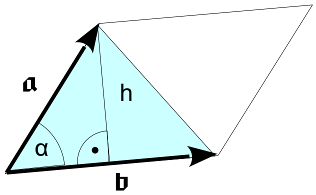
$A = |b| \cdot h = |b|\,|a| \sin\alpha$

Der Betrag des Vektorproduktes aus den Vektoren a und b ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren a und b aufgespannt wird.

3.4.2. Fläche des Dreiecks

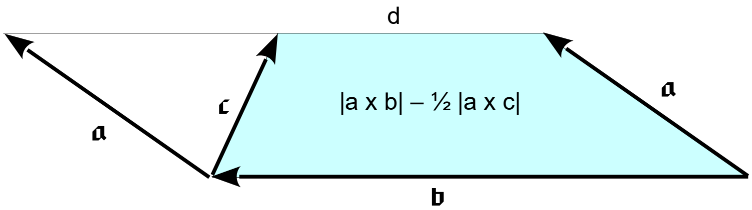
Die Fläche des Dreiecks, das von zwei Vektoren aufgespannt wird ist genau die Hälfte der Fläche des Parallelogramms und damit auch über das Vektorprodukt zu berechnen.

$$A = \tfrac{1}{2}\,|b| \cdot h = \tfrac{1}{2}\,|b|\,|a| \sin\alpha = \tfrac{1}{2}\,|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$



3.4.3. Fläche des Trapezes

$|a \times b|$ liefert die Fläche des Parallelogramms der beiden Vektoren a und b.
Von dieser Fläche in die Dreiecksfläche der Vektoren a und c zu subtrahieren $\tfrac{1}{2}\,|a \times c|$



Da sich Vektorprodukte mit den GTR nur sehr aufwendig berechnen lassen, wurde im Dokument zu „Produkten von Vektoren" eine Formel für den Betrag des Vektorproduktes erstellt, die nur Skalarprodukte verwendet. Das Quadrat des Betrages eines Vektors ist auch nur ein Skalarprodukt des Vektors mit sich selber.

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|a|^2\,|b|^2 - |\mathbf{a} \odot \mathbf{b}|^2}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a} \odot \mathbf{a}|\,|\mathbf{b} \odot \mathbf{b}| - |\mathbf{a} \odot \mathbf{b}|^2} \qquad \text{da} \quad \mathbf{a} \odot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

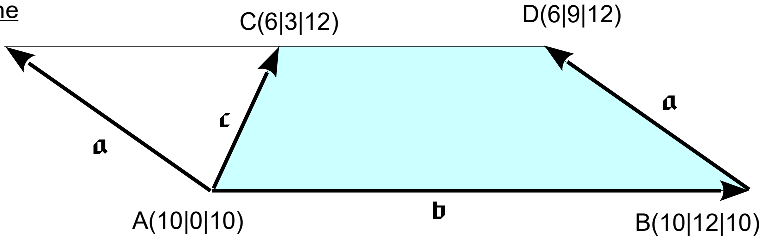
Die Trapezfläche eines Daches aus einer Aufgabe zur Schattenberechnung hat folgende Koordinaten:

A(10|0|10), B(10|12|10), C(6|3|12), D(6|9|12)

Gesucht ist der Flächeninhalt dieses Trapezes.

<u>Standardweg zur Berechnung der Trapezfläche</u>

Die Länge der Grundseite b ist 12
(entspricht der x_2 Koordinate von B).
Die Länge der oberen Parallelen ist 6.



Zur Berechnung der Höhe des Trapezes

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} \odot \mathbf{c} = 36\,; \qquad |\mathbf{b}| = 12\,; \; |\mathbf{c}| = \sqrt{29} \qquad \cos\varphi = \frac{36}{12\sqrt{29}} = 0{,}55708$$

$$\varphi = 56{,}1454$$

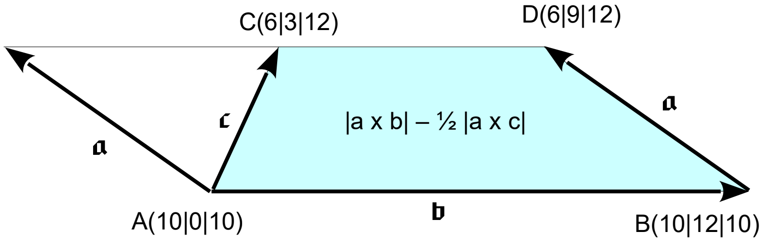
$$h = |\mathbf{c}| * \sin(56{,}1454) = 4{,}4721$$

$$A = \frac{a + c}{2}\, h = \frac{12 + 6}{2}\; 4{,}4721 = 40{,}2492$$

<u>Alternativer Weg über das Vektorprodukt</u>

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -24 \\ 0 \\ -48 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{2880}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{a} \times \mathbf{c}| = \sqrt{720}$$

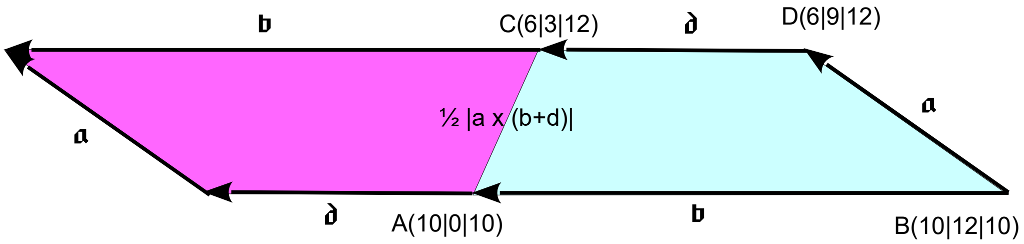


$$A = \sqrt{2880} - \tfrac{1}{2}\,\sqrt{720} = 40{,}2492$$

Berechnung der Fläche des doppelten Trapezes

$\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathfrak{b} + \mathfrak{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{d}) = \begin{pmatrix} -36 \\ 0 \\ -72 \end{pmatrix}$ $|\,\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{d})\,| = \sqrt{6480}$ $A = ½ \sqrt{6480} = 40{,}2492$

Berechnung des Betrages des Vektorproduktes über das Skalarprodukt

$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $-\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$|\mathfrak{a}| = \sqrt{29}$; $|\mathfrak{b}| = 12$; $|\mathfrak{c}| = \sqrt{29}$

$\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b} = 36$; $\mathfrak{a} \odot \mathfrak{c} = 11$

$|\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}\,| = \sqrt{|a|^2\,|b|^2 - |\,\mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}\,|^2} = \sqrt{29 * 12^2 - 1296} = \sqrt{2880} = 53{,}6656$

$|\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{c}\,| = \sqrt{|a|^2\,|c|^2 - |\,\mathfrak{a} \odot \mathfrak{c}\,|^2} = \sqrt{29 * 29 - 121} = \sqrt{720} = 26{,}8328$

$A = \sqrt{2880} - ½ \sqrt{720} = 40{,}2492$

3.5. Abstand eines Punktes zur Ebene ohne Normalenvektor

Zu einer gegebenen Ebene in Parameterdarstellung soll der Abstand eines Punktes berechnet werden, ohne den Normalenvektor zu berechnen.

$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ Punkt, zu dem der Abstand bestimmt werden soll: $R = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\vec{a}|^2 = 10$ $|\vec{b}|^2 = 26$ $|\vec{a} \circ \vec{b}|^2 = 15^2 = 225$

$|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - |\vec{a} \circ \vec{b}|^2 = 10 \cdot 26 - 225 = 260 - 225 = 35$

Für den Abstand eines Punktes von einer Ebene gilt folgende Formel: $\dfrac{(R-A) \circ (a \times b)}{|\,a \times b\,|}$

Der Zähler dieses Ausdrucks entspricht einem Spatprodukt, das über die Berechnung einer Determinante bestimmt werden kann. Insbesondere für die Berechnung mit dem GTR ein sehr empfehlenswerter Lösungsweg. Determinanten und Spatprodukt gehören nicht zum regulären Schulstoff. Was ein Spatprodukt ist, ist im folgenden Kapitel zu lesen. Determinanten sind im Grundlagendokument zur Rechnung mit dem GTR nachzulesen.

$R - A = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ Determinante $= |\,(R\text{-}A)\ a\ b\,| = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 16$ Abstand $= \dfrac{16}{\sqrt{35}}$

Um das Ergebnis zu vergleichen, hier der Rechenweg mit dem Normalenvektor

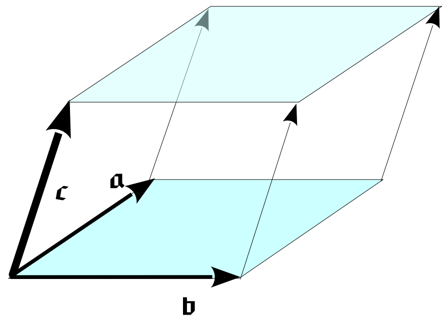
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $|\vec{n}| = \sqrt{35}$

$$\frac{(R-A) \circ n}{|\,n\,|} = \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}{\sqrt{35}} = \frac{21 - 5}{\sqrt{35}} = \frac{16}{\sqrt{35}}$$

4. Das Spatprodukt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \odot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\, c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_3$$



4.1. Rechenregeln für das Spatprodukt

$$(\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,) = \mathbf{a} \odot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \odot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \odot \mathbf{b}$$

$$= - \mathbf{c} \odot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = - (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \odot \mathbf{a} = - (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \odot \mathbf{b}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

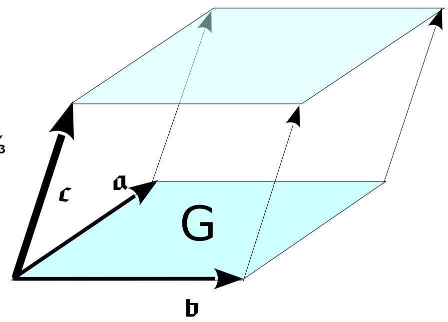
$$= a_1 *(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2 * (b_1c_3 - c_1b_3) + a_3 * (b_1c_2 - c_1b_2)$$

Der Spat ist ein Körper, dessen Seitenflächen aus Parallelogrammen bestehen (Wenn man mit einem Spaten ein Stück feste Erde ausgräbt, hat das ausgegrabenen Stück etwa diese Form). Im letzten Abschnitt über das Vektorprodukt wurden die Flächen eines Parallelogramms berechnet, so dass es möglich ist, die Oberfläche dieses Körpers mit Hilfe der Vektorrechnung zu bestimmen. Jetzt soll die Frage geklärt werden, ob man auch das Volumen mit Hilfe der Vektorrechnung bestimmen kann.

Damit wäre es möglich, Oberflächen und Volumen von Körpern mit viereckigen Seitenflächen allein auf der Basis der Vektorrechnung zu bestimmen. Alle Körper mit runden Seitenflächen (Kegel, Kugel, Zylinder) entziehen sich ohnehin der Vektorrechnung. Würfel, Quader eventuell auch Pyramiden besitzen aber ebene Seitenflächen.

4.2. Volumen eines Spates

Nach dem Prinzip des Cavalierie berechnen sich die Volumen aller ebenen Körper nach der Formel Grundfläche mal Höhe. Wenn es sich nicht um Quader oder Würfel handelt, sondern um Pyramiden, ist noch ein zusätzlicher konstanter Faktor zu berücksichtigen, da Pyramiden Teile eines Quaders sind. Bei Pyramiden (und Kegeln) ist dieser Faktor ⅓ .



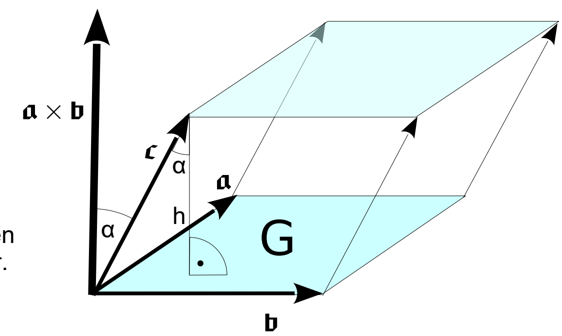
Aus dem Vektorprodukt ist klar, dass sich die Grundfläche aus dem Vektorprodukt der beiden Vektoren a und b berechnen lässt.

$$G = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Damit ist die Aufgabe, die Höhe des Körpers zu bestimmen. Aus dem Vektorprodukt ist weiter klar, dass das Ergebnis des Vektorproduktes ein Vektor ist, der senkrecht auf a und b steht und damit die Richtung der Höhe besitzt, aber nicht die richtige Länge.

Der Vektor des Vektorproduktes schließt mit der nach oben gerichteten Kante des Spats einen Winkel α ein. Mit Hilfe des Skalarproduktes könnte dieser Winkel berechnet werden.

Andererseits ist das Skalarprodukt auch die Projektion des einen Vektors auf den anderen Vektor. Ist der Vektor, auf den projiziert wird, ein Einheitsvektor, handelt es sich genau um den senkrechten Abstand der Spitze des Vektors auf den projizierten Einheitsvektor.



Deshalb soll der Vektor c auf den Einheitsvektor des Vektorproduktes projiziert werden, da dieser genau die Richtung der Höhe besitzt. und dir Projektion auf dessen Einheitsvektor genau die senkrechte Höhe angibt.

$$h = \mathbf{c} \odot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^\circ = \mathbf{c} \odot \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

Diese Höhe ist mit dem Betrag der Grundfläche zu multiplizieren, um das Volumen zu erhalten:

$$V = G \bullet h = \left(|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| \bullet \ \mathfrak{c} \odot \frac{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})}{|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|} \right) = \mathfrak{c} \odot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$$

Achtung bei der Multiplikation: • ist das Multiplikationszeichen zwischen zwei reellen Zahlen
⊙ ist das Multiplikationszeichen für ein Skalarprodukt
x ist das Multiplikationszeichen für ein Vektorprodukt.

Die Reihenfolge dieser Multiplikationen können nicht beliebig vertauscht werden, deshalb ist es vorteilhaft Klammern zu setzen.

Das Ergebnis $\mathfrak{c} \odot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$ in der Klammer ist eine reelle Zahl, der Betrag des Vektorproduktes ebenfalls. Damit dürfen die beiden Faktoren $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$ gekürzt werden, da es sich dabei um reelle Zahlen handelt. Aber es darf z.B nicht $(\mathfrak{c} \odot \mathfrak{a}) \times \mathfrak{b}$ gerechnet werden, da $\mathfrak{c} \odot \mathfrak{a}$ kein Vektor ist und somit kein Vektorprodukt mit b gebildet werden kann.

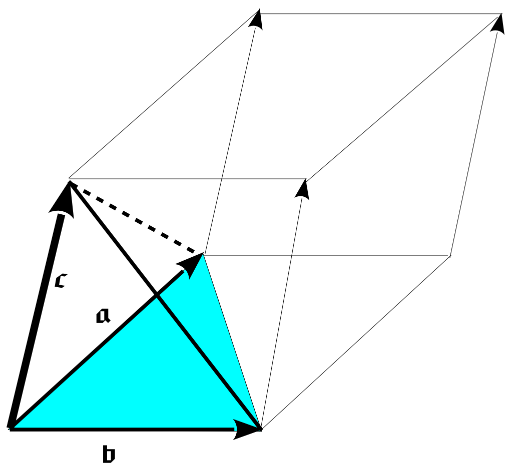
Mathematisch gesehen ist der Wert $\mathfrak{c} \odot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$ das Ergebnis einer Determinante, deren Behandlung keinen Schulstoff darstellt. Trotzdem lässt sich auch dieser Wert über den GTR berechnen, indem man die in allen GTR implementierte Funktion „Det“ dazu benutzt. Die drei Vektoren werden spalten oder zeilenweise in eine 3x3 Matrix übertragen und von dieser die Determinante berechnet.
Eventuelle negative Vorzeichen sind der Orientierung der drei Vektoren untereinander geschuldet und und stellen allein keinen Rechenfehler dar.

Das Volumen eines Spates aus drei Vektoren a, b , c ist gleich dem Skalarprodukt des einen Vektors mit dem Vektorprodukt der beiden anderen Vektoren

Das Ergebnis des Spatproduktes ist eine reelle Zahl.

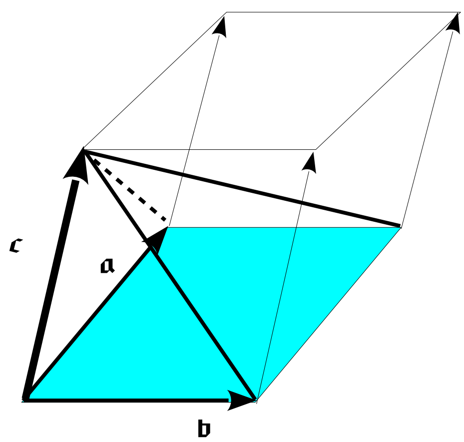
4.3. Die dreiseitige Pyramide (Tetraeder)

$$V = \frac{1}{6} (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \odot \mathfrak{c}$$

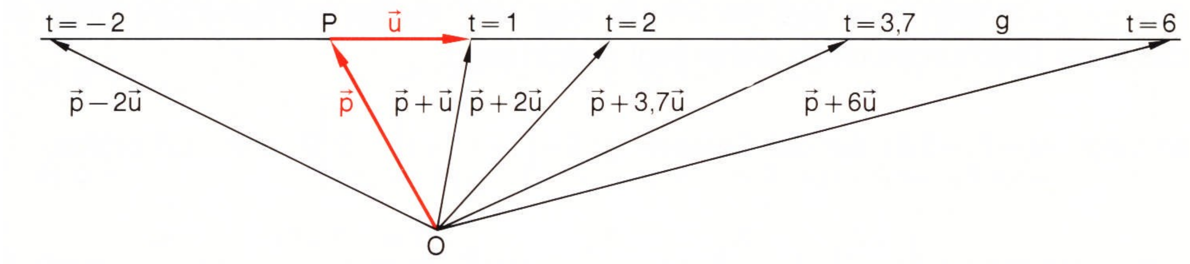


4.4. Die vierseitige Pyramide

$$V = \frac{1}{3} (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \odot \mathfrak{c}$$



5. Geraden



Satz: (Parameterform von Geraden)

Es sei P ein Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{p}$ und $\vec{u}$ ein vom Nullvektor verschiedener Vektor.

Dann bilden die Punkte x mit dem Ortsvektoren

$$\boxed{\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})}$$

eine Gerade g durch den Punkt P.

Jeder Vektor $\vec{x}$ steht für einen Ortsvektor, dessen Ziel auf der Geraden liegt und der eindeutig einem Wert t zugeordnet ist.

Eine Geradengleichung ist einen Linearkombination von zwei Vektoren, bei denen der eine Vektor (Aufpunkt) einen festen Streckfaktor von 1 hat. Der Ergebnisvektor ist immer ein Ortsvektor vom Ursprung zu einem Punkt auf der Geraden.

Diese Form der Darstellung heißt ***Parameterform der Geraden g***.
Der Vektor $\vec{p}$ heißt **Stützvektor** oder **Aufpunkt** , der Vektor $\vec{u}$ heißt **Richtungsvektor**.
Der Platzhalter t durchläuft alle reellen Zahlen und heißt **Parameter** der Geradengleichung.
Jedem t ist eindeutig ein Ortsvektor $\vec{x}$ zugeordnet.

Anmerkungen:
Im Zusammenhang mit den Parameterformen von Geraden und Ebenen ergeben sich einige typische Aufgaben und Aufgabenformen:

(1) Bestimmung von Punkten auf der Geraden bzw. in der Ebene.

(2) Punktproben.

(3) Verschiedene Parameterdarstellungen derselben Geraden bzw. derselben Ebene.

(4) Bestimmung von parallelen Geraden bzw. Ebenen.

Um die Parameterform einer <u>Geraden</u> aufstellen zu können, benötigt man

(5) einen Stütz- und einen Richtungsvektor

.. oder ...

(6) zwei Punkte A und B, die sicher auf der Geraden liegen. $\overrightarrow{OA}$ eignet sich als Stütz- und $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor

.. oder ...

(7) eine geeignete Kombination aus (1) und (2).

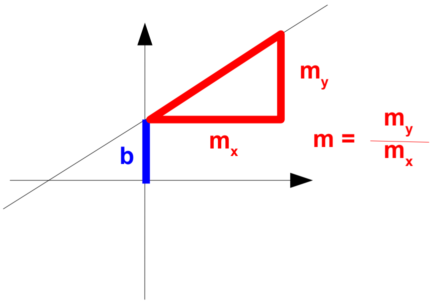
Wichtig ist nur:
Der Stützvektor führt vom Nullpunkt zu irgendeinem Punkt der Geraden.
Der Richtungsvektor verbindet zwei beliebige (,aber verschiedene) Punkte der Geraden miteinander.
Der Richtungsvektor darf durch einen linear abhängigen Vektor ersetzt werden, der Stützvektor nicht.

5.1. Vektor- und Koordinatendarstellung in der Ebene

Es sollen hier nur Geraden in der Ebene betrachtet werden, also Vektoren, die nur zwei Komponenten besitzen. Außerdem soll eine geraden in der Ebene einmal in ihrer Vektorform und einmal in der bisher bekannten, üblichen Koordinatendarstellung angegeben werden.

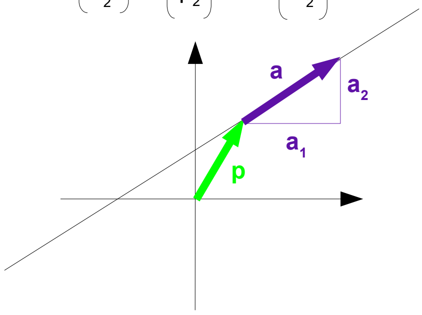
Koordinatendarstellung

$y = mx + b$



Vektordarstellung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$



Satz: (Koordinatendarstellung $\Rightarrow$ Vektordarstellung)

Berechne zu einem Wert x_p den zugehörigen Wert y_p, oder benutze (0|b) als Punkt: $\Rightarrow$ $p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$

m_y ist die y-Komponente des Richtungsvektors, m_x die x-Komponente: $\Rightarrow$ $a = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix}$

(Für Ganzzahlige m ist m_x = 1 zu setzen.)

Satz: (Koordinatendarstellung $\Leftarrow$ Vektordarstellung)

$y - p_2 = m\,(x - p_1)$ $\Leftarrow$ p ist ein Punkt auf der Ebene, deshalb empfiehlt es sich, mit der Punktrichtungsgleichung zu starten:

$m = \frac{a_y}{a_x}$ $\Leftarrow$ Der Anstieg m ist der Quotient aus den Komponenten des Richtungsvektors $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Alternative Möglichkeit zur Berechnung:
man bestimmt den Faktor t für den Schnittpunkt mit der x_2-Achse. dh. der Wert für x_1 muss 0 werden:

$p_1 + t\,a_1 = 0$

Der für dieses t berechnete x_2 -Wert ist der Wert, der für b verwendet werden muss.

5.2. Besondere Lage von Geraden

Satz: (Gerade parallel zu einer Koordinatenebene)

	Parameterdarstellung:
	$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$
g || x_1-x_2-Ebene: g || x_2-x_3-Ebene: g || x_1-x_3-Ebene:	$u_3 = 0$ $u_1 = 0$ $u_2 = 0$

- Keinen Spurpunkt mit der parallelen Ebene.

Satz: (Gerade parallel zu einer Koordinatenachse)

	Parameterdarstellung:
	$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$
g || x_1-Achse: g || x_2-Achse: g || x_3-Achse:	$u_2 = u_3 = 0$ $u_1 = u_3 = 0$ $u_2 = u_1 = 0$

- Nur einen Spurpunkt
- Gerade senkrecht zu einer Koordinatenebene
- Gerade parallel zu den beiden anderen Koordinatenebenen

5.3. Spurpunkte einer Geraden

Spurpunkte in V^2

Eine Gerade, die nicht parallel zu einer Achse ist, hat in der Ebenen mit jeder Koordinatenachse Schnittpunkte. Im Falle der Geraden in der Ebene ist jeweils **eine Komponente** gleich Null zu setzen.

Spurpunkte in V^3

Spurpunkte einer Geraden im V^3 sind in erster Linie Durchstoßpunkte der Geraden durch die Koordinatenebenen. Solche Durchstoßpunkte gibt es bei jeder Geraden, aber es gibt nicht immer drei. Manchmal kann es auch nur einen geben. Für Durchstoßpunkte durch die Koordinatenebenen ist **eine Komponente** gleich Null zu setzen.
Durchstoßpunkte einer Geraden durch einen Koordinatenachse sind möglich, aber selten.
In diesen Fällen sind jeweils **zwei Komponenten** gleich Null zu setzen.

Spurpunkt mit der $x_1 - x_2$ – Ebene
=> die x_3 Komponente muss Null sein.

Satz: (Gerade in Parameterdarstellung)

Es sei eine Gerade in Parameterdarstellung gegeben g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

Für den Durchstoßpunkt mit der x_1-x_2 -Ebene muss folgende Bedingung erfüllt sein

$$\boxed{p_3 + t\,u_3 = 0}$$

Dabei handelt es sich um ***eine Gleichung*** mit ***einer Unbekannten*** (t). falls u_3 nicht Null ist, ist diese Gleichung immer lösbar. Das einsetzen des errechneten Wertes für t liefert die x_1 und x_2 Koordinate des Durchstoßpunktes. Wenn u_3 =0 , dann läuft die Gerade parallel zur x_1-x_2 Ebene und hat deshalb keinen Durchstoßpunkt mit dieser Ebene.

Satz: (Gerade in Koordinatendarstellung)

Für Geraden im V^3 gibt es keine Koordinatendarstellung.
Geraden im V^2 in Koordinatendarstellung.ist Thema der 7. Klasse.

Spurpunkt mit der x_1 – Achse
=> die x_2 und x_3 Komponente müssen Null sein.

Satz: (Gerade in Parameterdarstellung)

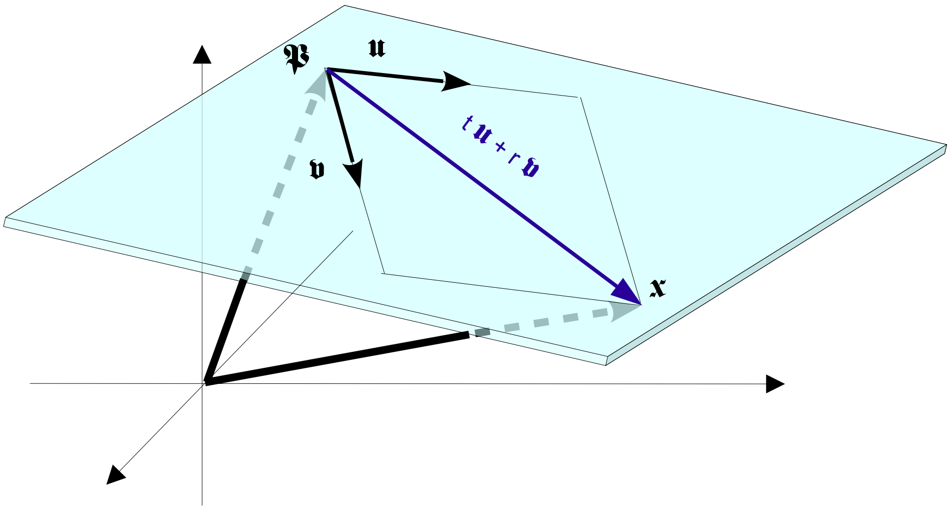
Es sei eine Gerade in Parameterdarstellung gegeben E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

Für den Durchstoßpunkt mit der x_1 – Achse müssen folgende Bedingung erfüllt sein

$$\boxed{\begin{aligned} p_2 + t\,u_2 &= 0 \\ p_3 + t\,u_3 &= 0 \end{aligned}}$$

Dabei handelt es sich um ***zwei Gleichung*** mit ***einer Unbekannten*** (t). Ein solche Gleichungssystem ist natürlich nur in seltenen Fällen lösbar.

6. Ebenen



Satz: (Parameterform von Ebenen)

Es sei P ein Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{p}$, ferner seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei linear unabhängige Vektoren.
Dann bilden die Punkte x mit dem Ortsvektoren

$$\boxed{\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{u} + r\,\vec{v} \quad (t,r \in \mathbb{R})}$$

eine Ebene durch den Punkt P.

Diese Form der Darstellung heißt Parameterform der Ebene E.

Eine Ebenengleichung ist einen Linearkombination von drei Vektoren, bei denen der eine Vektor (Aufpunkt) einen festen Streckfaktor von 1 hat. Der Ergebnisvektor ist immer ein Ortsvektor vom Ursprung zu einem Punkt auf der Ebene.

Der Vektor $\vec{p}$ heißt **Stützvektor** oder **Aufpunkt** , die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen **Richtungsvektoren**.
oder **Spannvektoren** (sie spannen die Ebene auf).

Die Platzhalter t und r, die unabhängig voneinander alle reellen Zahlen durchlaufen heißen **Parameter** der Ebene. Jedem Paar (t,r) ist eindeutig ein Ortsvektor x der Ebene zugeordnet.

Um die Parameterform einer Ebene aufstellen zu können, benötigt man

(1) einen Stütz- und zwei Spannvektoren .. oder ...

(2) drei Punkte A,B und C, die sicher in der Ebene liegen. $\overrightarrow{OA}$ eignet sich als Stütz- und $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Spannvektoren

.. oder ...

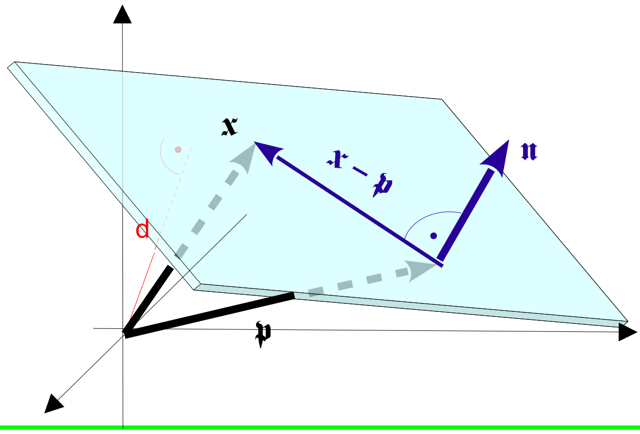
(3) eine geeignete Kombination aus (1) und (2).

(4) Zwei parallele Geraden legen eindeutig eine Ebene fest.

(5) Zwei sich schneidende Geraden legen eindeutig eine Ebene fest.

Wichtig ist nur:
Der Stützvektor führt vom Nullpunkt zu irgendeinem Punkt der Ebene.
Ein Spannvektor verbindet zwei beliebige (,aber verschiedene) Punkte der Ebene miteinander.
Die beiden Spannvektoren dürfen nicht linear abhängig sein.

6.1. Ebenen in Normalen - und Koordinatenform



Definition: (Normalenvektor)

Ein Vektor, der mit dem Richtungsvektor einer Geraden oder mit beiden Richtungsvektoren einer Ebene einen Winkel von 90^0 bildet heißt **Normalenvektor** der Geraden oder Ebene

Satz: (Normalform einer Ebene oder Geraden)

Ist n ≠ 0 , dann ist $\boxed{(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0}$

(1) im V^3 die <u>**Gleichung einer Ebene**</u> mit dem Normalenvektor n, die durch den Punkt P mit dem Ortsvektor p geht.

(2) im V^2 die <u>**Gleichung einer Geraden**</u> mit dem Normalenvektor n, die durch den Punkt P mit dem Ortsvektor p geht.

An der formalen Gleichung kann man nicht unterscheiden, ob es sich um eine Geradengleichung oder eine Ebenengleichung handelt. Der Unterschied ist nur zu erkennen, ob die beteiligten Vektoren zwei Komponenten haben, oder drei. Bei Vektoren mit zwei Komponenten handelt es sich um eine Gerade in der Ebene (V^2) und bei drei Komponenten um einen Ebene im Raum (V^2). Der Grund dafür liegt darin, dass der Normalenvektor nur eine Richtung haben darf, damit das Gebilde eindeutig ist. Das ist nur der Fall, wenn das geometrische Gebilde **genau eine Dimension niedriger** ist, als die Dimension des Raumes, also eine Gerade (1-dimensional) in der Ebene V^2 (2-dimensional) ***oder*** eine Ebene (2-dimensional) im Raum V^3 (3-dimensional). Solche Ebenen, die genau eine Dimension niedriger sind als die Dimension des Raumes bezeichnet man auch als **Hyperebene**.
Für eine Gerade im V^3 gibt es deshalb eine solche Darstellung nicht !

Satz: (Koordinatenform einer Ebene)

Die Gleichung $\boxed{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = D}$ beschreibt eine Ebene, falls die Koeffizienten n_1, n_2 und n_3 nicht alle gleichzeitig Null sind.

Ist $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = D$ die Gleichung einer Ebene E, so ist $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

- Die Koordinatengleichung (KF) einer Ebene lässt sich sehr leicht aus der Punkt-Normalengleichung (NF) herleiten.
- Die Normalengleichung (NF) einer Ebene lässt sich sehr leicht aus der Koordinatengleichung (KF) herleiten.
- Die Umwandlung der Parameterform (PF) einer Ebene in die NF bzw. KF oder umgekehrt ist aufwendiger.
- Im Normalenvektor, der in beiden obigen Ebenenformen direkt ablesbar ist, drückt sich z.T. die Lage der Ebene im Raum aus, daher sind bestimmte Lagebeziehungen sehr leicht über diesen Vektor begründbar.

6.2. Geometrische Zusammenhänge zwischen Normalenform und Koordinatenform

Bei der Umrechnung zwischen den einzelnen Darstellungen kann man sich einige geometrische Zusammenhänge nutzbar machen, wenn man die Rechnung überprüfen will.

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = D$$

Die Koordinatendarstellung entspricht auf der linken Seite einem Skalarprodukt der beiden Vektoren $n = (n_1 / n_2 / n_3)$ und $x = (x_1 / x_2 / x_3)$. Deshalb kann man die Koordinatendarstellung so interpretieren, dass das Skalarprodukt zwischen einem (noch unbekannten) Vektor n und einem Ortsvektor x der Ebene immer den gleichen Wert D hat. (Die geometrische Bedeutung des Wertes D wird im Kapitel „Abstand eines Punktes von der Ebene“ geklärt.)

Die Zusammenhänge sollen an einem Beispiel gezeigt werden. Das folgende Beispiel ist die Darstellung einer Ebene in Parameterform und in Koordinatenform.

$x = (0/0/-3) + r\,(1/0/2) + s\,(0/1/1)$ $\qquad$ $2x_1 + x_2 - x_3 = 3$

Es soll angenommen werden, dass gerade die Umrechnung der Parameterform in die Koordinatenform durchgeführt wurde und geprüft werden soll, ob das Ergebnis korrekt ist.

Die Koordinatenform in Skalarproduktschreibweise: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3$

Da diese Gleichung für alle Punkte auf der Ebene gelten soll, muss sie natürlich auch für den Aufpunkt der Parametergleichung gelten.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3$$

Satz:

Setzt man in die Koordinatengleichung der Ebene den Aufpunkt der Parameterdarstellung ein und berechnet das Skalarprodukt, muss sich der Wert der rechten Seite der Koordinatendarstellung ergeben.

Das führt dazu, dass an natürlich das Skalarprodukt mit dem Aufpunkt auch alternativ auf die rechte Seite schreiben kann:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

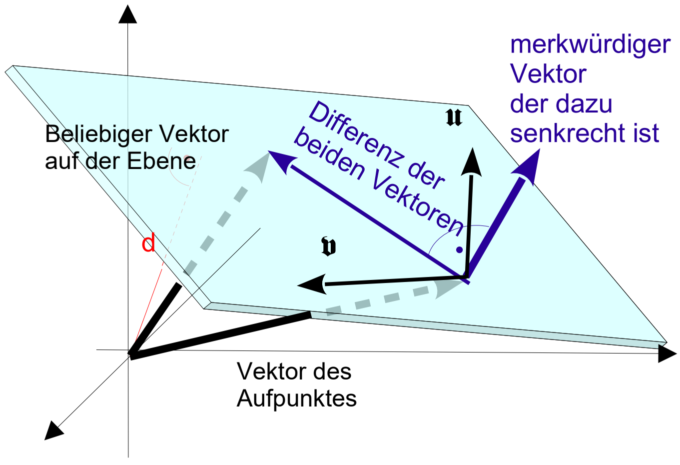
Das Ergebnis auf beiden Seiten ist eine reelle Zahl. Deshalb kann ich die Gleichung problemlos umformen und den Ausdruck der rechten Seite auf die linke Seite bringen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

Nach den Rechenregeln für Skalarprodukt gilt ein Distributivgesetz, so dass man einen gemeinsamen Vektor ausklammern kann. (siehe Seite „Skalarprodukt“; Satz zu „Rechenregel“ Formel (3))

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Interpretation: das Skalarprodukt des Vektors n mit der Differenz eines Ortsvektors auf der Ebene mit dem Aufpunkt (auch ein Punkt auf der Ebene) ist 0, folglich sind die beiden Vektoren senkrecht.



Was ist das für ein merkwürdiger Vektor ?

Dazu soll nochmals die Zeichnung aus Kapitel 6.1. herangezogen werden.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Auf alle Fälle sind die beiden Spannvektoren der Ebene u und v zwei Vektoren, die sich aus der Differenz zweier beliebiger Ortsvektoren auf der Ebene ergeben (s. Drei-Punkte-Gleichung einer Ebene, da entstehen die Spannvektoren aus einer solchen Differenz). Damit erhält man folgende weitere Prüfmöglichkeit.

Satz:

Setzt man in die Koordinatengleichung der Ebene die Spannvektoren der Parameterdarstellung ein und berechnet das Skalarprodukt, muss sich 0 ergeben.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Definition: (Komponenten der Koordinatengleichung)

Die
Komponenten der Koordinatengleichung n_1, n_2, n_3
sind die
Koordinaten des Normalenvektors auf eine Ebene
(siehe dazu Kapitel VIII)

Sollen von einer Koordinatendarstellung die Parameterdarstellung bestimmt werden, kann man die gleichen Prüfkriterien verwenden.

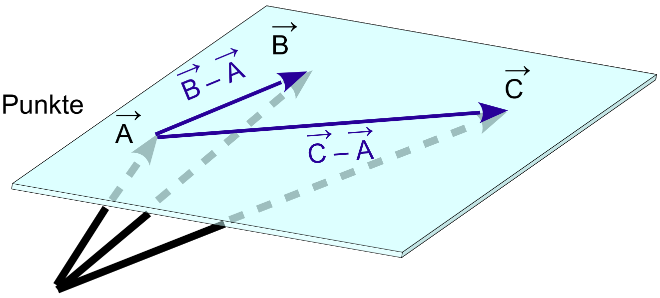
6.3. Erstellen von Ebenengleichungen

(1) Drei Punkte Form

Gegeben sind 3 Ortsvektoren $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$

Gesucht ist die Ebenengleichung durch die drei Punkte

$$\boxed{\vec{X} = \vec{A} + t\,(\vec{B} - \vec{A}) + s\,(\vec{C} - \vec{A})}$$

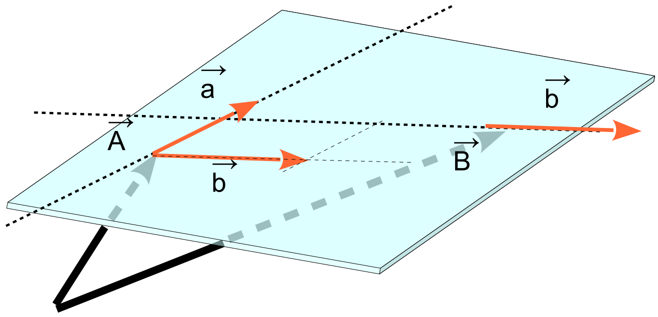


(2) Zwei sich scheidende Geraden

$$g1 : \vec{X}_{g1} = \vec{A} + t\,\vec{a}$$

$$g2 : \vec{X}_{g2} = \vec{B} + t\,\vec{b}$$

$$\boxed{\vec{X} = \vec{A} + t\,\vec{a} + s\,\vec{b}}$$

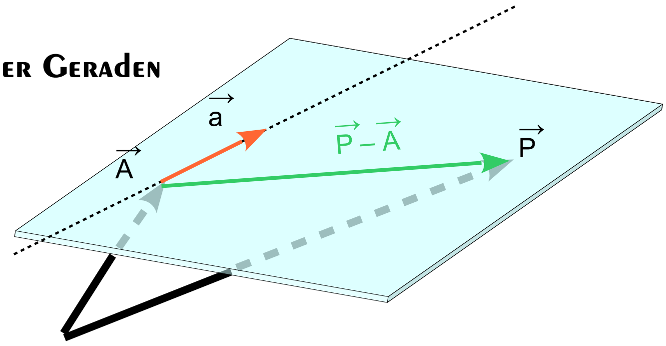


(3) Eine Gerade und ein Punkt nicht auf der Geraden

$$g : \vec{X}_{g} = \vec{A} + t\,\vec{a}$$

$\vec{P}$

$$\boxed{\vec{X} = \vec{A} + t\,\vec{a} + s\,(\vec{P} - \vec{A})}$$

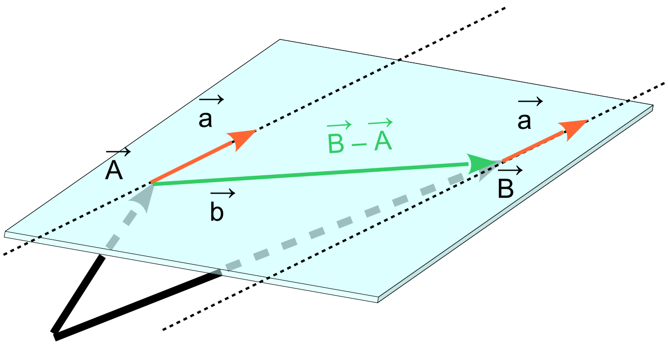


(4) Zwei parallele Geraden

$$g1 : \vec{X}_{g1} = \vec{A} + t\,\vec{a}$$

$$g2 : \vec{X}_{g2} = \vec{B} + t\,\vec{a}$$

$$\boxed{\vec{X} = \vec{A} + t\,\vec{a} + s\,(\vec{B} - \vec{A})}$$



6.4. Koordinatenebenen und Koordinatenachsen

Satz: (Gleichung der Koordinatenachsen):

Parameterdarstellung:

x_1-Achse: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ x_2-Achse: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ x_3-Achse: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Satz: (Ebenengleichung der x_1-x_2-Ebene)

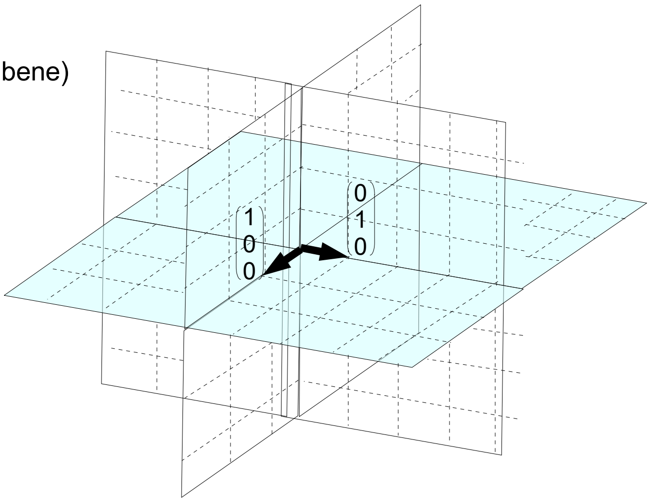
Parameterdarstellung:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung

$x_3 = 0$

Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Satz: (Ebenengleichung der x_2-x_3-Ebene)

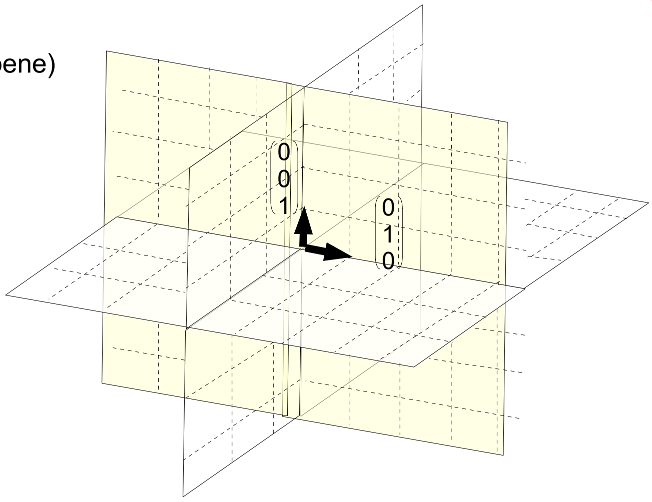
Parameterdarstellung:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung

$x_1 = 0$

Normalenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



Satz: (Ebenengleichung der x_3-x_1-Ebene)

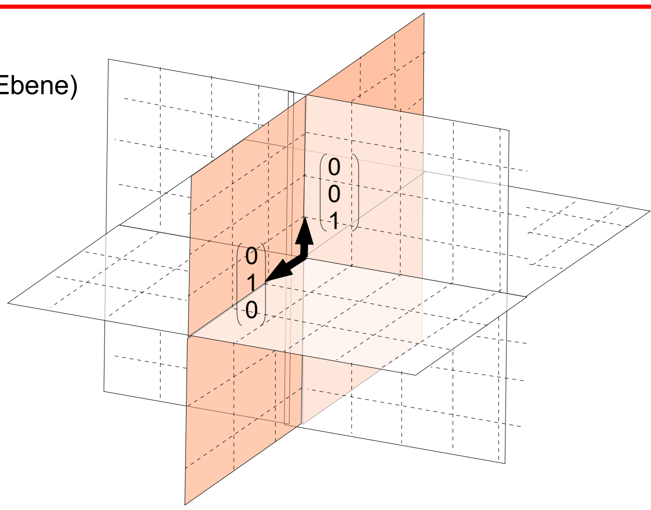
Parameterdarstellung:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung

$x_2 = 0$

Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

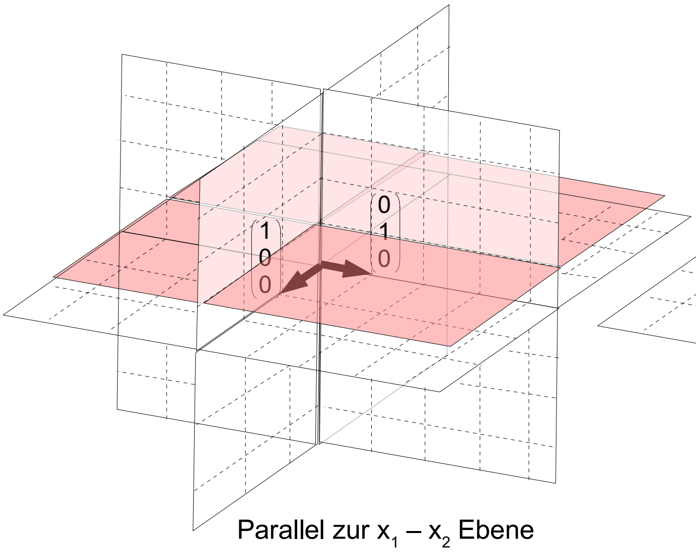


6.5. Ebenen parallel zu Koordinatenebenen

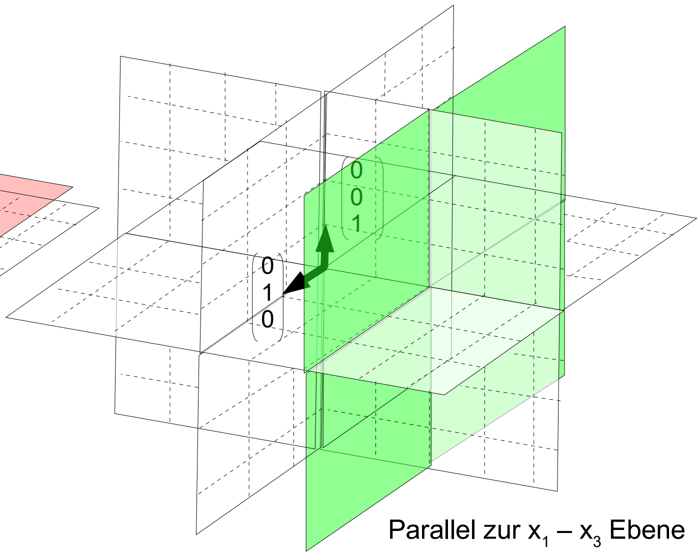
Satz: (Ebene parallel zu einer Koordinatenebene)

	Parameterdarstellung:	Koordinatendarstellung
	$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \bullet \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s \bullet \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$	$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
E || x_1-x_2-Ebene:	$u_3 = 0;\ v_3 = 0$	$cx_3 = d$
E || x_2-x_3-Ebene:	$u_1 = 0;\ v_1 = 0$	$ax_1 = d$
E || x_1-x_3-Ebene:	$u_2 = 0;\ v_2 = 0$	$bx_2 = d$

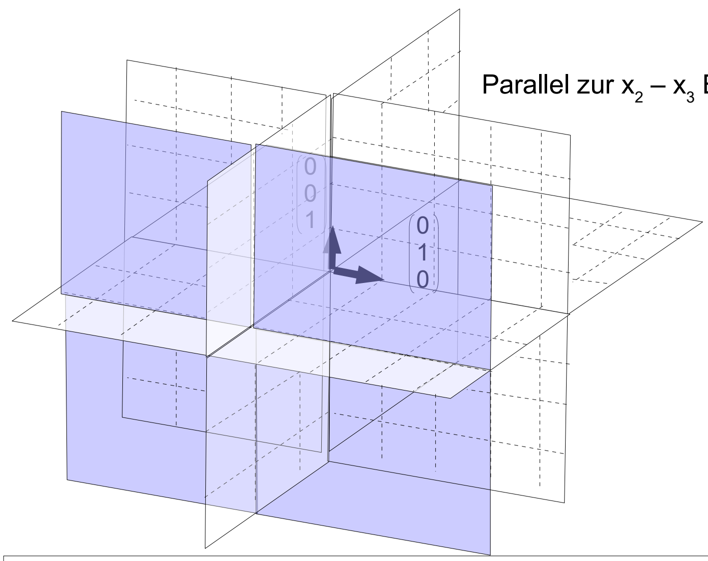
- Keine Spurgerade mit der parallelen Ebene.
- Spurgeraden parallel zu den Achsen
- Keine Spurpunkte mit den Achsen der parallelen Ebene, deshalb nur einen Spurpunkt
- Ebene senkrecht zu zwei Koordinatenebenen
- Die Komponente der Richtungsvektoren der nicht parallelen Achse ist 0
- Normalenvektor hat nur eine von 0 verschiedene Komponente



Parallel zur $x_1 - x_2$ Ebene



Parallel zur $x_1 - x_3$ Ebene



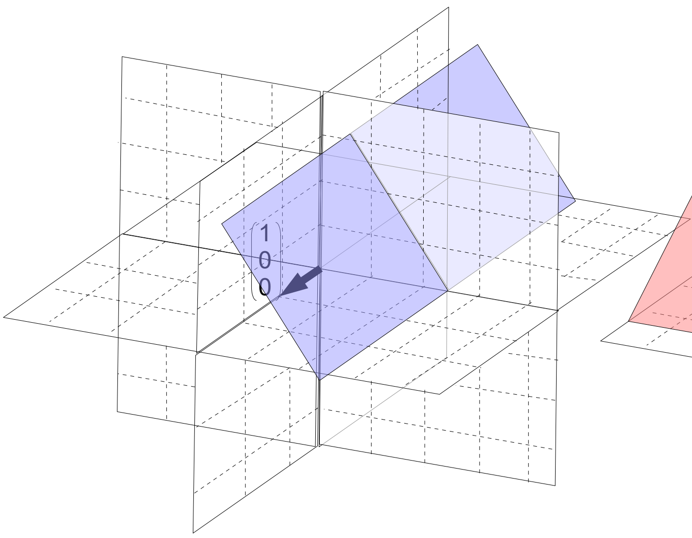
Parallel zur $x_2 - x_3$ Ebene

6.6. Ebenen parallel zu Koordinatenachsen

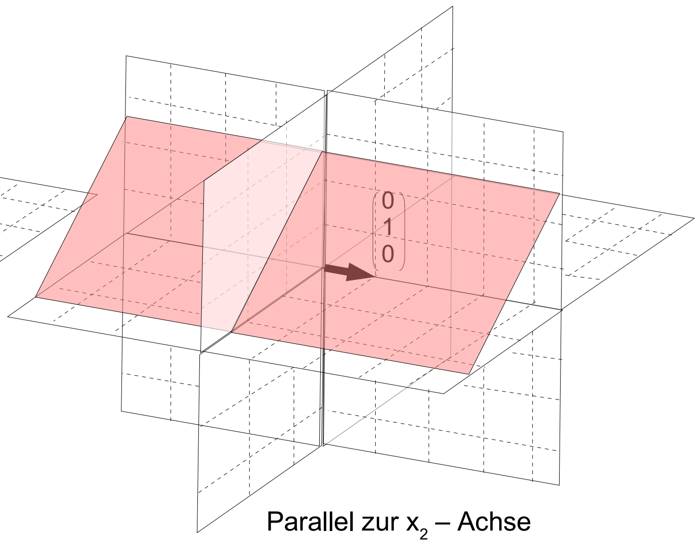
Satz: (Ebene parallel zu einer Koordinatenachse)

	Parameterdarstellung:	Koordinatendarstellung
	$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$	$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
E || x_1-Achse:	$u_2v_3 = u_3v_2$	$bx_2 + cx_3 = d$
E || x_2-Achse:	$u_1v_3 = u_3v_1$	$ax_1 + cx_3 = d$
E || x_3-Achse:	$u_2v_1 = u_1v_2$	$ax_1 + bx_2 = d$

- Zwei Spurgeraden parallel zur parallelen Achse
- Kein Spurpunkt mit der parallelen Achse
- Normalenvektor hat keine Komponente der parallelen Achse, parallel zur Koordinatenebene der anderen beiden Achsen.

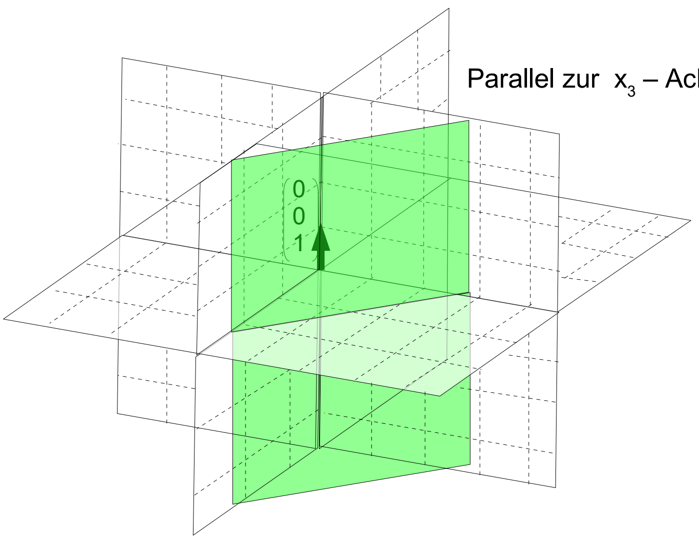


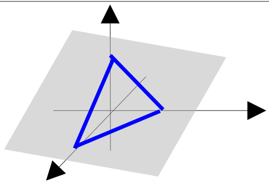
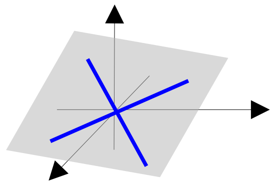
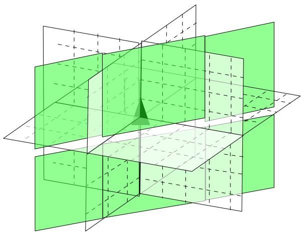
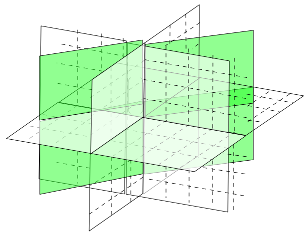
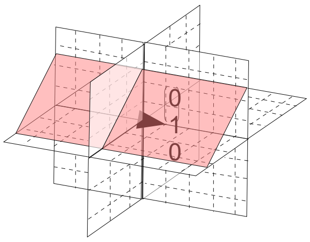
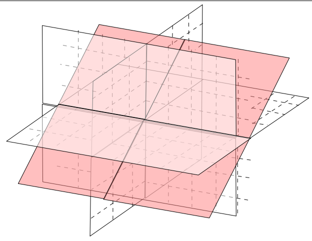
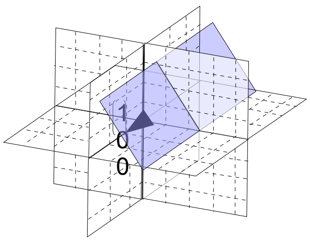
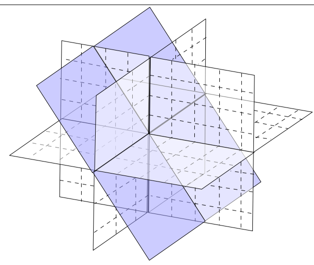
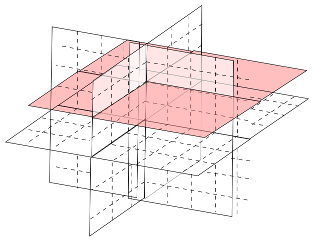
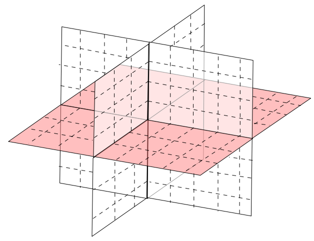
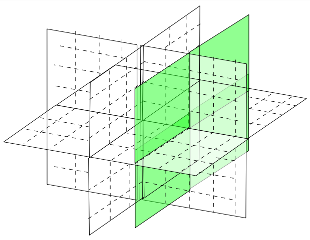
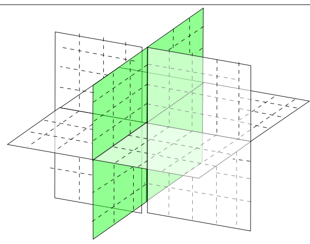
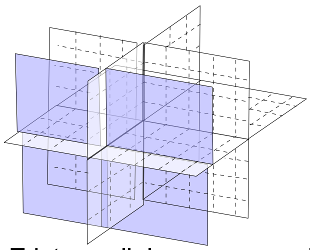
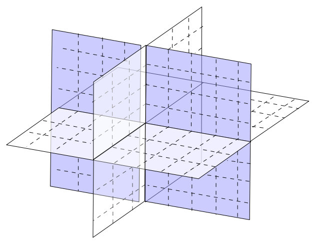
Parallel zur x_1 Achse



Parallel zur x_2 – Achse

Parallel zur x_3 – Achse



a	b	c	$d \neq 0$	$d = 0$
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$		
$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	 E ist parallel zur x_3 – Achse	 E enthält x_3 – Achse
$E \perp x_1 - x_2$ –Ebene				
$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	 E ist parallel zur x_2 – Achse	 E enthält x_2 – Achse
$E \perp x_1 - x_3$ –Ebene				
$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	 E ist parallel zur x_1 – Achse	 E enthält x_1 – Achse
$E \perp x_2 - x_3$ –Ebene				
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	 E ist parallel zur $x_1 - x_2$ – Ebene	 E ist $x_1 - x_2$ – Ebene
$E \perp x_3$ – Achse				
$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	 E ist parallel zur $x_1 - x_3$ – Ebene	 E ist $x_1 - x_3$ – Ebene
$E \perp x_2$ – Achse				
$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	 E ist parallel zur $x_2 - x_3$ – Ebene	 E ist $x_2 - x_3$ – Ebene
$E \perp x_1$ – Achse				

6.8. Spurpunkte einer Ebene

Satz : (Spurpunkte einer Ebene mit Koordinatenachsen)

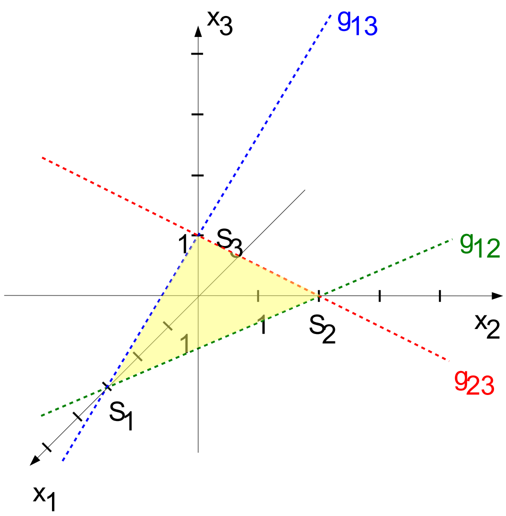
	Parameterdarstellung:	Koordinatendarstellung	
	$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$	$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$	Spurpunkt
x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0$	$x_2 = 0 = p_2 + t\,u_2 + s\,v_2$ $x_3 = 0 = p_3 + t\,u_3 + s\,v_3$	$ax_1 = d$	$\frac{d}{a}$
x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0$	$x_1 = 0 = p_1 + t\,u_1 + s\,v_1$ $x_3 = 0 = p_3 + t\,u_3 + s\,v_3$	$bx_2 = d$	$\frac{d}{b}$
x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0$	$x_1 = 0 = p_1 + t\,u_1 + s\,v_1$ $x_2 = 0 = p_2 + t\,u_2 + s\,v_2$	$cx_3 = d$	$\frac{d}{c}$
	Jeweils zwei Gleichung in t und s, lösen, wenn lösbar dann die Werte in die verbleibende Komponenten einsetzen.		

Beispiel: E: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 6$

$E \cap x_1$-Achse: $x_2 = x_3 = 0$ g: $2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 3$

$E \cap x_2$-Achse: $x_1 = x_3 = 0$ g: $3x_2 = 6$

$E \cap x_3$-Achse: $x_1 = x_2 = 0$ g: $5x_3 = 6$



Parameterdarstellung:

$E \cap x_1$-Achse: $x_2 = x_3 = 0$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0 = -2 + 4\,t + s$

$x_3 = 0 = 4 + t\,(-2) - s1$

$t = -1 \qquad s = 6$

$$x_1 = -4 - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 6 \boxed{= 3}$$

Schnittpunkt mit x_1-Achse

6.9. Spurgeraden einer Ebene

Satz: (Spurgeraden einer Ebene mit Koordinatenebene)

	Parameterdarstellung:	Koordinatendarstellung
	$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$	$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0$ x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0$ x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0$	$x_3 = 0 = p_3 + t\,u_3 + s\,v_3$ $x_1 = 0 = p_1 + t\,u_1 + s\,v_1$ $x_2 = 0 = p_2 + t\,u_2 + s\,v_2$	$ax_1 + bx_2 = d$ $bx_2 + cx_3 = d$ $ax_1 + cx_3 = d$
	Jeweils <ins>**eine**</ins> Gleichung in t und s, auflösen nach einem Parameter in die beiden anderen Koordinaten einsetzen und zusammenfassen.	

Ebenen, die nicht parallel zu Koordinatenebenen sind, hinterlassen in den Koordinatenebenen Spurgeraden, die nichts anderes sind, wie Schnittgeraden zwischen zwei ebenen, von denen eine aber eine Koordinatenebene ist.

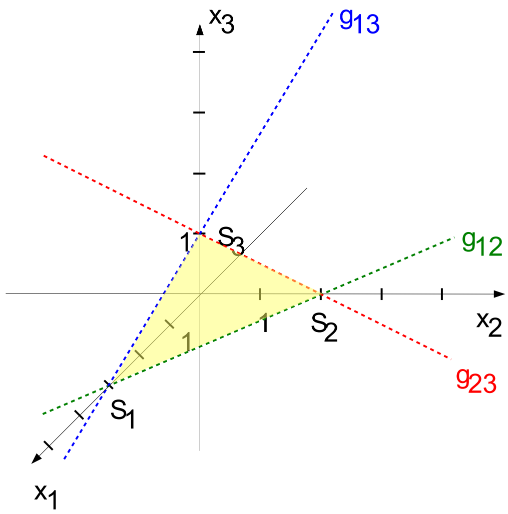
Selbst Ebenen, die zu einer Koordinatenebene parallel sind haben in den beiden anderen Koordinatenebenen Spurgeraden.

Beispiel: E: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 6$

E ∩ x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0$ g: $2x_1 + 3x_2 = 6$

E ∩ x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0$ g: $3x_2 + 5x_3 = 6$

E ∩ x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0$ g: $2x_1 + 5x_3 = 6$



Parameterdarstellung:

E ∩ x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0 = 4 + t\,(-2) - s\,1$

$s = 4 - 2t$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + (4 - 2t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 + 4 \\ -2 + 4 \\ 4 - 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 4 - 2 \\ -2 + 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Für t = – 1 wird der Achsenschnittpunkt (3,0,0) erreicht,
Für t = 0 wird der Achsenschnittpunkt (0,2,0) erreicht,
also Gleichung der Spurgerade

6.10. Musterbeispiele zu Spurgeraden und Spurpunkte

1. Lösungsweg ***(Ebenengleichungen in Koordinatenform)***

E_1: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$

E_2: $x_1 + 4x_2 - 19 = 0$
$x_1 + 4x_2 = 19$

Beide Ebenengleichung in Normalform

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 1 \qquad \frac{x_1}{19} + \frac{x_2}{\frac{19}{2}} = 1$$

Umwandeln in Achsenabschnittsform durch Division der rechten Seite und Verbringen von bleibenden Koeffizienten als Doppelbruch in den Nenner.

Die Werte, die unter der jeweiligen Achse stehen sind die Schnittpunkte der Ebene mit den jeweiligen Koordinatenachsen

Spurpunkte

P_1(4/0/0)	P_1(19/0/0)
P_2(0I2I0) ;	P_2(0I4,75I0) ;
P_3(0/0/2)	P_3 existiert nicht

Spurgeraden in Koordinatenform

Spurgerade in $x_1 - x_2$ Koordinatenebene: $x_3 = 0$

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} = 1 \qquad \frac{x_1}{19} + \frac{x_2}{\frac{19}{2}} = 1$$

Geraden haben im 3-dimensionalen Raum keine Koordinatendarstellung. Diese Geraden sind aber Geraden in einer Ebene und da besitzen Geraden eine Koordinatendarstellung.

Spurgerade in $x_1 - x_3$ Koordinatenebene: $x_2 = 0$

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_3}{2} = 1 \qquad \frac{x_1}{19} = 1 \text{ (Parallele zur } x_3\text{-Achse)}$$

Spurgerade in $x_2 - x_3$ Koordinatenebene: $x_1 = 0$

$$\frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 1 \qquad \frac{x_2}{\frac{19}{2}} = 1 \text{ (Parallele zur } x_3\text{-Achse)}$$

2. Lösungsweg ***(Ebenengleichung in Parameterform)***

Spurgerade in $x_1 - x_2$ Koordinatenebene: $x_3 = 0$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Ebene in Parameterform

Das führt zu einer Bedingungsgleichung für die dritte Komponente:

$$-1 + 2u - 8v = 0$$

mit der Lösung: $u = ½ + 4v$

Dieser Wert ist für u in die Ebenengleichung einzusetzen:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (½ + 4v) \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - 5/2 \\ 0 + 3 \\ -1 + 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -20 + 3 \\ 24 + 2 \\ 8 - 8 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -17 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix}$$

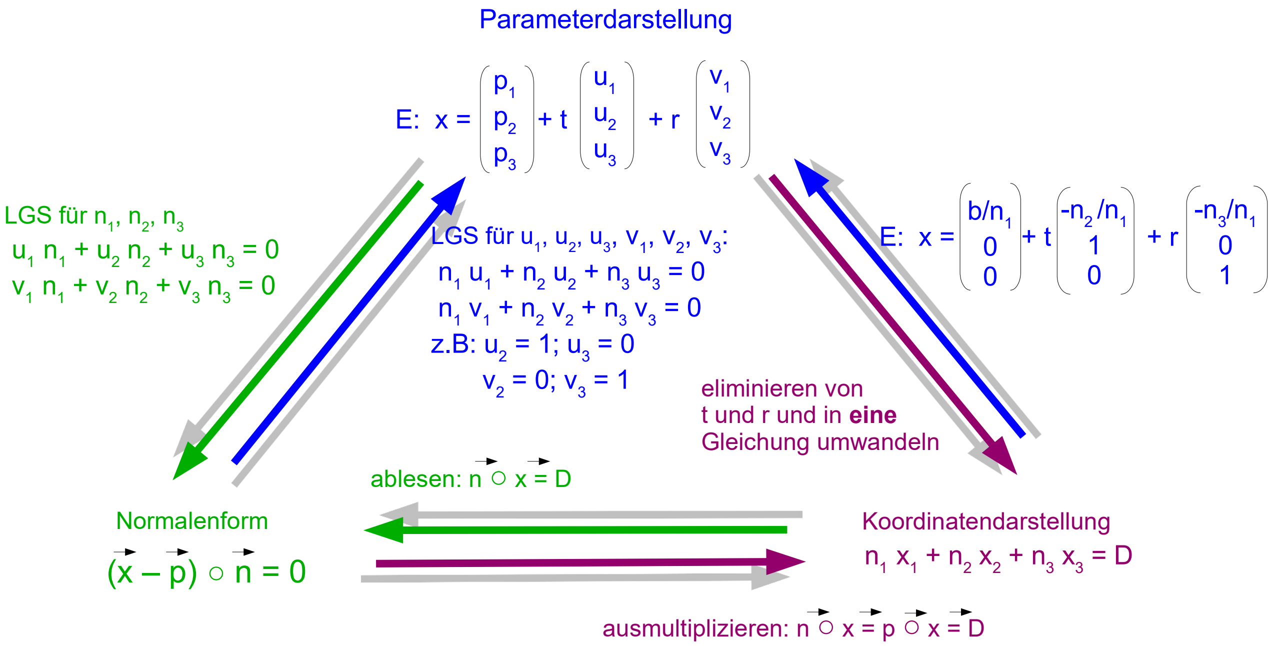
Danach sind alle konstanten Glieder und alle mit v behafteten Glieder zusammenzufassen:

- Die Gerade liegt in der $x_1 - x_2$ Ebene (x_3 Komponente ist 0)
- Der Aufpunkt liegt auf der Ebene ($u = ½ \;\; v=0$)
- Der Richtungsvektor ist eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren der Ebene ($u = 4$, $v = 1$):

$$4 \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit handelt es sich eindeutig um die Spurgerade.

6.11. Umwandeln von Ebenendarstellungen



Umwandeln: (Ebene von Parameterdarstellung in Koordinatendarstellung)

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = D$$

In Kapitel VI wurde bereits darauf hingewiesen, das die Komponenten der Koordinatendarstellung ein Normalenvektor der Ebene darstellen. Damit ist zur Bestimmung der Komponenten n_1, n_2 n_3 folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\boxed{\begin{array}{l} u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3 = 0 \\ v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3 = 0 \end{array}}$$

Das ist ein Gleichungssystem von zwei Gleichung mit drei Variablen. Eine variable ist frei wählbar, dann sind die anderen beiden eindeutig bestimmt.

Dazu ist auch der Artikel am Ende des Dokuments über das Gleichungssystem mit hinzuzuziehen.

Umwandeln: (Ebene von Koordinatendarstellung in Parameterdarstellung)

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = D \quad \Rightarrow \quad E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatendarstellung ist eine Gleichung mit drei Unbekannten. Damit sind jeweils zwei Unbekannte (x_i) frei wählbar und die dritte damit bestimmt. Mit drei Punkten ist über die Drei-Punkte-Form der Ebene die Parametergleichung aufzustellen.

6.12. Ebenenschar (2007 G2 ; 2011 G1)

Ein beliebtes Thema in Abituraufgaben ist das Behandeln von Ebenenscharen. Darunter versteht man Ebenen, bei denen im Richtungsvektor oder dem Normalenvektor (Koordinatendarstellung) ein Parameter auftritt. Ein Parameter im Aufpunkt ist nicht so interessant, weil es dann zu parallelen Ebenen kommt. Ebenen mit Parameter im Aufpunkt und den Richtungsvektoren sind relativ schwer zu händeln und kommen wohl nicht vor.

In diesem Zusammenhang gibt es zwei immer wiederkehrende Aufgabenstellungen:

1. Bestimmen Sie die Schnittgerade, die in allen Ebenen liegt
2. Es gibt Ebenen, die die Schnittgerade enthalten, aber nicht zur Ebenenschar gehören. Bestimmen Sie die Ebenengleichung einer solchen Ebene.

Diesen beiden Aufgabenstellungen soll im folgenden nachgegangen werden, wobei sowohl die Parameterdarstellung der Ebene als auch die die Normalform behandelt werden soll.

6.12.1. Ebenen in Parameterform

Ein Richtungsvektor besitzt einen Scharparameter

Besitzen Ebenen eine Schnittgerade, dann ist die Schnittgerade in allen Ebenen enthalten.

=> Ist nur in einem Richtungsvektor ein Parameter enthalten, ist der Richtungsvektor ohne Parameter der Richtungsvektor der Schnittgeraden.

=> Ein möglicher Aufpunkt dieser Geraden ist der Aufpunkt der Ebenen aus der Schar, wenn dieser keinen Scharparameter enthält.

=> Der Normalenvektor aller Ebenen der Schar muss zu Richtungsvektor der Geraden senkrecht sein (da die Gerade in allen Ebenen liegt)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5t \end{pmatrix}$$

Für s = 0 erhält man eine Gerade, die in allen Ebenen liegt. In diesem Fall liegt die Ebene in der $x_1 - x_2$ Koordinatenebene:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für Geraden in Koordinatenebenen lassen sich auch Koordinatengleichungen angeben, da es sich um Geraden in einem „2 – dimensionalen“ Raum handelt. Es handelt sich dann um die Hessesche Form einer Geradengleichung, die nur im 2-dimensionalen existiert.

Der Normalenvektor eines 2-dimensionalen Richtungsvektors entsteht durch vertauschen der beiden Komponenten und ändern eines Vorzeichens. Damit ist in diesem Beispiel der Vektor

$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein möglicher Normalenvektor. Damit ergibt sich eine Normalform in der Art:

$3x_1 + 4x_2 = d$

Damit bleibt der Wert für d zu bestimmen. Dazu setzt man den Aufpunkt in die Gleichung ein, da dieser auf der Geraden liegen muss, den er hat keinen Scharparameter t. Somit ergibt sich als Koordinatengleichung $3x_1 + 4x_2 = 12$

Beide Richtungsvektoren besitzen einen Scharparameter

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2-t \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5t \end{pmatrix}$$

Vorüberlegung: Wenn es eine Schnittgerade gibt, dann muss

- der Richtungsvektor der Schnittgeraden eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren sein
- der Richtungsvektor unabhängig von dem Parameter t sein.

Damit ist eine Lösung für μ und λ gesucht, bei der kein t mehr auftritt:

$$\mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2-t \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5t \end{pmatrix}$$

Durch kleinweniges Nachdenken findet man, dass μ = 5 und λ = 1 Das Problem löst. Man kann aber auch über eine Bestimmungsgleichung das Problem lösen:

$\mu(2 - t) + \lambda\, 5t = 2\mu + t(-\mu + 5\lambda)$

Der zweite Summand muss für alle t Null sein. Das tritt ur ein, wenn die Bedingung $\mu = 5\lambda$ erfüllt ist. Ein Zahlenpaar, das diese Bedingung erfüllt ist μ = 5 und λ = 1.

Für die beiden bestimmten Werte folgt ein Richtungsvektor von

$$5 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2-t \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Da der Aufpunkt der Ebenenscharen ohne Scharparameter ist, liegt er auf allen Ebenen und somit auf der Schnittgeraden:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Wenn die Berechnung richtig ist, müssen alle Punkte auf der Geraden auch auf allen Ebenen liegen, dh, die Ebenengleichung erfüllen und der Scharparameter herausheben.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2-t \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 - 24u \\ 15u \\ 10u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4r - 4s \\ 0 + 3r \\ 0 + (2-t)r + 5st \end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Zeile folgt, dass für jedes u der Wert von $r = 5u$ sein muss.
Aus der ersten Zeile folgt, wenn man diesen Wert für r einsetzt:

$4 - 24u = 4 - 20u - 4s$

oder

$s = u$

Werden beide Werte für s und r in die dritte Zeile eingesetzt erhält man:

$10u = (2 - t)\, 5u + 5u\, t$

$10u = 10u - 5ut + 5ut = 10u$

Für jeden Punkt auf der Geraden – für jedes u, dass einen Geradenpunkt erzeugt – gibt es eine Kombination von r und s auf der Ebene, so dass der Punkt auf allen Ebenen liegt, da die Koordinaten des Punktes nicht mehr von t abhängen.

Die gefundene Gerade ist die Schnittgerade der Ebenenschar.
(Der Wert für r ist das fünffache von s und entspricht damit dem Verhältnis von μ und λ. Das muss auch so sein, da der Aufpunkt keine Beziehung zum Scharparameter liefert.)

Die folgende Aufgabe soll eine Abituraufgabe aus Bayern gewesen sein.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14/a \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1-3/a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2/a \end{pmatrix}$$

Normalenvektor einer Ebene: $\begin{pmatrix} 1+3/a \\ 2/a \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14/a \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1-3/a \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2/a \end{pmatrix}$$

$$\frac{14}{a} \quad r\left(-1 - \frac{3}{a}\right) \quad - \frac{2s}{a} \quad = -r + \frac{14 - 3r - 2s}{a}$$

r = 4 ; s=1 liefert einen x_3 Wert unabhängig von a

r = 2 ; s = 4 liefert einen x_3 Wert unabhängig von a

Punkt auf allen Ebenen $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Punkt auf allen Ebenen $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor als Linearkombination der beiden Richtungsvektoren

$$(\mathbf{-2})\left(-1 - \frac{3}{a}\right) - \mathbf{3}\,\frac{2}{a} = 2$$

Die Linearkombination r = – 2 und s = 3 liefert einen Richtungsvektor, der von a unabhängig ist. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es ist leicht zu erkennen, dass der zweite ermittelte unabhängige Punkt auf dieser Geraden liegt: t = 1 $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Bestimmt man einen Punkt auf der Geraden, dann muss dieser in allen Ebenen liegen. Die Punktprobe mit der Ebenengleichung muss r und s werte ermöglichen die kein a enthalten dürfen. Es soll der Punkt für t = – 2 untersucht werden. Der entstandene

Punkt hat die Koordinaten: $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$

Die Ebenengleichung führt dazu, dass r = 8 und s = – 5 sein müssen. Die x_1 und x_2 Koordinaten sind damit leicht zu erkennen. Was ergibt sich für diese Parameter als x_3 Koordinate:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14/a \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1-3/a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2/a \end{pmatrix}$$

$$\frac{14}{a} + 8\left(-1-\frac{3}{a}\right) - 5\left(-\frac{2}{a}\right) = -8 + \frac{14}{a} - \frac{24}{a} + \frac{10}{a} = -8$$

Die x_3 Koordinate ist unabhängig von a, also in jeder Ebene enthalten !

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden muss senkrecht auf allen Normalenvektoren stehen:

$\begin{pmatrix} 1+3/a \\ 2/a \\ 1 \end{pmatrix}$ oder: $\begin{pmatrix} a+3 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} i & a+3 & b+3 \\ j & 2 & 2 \\ k & a & b \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2b-2a \\ -ab-3b+ab+3a \\ 2a+6-2b-6 \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1+3/b \\ 2/b \\ 1 \end{pmatrix}$ oder: $\begin{pmatrix} b+3 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$

Der Ergebnisvektor kann unabhängig von a und b gebildet werden, da (a-b) nur ein Verlängerungsfaktor für den Vektor ist.
Der Vektor ist mit dem oben angegebenen identisch.
(Der senkrechte Vektor ist hier mit dem Vektorprodukt bestimmt worden.)

6.12.2. Ebenen in Normalform

Die Komponenten in der Normalform stellen die Komponenten des Normalenvektors dar. Der Richtungsvektor der Geraden muss senkrecht zu diesen Normalenvektoren stehen.
Alle Normalenvektoren zusammen bilden eine Ebene, von der Richtungsvektor der Schnittgeraden der Normalenvektor ist.
Es muss ein Punkt bestimmt werden, der auf dieser Geraden liegt und damit in allen Ebenen vorhanden ist.

Bestimmung der gemeinsamen Schnittgeraden

Die Gerade, die in allen Ebenen vorhanden ist, wird auch Trägergerade der Ebenenschar bezeichnet.
Um diese Gerade zu bestimmen, wenn die Schar in Koordinatenform gegeben ist, gibt es folgende Möglichkeiten:

1. Lösungsweg

Die Ebenengleichung wird auseinandergenommen und in zwei Teile gegliedert. Der eine Teil enthält mit den Koordinatenwerten x_1, x_2 und x_3 keinen Scharparameter, bei dem zweiten Teil werden die Koordinatenwerte zusammengefasst, die einen Scharparameter enthalten und dieser wird gleich ausgeklammert.

Beispiel: $E_a: \; 2(a + 1)x_1 + 2ax_2 + 5(a - 2)x_3 - 4 = 0$

Nach Scharparameter trennen:

$$(2x_1 - 10x_3 - 4) + a\,(2x_1 + 2x_2 + 5x_3) = 0$$

Damit entstehen formal zwei Ebenengleichungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad\;\; - 10x_3 - 4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Die gesuchte Schnittgerade ist die Lösung dieses Gleichungssystems. Als Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 unbekannten muss es eine Parameterlösung geben, wenn es überhaupt eine Lösung gibt.
Wählt man $x_3 = t$ so ergibt sich folgende Lösung: $x_1 = 2 + 5t$ aus erster Zeile
$x_2 = -2 - 7{,}5t$ aus zweiter Zeile
mit der Geradengleichung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 5t \\ -2 - 7{,}5t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -7{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Lösungsweg

Eine weitere Möglichkeit, die Schnittgerade zu bestimmen, ist die Arbeit mit zwei verschiedenen Parameterwerte a und b. Diese Möglichkeit wird in den folgenden Beispielen verwendet und deshalb hier nicht weiter erklärt.

Bestimmung der „Grenzebene“

Häufig wird nach einer Ebene gefragt, in der die Schnittgerade liegt, die aber nicht zur Schar gehört. Diese Ebene könnte man als „Grenzebene“ für $a \to \infty$ bezeichnen. Für $a \to \infty$ spielt der Teil des Normalenvektors, der den Scharparameter enthält eine immer größere Rolle für die Summe. Im Beispiel für die x_1 Richtung mit dem Faktor $2(a+1)$ wird für wachsendes a die „1“ die Bedeutung verlieren und nur noch der Wert 2a ausschlaggebend sein.
Um die gesucht Ebene zu finden, benutzt man wieder die geteilte Version der Ebenenschar:

$$(2x_1 - 10x_3 - 4) + a\,(2x_1 + 2x_2 + 5x_3) = 0$$

Für eine sauberer mathematische Betrachtung teilt man diese Gleichung durch a und untersucht den Grenzübergang für $a \to \infty$. Damit bleibt nur der zweite Teil übrig, da der erste Teil wegen des Faktors 1/a gegen 0 geht.
Damit ist die „Grenzebene“ die Ebene des zweiten Teils:

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

Diese Ebene enthält die Schnittgerade, ist aber selbst nicht Bestandteil der Schar.
Der Aufpunkt der Schnittgeraden ist schon mal Element der Grenzebene. Setzt man die Geradengleichung in die Ebenengleichung ein, erhält man:

$$2 \quad x_1 \quad + 2 \quad x_2 \quad + 5\, x_3$$

$$2(2 + 5t) + 2(-2 - 7{,}5t) + 5\,t = 4 + 10t - 4 - 15t + 5t = 0$$

Damit ist gezeigt, dass die gesamte Gerade in der Ebene enthalten ist. Die Gleichung gilt für alle t.

7. Abstandsberechnungen mit dem Skalarprodukt

In der analytische Geometrie unterscheidet man zwei Typen von Räumen: Der erste ist ein sogenannter **Vektorraum**, der dadurch gekennzeichnet ist, dass in diesem Raum der Koordinatenursprung enthalten ist. (*In jedem Vektorraum muss der Nullvektor vorhanden sein*). Der zweite Raum ist der **affine Raum**, der eine Verschiebung eines Vektorraums darstellt und damit besitzt dieser Raum keinen Nullvektor mehr.
Für den dreidimensionalen Raum kann man sich das so vorstellen: Vektorräume sind alle Ebenen und Geraden, die durch den Ursprung gehen, affine Räume sind alle Ebenen und Geraden, die den Ursprung nicht enthalten.
Außerdem kennt man die Bezeichnung der **Hyperebene**, das sind solche Vektorräume, deren Dimension **genau um 1** niedriger ist, als der gesamte Raum. Im dreidimensionalen erfüllen damit nur die Ebenen die Bedingung einer Hyperebene. Im zweidimensionalen Raum sind Geraden die Hyperebene. Markanteste Eigenschaft solcher Hyperräume ist, dass es **nur einen senkrechten Vektor** (bis auf seine Länge) gibt, so dass wieder alle Vektoren des gesamten Raumes erreicht werden können. Damit bildet die Hyperebene mit ihrem Normalenvektor eine Basis für den Gesamtraum.

7.1. Vektorräume und Unterräume von Vektorräumen

Zu jedem Vektorraum lässt sich eine Basis finden, deren Vektoren paarweise senkrecht zueinander stehen. Im folgenden wird davon ausgegangen, dass man eine solche senkrechte Basis besitzt. Auch, wenn diese Basis tatsächlich berechenbar ist, wird sie hier nicht explizit gebraucht.

Die orthogonale Projektion eines beliebigen Punktes auf einen Vektorraum mit kleinerer Dimension lässt sich berechnen durch

$$\sum (x \circ bi)\, bi$$

Dabei stellt der Ausdruck in der Klammer ein Skalarprodukt dar und die bi sind die Basisvektoren des Vektorraums. Diese Basisvektoren sollen nicht nur paarweise senkrecht sein, sondern auch noch Einheitsvektoren sein, also Vektoren der Länge 1. Eine solche Basis nennt man **orthonormal**. Das bedeutet, die Vektoren der Basis sind **orthogonal** (senkrecht) und auf die **Länge 1 normiert**. Der dadurch erzeugte Vektor liegt in dem Vektorraum, der durch die Vektoren bi erzeugt wird.

<u>Beispiel einer Ebene</u>

$$E:\ \vec{x} = u \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + v \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

Diese Ebene ist ein Vektorraum, da sie keinen Aufpunkt besitzt und damit den Nullpunkt als Aufpunkt hat, der für u=0 und v = 0 erreicht wird. Die beiden Richtungsvektoren a und b sind senkrecht, haben aber noch nicht die Länge 1. Die Vektoren sind auch linear unabhängig. Der Betrag der Vektoren ist 3.

$$a° = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \qquad b° = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

Die Vektoren a° und b° sind senkrecht und haben die Länge 1.

Der Punkt P $\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ liegt nicht in der Ebene.

Die Projektion des Ortsvektors von P in die Ebene ermittelt sich aus: $P_E = (P \circ a°)a° + (P \circ b°)b°$
Da die Ebene ein Vektorraum ist und damit durch den Ursprung geht, ist auch der Fußpunkt des Vektors P in der Ebene

$$P_E = {}^1/_9 \left(\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + {}^1/_9 \left(\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = {}^1/_9 * (-2) \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + {}^1/_9 * (-1) \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = {}^1/_9 \begin{pmatrix}-4\\2\\-5\end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor der Ebene ist: $\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ Dieser Vektor ist senkrecht zu beiden Richtungsvektoren, und zum Projektionsvektor P_E. Damit liegt P_E in der Ebene.

Als nächstes soll der Verbindungsvektor des ursprünglichen Vektors mit dem Projektionsvektor untersucht werden: $P – P_E$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix} - {}^1/_9 \begin{pmatrix}-4\\2\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}22/9\\-11/9\\-22/9\end{pmatrix} = {}^1/_9 \begin{pmatrix}22\\-11\\-22\end{pmatrix}$$

Der Differenzvektor $P – P_E$ liegt senkrecht zur Ebene, das Skalarprodukt mit beiden Richtungsvektoren ist 0, er ist ein Vielfaches des Normalenvektors.

Der Differenzvektor $P – P_E$ liegt im senkrechten Unterraum der Ebene und stellt damit den Abstandsvektor dar, wenn die Projektion auf den senkrechten Unterraum erfolgt.

7.2. Affine Räume

Einen affinen Raum kann man auch darstellen, indem man einen Vektorraum benutzt und einen Stützvektor hinzuaddiert, der nicht dem Nullvektor entspricht.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu jedem Unterraum eines Vektorraumes gibt es einen senkrechten Vektorraum, der mit dem ursprünglichen Unterraum zusammen den ganzen Raum erfasst. Im Falle einer Ebene ist es eine Gerade, die senkrecht auf der Ebene steht und im Falle einer Geraden ist es eine Ebene, die senkrecht auf der Geraden steht. Der Richtungsvektor dieser Geraden ist der Normalenvektor der Ebene. Auch auf diesen senkrechten Unterraum ist eine Projektion möglich, da auch der alle Eigenschaften eines Unterraum erfüllt.

Affine Räume sind üblicherweise solche Räume, mit denen man es bei Geraden und Ebenen zu tun hat. Stellt man die Gleichung so um, dass man den Aufpunkt auf die linke Seite bringt, erhält man folgende Gleichung:

$$\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

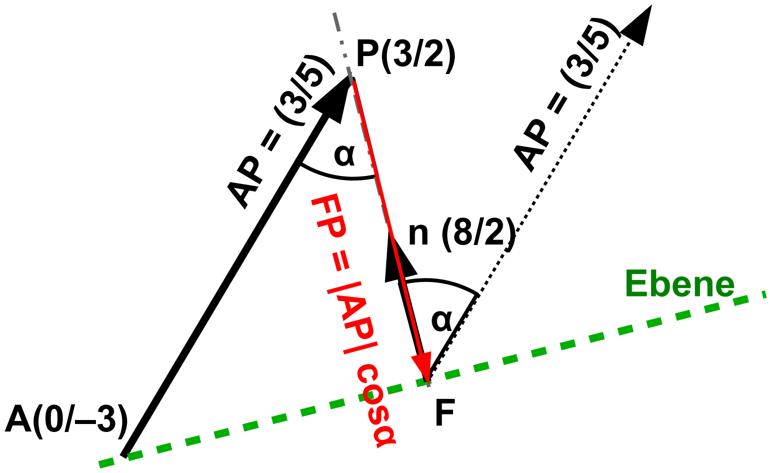
und damit wieder einen Vektorraum.

Verschiebt man eine Ebene um – Aufpunkt, dann erhält man wieder einen Vektorraum. Der Aufpunkt der ursprünglichen Ebene wird zum Nullpunkt in diesem Vektorraum.

Daraus resultiert, dass man es bei Berechnungen von Abständen zu einem Punkt P häufig mit dem Vektor P – A zu tun bekommt, der dann zum Ortsvektor des alten Punktes P wird, wenn der Aufpunkt der Ebene zum Nullpunkt der neuen Ebenengleichung geworden ist.

7.3. Abstandsberechnungen bei Ebenen

(Hier wird vorausgesetzt, dass bekannt ist, dass Abstandsberechnungen bei Ebenen nur möglich sind, über die Hessesche Normalform oder die Koordinatenform. Die Koordinatenform ist eine andere Schreibweise der Hesseschen Normalform. Außerdem ist mit dem Normalenvektor eindeutig die senkrechte Richtung zur Ebene vorgegeben Deshalb kann diese senkrechte Richtung direkt benutzt werden und die Berechnung muss nicht über den Fußpunkt gehen.)



Bei einer Ebene wird für Abstandsberechnungen der Normalenvektor der Ebene benutzt.
Als erstes ist darauf zu achten, dass der Winkel, der mit dem Skalarprodukt berechnet wird, einen gemeinsamen Ausgangspunkt der beiden Vektoren voraussetzt. Damit ist der Winkel, der von den beiden einzigen bekannten Vektoren AP und n eingeschlossen wird, nicht der Winkel, der im Punkt A angesetzt ist, sondern der Vektor AP ist dazu im Punkt F anzusetzen. Auf Grund von Wechselwinkel an Parallelen ist der gleiche Winkel im Punkt P vorhanden.

Damit ist die rote Projektionslinie auf den Normalenvektor wieder

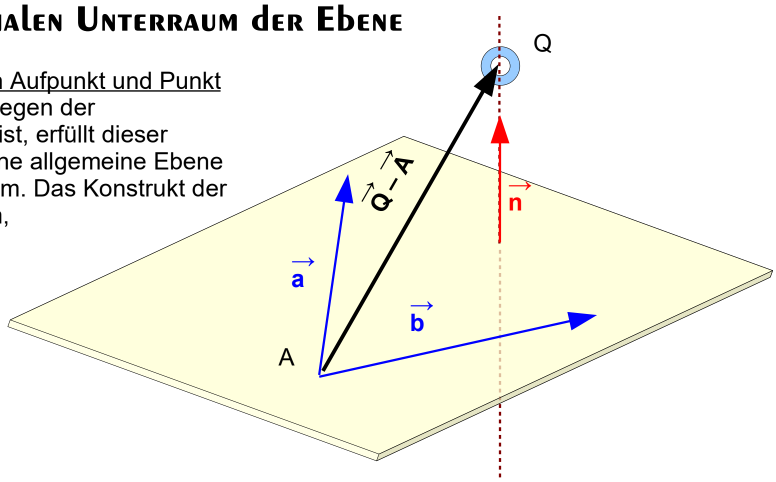
$$FP = AP \cos \alpha$$

Das Skalarprodukt mit dem Normalenvektor führt zu folgender Gleichung

$$n \circ AP = |n|\ |AP| \cos \alpha = |n|\ |FP|$$

Das Skalarprodukt von AP mit dem Einheitsvektor des Normalenvektors n liefert unmittelbar den Abstand des Punktes von der Ebene.

7.4. Projektion auf den orthogonalen Unterraum der Ebene



Wir projizieren den Verbindungsvektor zwischen Aufpunkt und Punkt auf den senkrechten Unterraum einer Ebene. Wegen der Orthogonalität, die an einen Abstand zu richten ist, erfüllt dieser Raum die Bedingungen des Abstandes. Aber eine allgemeine Ebene ist kein Vektorraum, sondern nur ein affiner Raum. Das Konstrukt der Ebene minus des Aufpunktes ist ein Vektorraum, da dieser zwangsläufig den Nullpunkt enthält.

Betrachten wir die Ebene und wollen den Abstand eines Punktes Q zu dieser Ebene bestimmen.

E: $\vec{x} = \vec{A} + u\,\vec{a} + v\,\vec{b}$ affiner Raum

$\vec{x} - \vec{A} = u\,\vec{a} + v\,\vec{b}$ Vektorraum

mit n = a x b enthält man die vollständige Basis für den orthogonalen Vektorraum. Der orthogonale Vektorraum einer Ebene ist die Gerade, deren Richtungsvektor dem Normalenvektor entspricht.
Damit ist

$\left((\vec{x} - \vec{A}) \circ \vec{n}° \right) \cdot \vec{n}°$

- Das Produkt innerhalb der äußeren runden Klammern ist ein Skalarprodukt, und zwar die Projektion des Verbindungsvektors von A nach x auf den Normaleneinheitsvektor. Liegt x in der Ebene ist diese Projektion 0 (damit auch keinen Abstand)
- Das Produkt der äußeren Klammer mit dem zweiten Normalenvektor ein Produkt einer reellen Zahl mit einem Vektor. Setzt man für x gleich Q ein, erhält man die Projektion auf den orthogonalen Raum der Ebene.
- Der orthogonale Raum der Ebene enthält nur einen Basisvektor da er eindimensional ist. Der Basisvektor des orthogonalen Raumes ist der Normalenvektor
- Das Produkt innerhalb der äußeren runden Klammer entspricht genau dem Wert, den man bei Benutzung der Koordinatenform erhält und stellt die Länge des Abstandes dar.
- Multipliziert mit dem Normaleneinheitsvektor ist es der Abstandsvektor des Punktes zur Ebene.

$(\vec{Q} - \vec{A}) \circ \vec{n}°$	**Berechnet den Abstand eines Punktes Q von einer Ebene, da es direkt die Projektion auf den orthogonalen Raum berechnet**

Musterbeispiel

Gesucht ist der Abstand des Punktes zu angegebenen Ebene.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$$

Q (–2 | –3 | 3)

Der orthogonale Unterraum einer Ebene ist eine Gerade mit dem Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor

Für diese Ebene ist $n = \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$ $|n| = \sqrt{30}$ und die Normalform der Ebene E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix} = 0$

$$\vec{Q} - \vec{A} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix} \qquad (\vec{Q} - \vec{A}) \circ \vec{n}° = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix} = \frac{16}{\sqrt{30}} = \frac{16\sqrt{30}}{30} = \frac{8\sqrt{30}}{15}$$

Benutzung der Koordinatenform an Stelle der Normalenform

Das ist genau der gleiche Rechenweg, den man beschreitet, wenn man die Koordinatengleichung für die Berechnung des Abstandes benutzt. Der Wert d der Koordinatengleichung ergibt sich direkt aus dem Skalarprodukt des Aufpunktes mit dem Normalenvektor.

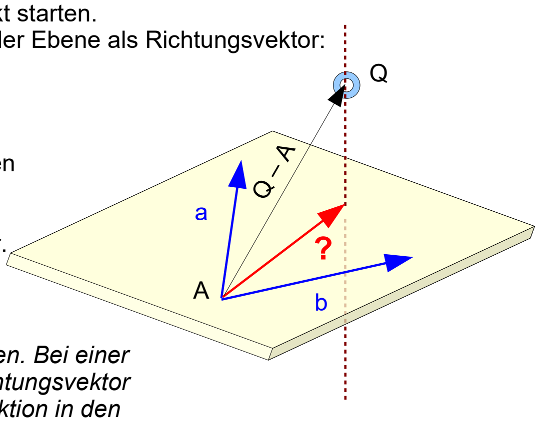
Koordinatengleichung aus der Normalengleichung: $2x_1 - 5x_2 + x_3 = -2$

$$\frac{2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2}{\sqrt{30}} = \text{Abstand}$$

7.5. Berechnung des Lotfußpunktes über den orthogonalen Unterraum der Ebene

Für den Abstand kann man die Berechnung auch über den Fußpunkt starten.
Bestimme eine Gerade mit dem Punkt Q und dem Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor:

$$\boxed{\vec{x} = \vec{Q} + t\,\vec{n}}$$



Diese Gerade verläuft senkrecht zur Ebene, hat also mit dieser einen Schnittpunkt und geht durch den Punkt Q. Der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebenen liefert den Fußpunkt des Lotes und der Differenzvektor dieses Fußpunktes mit Q liefert den Abstandsvektor. Die Länge des Abstandsvektors ist der gesuchte Abstand.

Der Fußpunkt kann nicht so berechnet werden, wie bei einer Geraden. Bei einer Geraden x = Q + t a wird der Differenzvektor von Q – A auf den Richtungsvektor a projiziert, was in der Ebene problemlos geht. Hier erfolgt die Projektion in den Unterraum der Ebene. dies Möglichkeiten werden in den folgenden Abschnitten behandelt.

Musterbeispiel

Gesucht ist der Abstand des Punktes zu angegebenen Ebene.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \qquad Q\,(-2\,|\,-3\,|\,3)$$

Für diese Ebene ist $n = \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$

Geradengleichung: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\3\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$

Durchstoßpunkt mit Ebene in Parameterform

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\3\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2t + s &= -2 + 2r \\ 1 + t + s &= -3 - 5r \\ 1 + t + 3s &= 3 + r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2t + s - 2r &= -3 \\ t + s + 5r &= -4 \\ t + 3s - r &= 2 \end{aligned}$$

$t = -41/15$; $s = 7/5$; $r = -8/15$

<u>Matrizenrechnung</u>

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & -n \end{array} \\ \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\1 & 1 & 5\\1 & 3 & -1\end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix}t\\s\\r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix}$$

Da die Lösung des Gleichungssystems eindeutig ist, existiert eine Inverse Matrix. Deshalb kann man die Lösung angeben mit:

$$\begin{pmatrix}t\\s\\r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\1 & 1 & 5\\1 & 3 & -1\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix}$$

Insbesondere geeignet für Taschenrechner, die Matrizenrechnung beherrschen, für Handrechnung nicht besonders geeignet.

Durchstoßpunkt mit Ebene in Koordinatenform

$$\begin{aligned} 2(-2 + 2\,r) - 5(-3 - 5\,r) + (3 + r) &= -2 \\ -4 + 4r + 15 + 25r + 3 + r &= -2 \\ 30r &= -16 \end{aligned}$$

$$r = \frac{-16}{30} = \frac{-8}{15}$$

Durchstoßpunkt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\3\end{pmatrix} - \frac{8}{15} \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-46/15\\-1/3\\37/15\end{pmatrix}$$

Abstandsvektor: $\begin{pmatrix}-46/15\\-1/3\\37/15\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16/15\\8/3\\-8/15\end{pmatrix}$

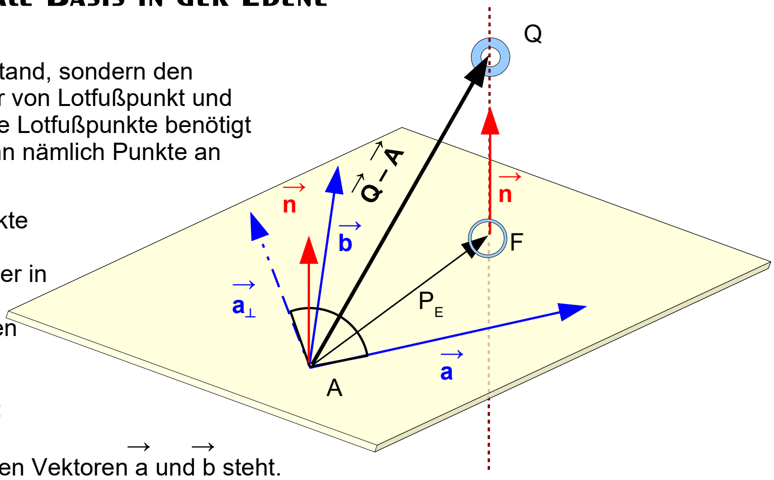
Betrag des Abstandsvektors

$$\sqrt{\frac{16^2 + 40^2 + 8^2}{15^2}} = \sqrt{\frac{1920}{15^2}} = \sqrt{\frac{64 \cdot 30}{15^2}} = \frac{8\sqrt{30}}{15}$$

Der Abstand entspricht dem von 3.1.

7.6. Projektion auf eine orthogonale Basis in der Ebene

(kein Schulstoff)



Die Projektion auf die Ebene liefert nicht den Abstand, sondern den Lotfußpunkt in der Ebene. Der Verbindungsvektor von Lotfußpunkt und Punkt Q liefert dann den Abstandsvektor. Aber die Lotfußpunkte benötigt man auch ohne Berechnung von Abständen, wenn nämlich Punkte an einer Ebene zu spiegeln sind.

Spiegelungen lassen sich nur über die Lotfußpunkte realisieren.
Das Problem ist, wie erzeugt man einen Vektor, der in der Ebene liegt und senkrecht zum Vektor a ist.
Nach Abschnitt 2.1 sind orthogonale Basisvektoren Voraussetzung für die Berechnung.
Für den 3-dimensionalen Raum lässt sich dieses Problem recht einfach über Vektorprodukte lösen:

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

Erzeugt den Normalenvektor, der senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.

$\vec{a}_\perp = \vec{a} \times \vec{n} = \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})$ Erzeugt einen Vektor, der senkrecht zu $\vec{n}$ und senkrecht zu $\vec{a}$ steht.

Da dieser Vektor senkrecht zu $\vec{n}$ steht, muss er in der Ebene liegen, und senkrecht zu $\vec{a}$ ist er nach Definition des Vektorproduktes. Deshalb können $\vec{a}$ und $\vec{a}_\perp$ als senkrechte Basis der Ebene benutzt werden.

$P_E = ((Q\text{-}A) \circ a°)\, a° + ((Q\text{-}A) \circ a_\perp°)\, a_\perp°$ ist dann die Projektion eines Vektors auf die Ebene.

Musterbeispiel

Gesucht ist der Abstand des Punktes zu angegebenen Ebene.

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ Q (–2 | –3 | 3) $\vec{Q} - \vec{A} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix}$

Für diese Ebene ist $n = \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$ $|n| = \sqrt{30}$ und $a \times n = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ $|a \times n| = \sqrt{5}$

Erste Kontrolle: a x n liegt in der Ebene : für r = 1 und s = – 1 ist dieser Vektor eine Linearkombination der Vektoren a und b und damit ein Vektor in der Ebene.

$$P_E = \left[\begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \frac{1}{6} + \left[\begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \frac{1}{5} = -\frac{4}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{7}{5}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{61}{15}\\-\frac{4}{3}\\\frac{22}{15}\end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}-61\\-20\\22\end{pmatrix}$$

Die Faktoren $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$ sichern, dass bei beiden Basisvektoren die Einheitsvektoren benutzt werden, da die Brüche genau das Quadrat der Beträge sind und damit zweimal durch den Betrag geteilt wird.
In den [ ] steht jeweils ein Skalarprodukt.
Der Punkt, der aus Q – A entstanden ist muss jetzt wieder mit dem Vektor A in die Ebene verschoben werden.

$$\begin{pmatrix}-\frac{61}{15}\\-\frac{4}{3}\\\frac{22}{15}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{46}{15}\\-\frac{1}{3}\\\frac{37}{15}\end{pmatrix}$$

ist der Lotfußpunkt der Projektion auf die Ebene.

setzt man die Koordinaten dieses Punktes in die Koordinatengleichung $2x_1 - 5x_2 + x_3 = -2$ ein, sieht man, dass der Punkt auf der Ebene liegt.

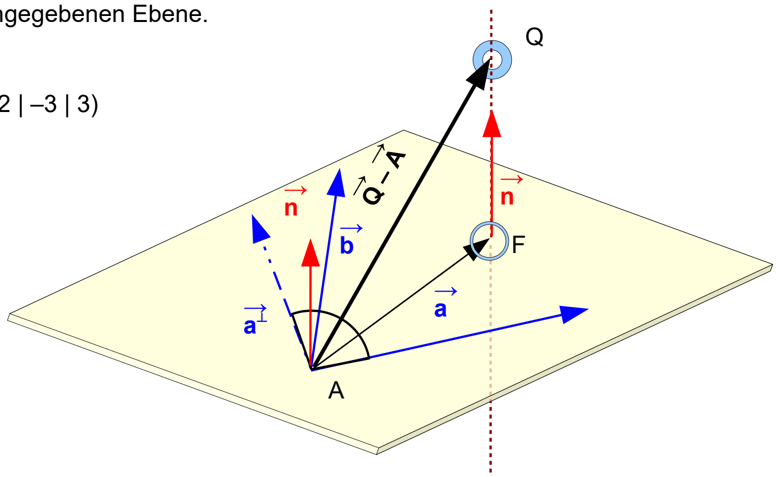
Was noch bleibt, ist der Nachweis, dass der Verbindungsvektor von F mit Q die Richtung des Normalenvektor hat und das der Betrag dieses Verbindungsvektors der Abstand des Punktes zur Ebene ist.

Der Differenzvektor Q – F beträgt: $\begin{pmatrix}\frac{16}{15}\\-\frac{8}{3}\\\frac{8}{15}\end{pmatrix} = \frac{8}{15}\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$ der Vektor $\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$ ist Normalenvektor, damit ist der Verbindungsvektor in Richtung des Normalenvektors, also senkrecht zur Ebene.

Die Länge des Vektors beträgt $\frac{8}{15}\sqrt{30}$ und stimmt damit mit dem Abstand des vorherigen Abschnitts überein.

7.7. Zerlegen des Verbindungsvektors Q – A in die Basis a , a⊥ und n

Gesucht ist der Abstand des Punktes zu angegebenen Ebene.



$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \qquad Q\,(-2\,|\,-3\,|\,3)$$

$$\vec{Q} - \vec{A} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix}$$

Für diese Ebene ist $n = \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix} \quad |\,n\,| = \sqrt{30}$

und $a^{\perp} = a \times n = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \quad |\,a \times n\,| = \sqrt{5}$

Zerlegen des Vektors Q – A heißt: Q – A in der neuen Basis darzustellen. Die zugehörigen Komponenten lassen sich über ein Gleichungssystem berechnen.

$$\begin{array}{ccccccc} & a & & a^{\perp} & & n & & Q\!-\!A \\ t & \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} & + q & \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} & + s & \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix}\end{array}$$

$t = -\,4/3\,;\; q = -\,7/5\,;\; s = 8/15$

Abstandsvektor ist der Anteil des Vektors n an der Zerlegung : $8/15 \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$

identischer Abstandsvektor zur vorhergehenden Seite

Lotfußpunkt setzt sich aus der Linearkombination der beiden Vektoren a und a⊥ zusammen :

$$F = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - 4/3 \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - 7/5 \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-46/15\\-1/3\\37/15\end{pmatrix}$$

$$Q - F = \begin{pmatrix}-2\\-3\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-46/15\\-1/3\\37/15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16/15\\-8/3\\8/15\end{pmatrix} = 8/15 \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$$

Das ist der Abstandsvektor, damit handelt es sich auch tatsächlich um den Lotfußpunkt

Matrizenschreibweise für Zerlegung

$$\underset{(1)}{\begin{pmatrix}1/a^2 & 0 & 0\\ 0 & 1/a^{\perp 2} & 0\\ 0 & 0 & 1/n^2\end{pmatrix}} \underset{(2)}{\begin{pmatrix}- & a & -\\ - & a^{\perp} & -\\ - & n & -\end{pmatrix}} \underset{(3)}{\begin{pmatrix}| & | & | & |\\ a & a^{\perp} & n & Q\text{-}A\\ | & | & | & |\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1/a^2 & 0 & 0\\ 0 & 1/a^{\perp 2} & 0\\ 0 & 0 & 1/n^2\end{pmatrix} \underset{(4)}{\begin{pmatrix}a^2 & a\circ a^{\perp} & a\circ n & a\circ(Q\text{-}A)\\ a^{\perp}\circ a & a^{\perp 2} & a^{\perp}\circ n & a^{\perp}\circ(Q\text{-}A)\\ n\circ a & n\circ a^{\perp} & n^2 & n\circ(Q\text{-}A)\end{pmatrix}}$$

In der Matrix (4) entstehen die einzelnen Element der Matrix als Skalarprodukt einer Zeile der Matrix (1) mit einer Spalte der Matrix (2). Die drei Vektoren a, a⊥ und n sind aber paarweise senkrecht, so daß Skalarprodukte verschiedener Vektoren 0 ergeben und die ersten drei Spalte von (4) eigentlich eine Diagonalmatrix sind.

$$\begin{pmatrix}a^2 & 0 & 0 & a\circ(Q\text{-}A)\\ 0 & a^{\perp 2} & 0 & a^{\perp}\circ(Q\text{-}A)\\ 0 & 0 & n^2 & n\circ(Q\text{-}A)\end{pmatrix}$$

Die verbleibenden Diagonalelemente sind reelle Zahlen, so daß zeilenweise durch diese Elemente dividiert werden kann. Das erreicht man aber auch durch Multiplikation mit der Matrix (1). Da Ergebnis ist dann:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & (Q\text{-}A)_{a^\circ}\\ 0 & 1 & 0 & (Q\text{-}A)_{a^{\perp\circ}}\\ 0 & 0 & 1 & (Q\text{-}A)_{n^\circ}\end{pmatrix}$$

Die Werte der rechten Spalte sind die Anteile des Vektors Q – A in die Richtungen der drei Einheitsvektoren der neuen Basis und damit die gesuchten Werte t, q und s. Das alles ohne Lösen eines Gleichungssystems, nur durch Matrizenmultiplikation. Daß in der Matrix (1) jeweils die Quadrate der Längen stehen sichert, daß sowohl für die Matrix (2) wie auch für die Matrix (3) Einheitsvektoren der Basis gesichert sind.

$$\begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_\perp^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & a & - \\ - & a_\perp & - \\ - & n & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ a & a_\perp & n & Q\text{-}A \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -5 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 30 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1\ 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1\ 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 8/15 \end{pmatrix}$$

Matrizenschreibweise für Fußpunktberechnung

Eine analoge Berechnung kann man durchführen, wenn man nur den Lotfußpunkt berechnen will.

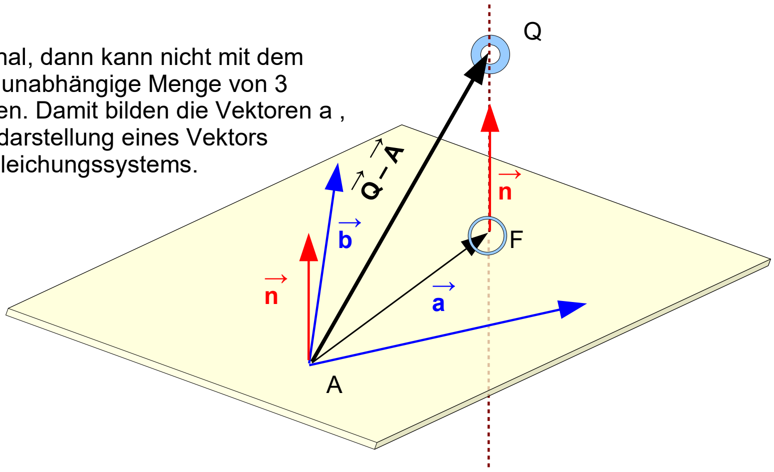
$$\begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/a_\perp^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & a & - \\ - & a_\perp & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ a & a_\perp & Q\text{-}A \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Die Berechnung setzt voraus, daß die drei Basisvektoren senkrecht aufeinander stehen.

7.8. Projektion auf eine nicht orthogonale Basis in der Ebene

(kein Schulstoff)

Sind die Vektoren in der Ebene nicht orthogonal, dann kann nicht mit dem Skalarprodukt gearbeitet werden. Jede linear unabhängige Menge von 3 Vektoren kann als Basis des R^3 benutzt werden. Damit bilden die Vektoren a , b und n eine Basis des R^3. Die Komponentendarstellung eines Vektors bezüglich dieser Basis ist die Lösung eines Gleichungssystems.



Musterbeispiel

Gesucht ist der Abstand des Punktes zu angegebenen Ebene.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad Q\,(-2 \mid -3 \mid 3) \qquad \vec{Q} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für diese Ebene ist $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ermittle die Komponenten des Vektors $\vec{Q} - \vec{A}$ bezüglich dieser neuen Basis:

$$r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad r = -\frac{41}{15} \quad s = \frac{7}{5} \quad k = \frac{8}{15}$$

Die Lösungen für r und s bilden die Faktoren für die Darstellung des Vektors in der Ebene und führen damit direkt zum Fußpunkt des Lotes vom Punkt Q

Fußpunkt auf der Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{41}{15} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{46}{15} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{37}{15} \end{pmatrix}$ Es ergibt sich der gleiche Fußpunkt wie unter 3.2

Der dritte Wert $k = \frac{8}{15}$ liefert die Komponente des Vektors $\vec{Q} - \vec{A}$ in Richtung des Normalenvektors n .

Der Normalenvektor besitzt eine feste Länge. Von dieser Länge werden $\frac{8}{15}$ gebraucht, um in der dritten Komponente den $\vec{Q} - \vec{A}$ Vektor darzustellen. Dies dritte Komponente geht aber genau in die Richtung des senkrechten Abstandes des Punktes Q von der Ebene E. Damit ergibt sich die $\frac{8}{15}$ multipliziert mit der Länge des Vektors als Abstand des Punktes Q von der Ebene E.

Bestand des Punktes Q von der Ebene ergibt sich damit als $\frac{8}{15}\sqrt{30}$, da $\sqrt{30}$ die Länge des Vektors n ist.

<u>Berechnung des Abstandes von Q zum Lotfußpunkt (zur Ebene)</u>

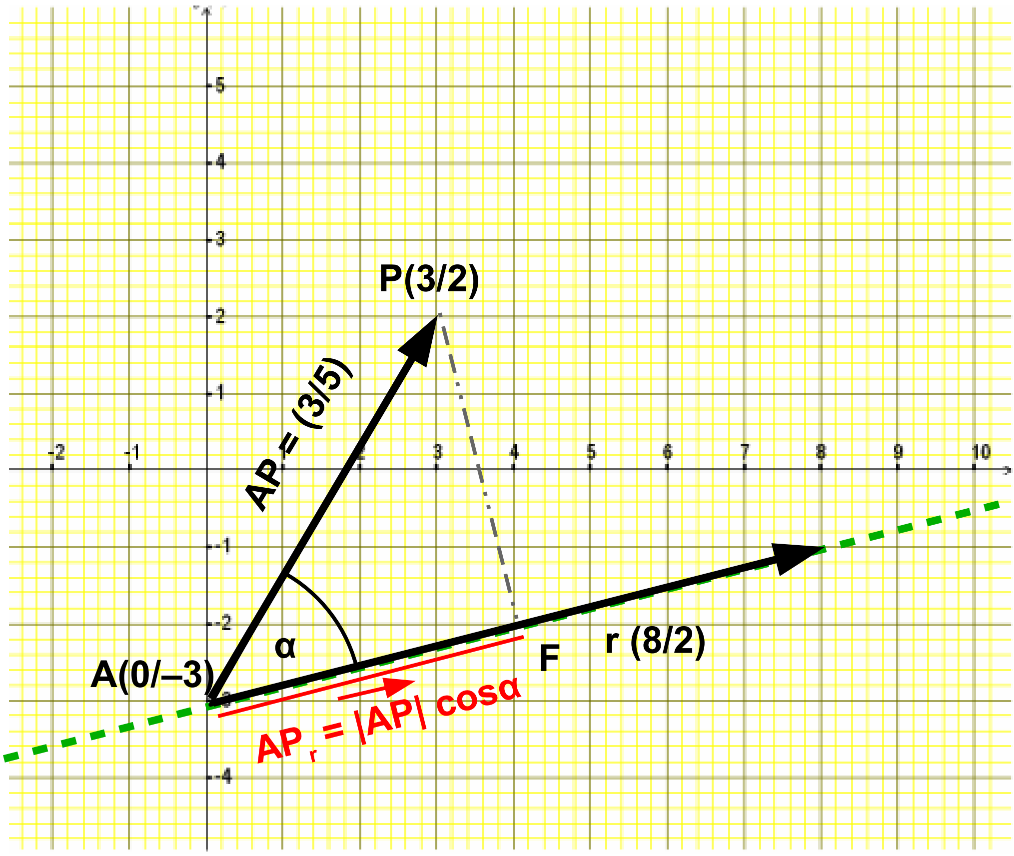
Betrachtet man das gesamte Gebilde Ebene , Richtungsvektoren und Q, so kann man das gesamte Gebilde verschieben, ohne, dass sich an den Werten etwas ändert. Diese Werte bestimmt man „relativ“ zur Ebene. Man arbeitet in einem neuen Koordinatensystem, bei dem der Punkt A der Nullpunkt ist und a, b und n die Koordinatenachsen. In diesem Koordinatensystem ist der Abstand von Q zur Ebene immer konstant.

<u>Berechnung des Lotfußpunktes</u>

Die Koordinaten des Lotfußpunktes liegen im äußeren Koordinatensystem, das von den Achsen x_1 , x_2 und x_3 bestimmt wird. Diese Koordinaten ändern sich, wenn man das ganze Gebilde verschiebt. Deshalb benötigt man einen festen Punkt in dem Gebilde, hier A, von dem aus man den anderen Punkt berechnen kann.

7.9. Abstandsberechnung bei Geraden

Die Projektionseigenschaft des Skalarproduktes für die Berechnung des Abstandes eines Punktes benutzen.
Das Beispiel ist zur besseren Veranschaulichung im R^2 gehalten, die Berechnung läuft im R^3 genau so, nur mit 3 Komponenten statt 2.



Aufgabenstellung:
Gegeben ist eine Gerade g (grün gezeichnet) mit der Gleichung

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und ein Punkt **P(3/2)**

Gesucht ist der Abstand des Punktes P von der Geraden.

(Hier wird vorausgesetzt, dass bekannt ist, dass Abstandsberechnungen bei Geraden nur möglich sind, wenn man den Fußpunktes des Lotes kennt, weil anders die jeweils senkrechte Richtung im R^3 nicht zu bestimmen ist. Alle Abstandsberechnungen bei Geraden laufen darauf hinaus, diesen Fußpunkt F zu bestimmen. Das kann man sich sehr schnell klar machen)

Fasst man zusammen, was als Daten vorhanden ist, stellt man fest:

Einen Aufpunkt der Geraden
Einen Punkt der nicht auf der Geraden liegt
Einen Richtungsvektor der Geraden.

mehr nicht !

Damit stellt sich die Frage, wie lang ist die rote Strecke, um von A zum Punkt F zu kommen ?

Dazu betrachtet man das rechtwinklige Dreieck, dass aus den Seiten AP, AF und PF gebildet wird.
AP ist in diesem Dreieck die Hypotenuse. Also gilt nach Definition des cos in diesem Dreieck:

$$\cos\alpha = \frac{AP_r}{AP}$$

Dabei ist AP_r die gesuchte Strecke $\quad AP_r = AP \cos\alpha$

AP_r ist kein Vektor, sondern nur eine reelle Zahl, eine Länge.
AP_r ist die Projektion (der Schatten) des Vektors AP auf den Vektor r.

AP ist bekannt, aber wo bekommt man den cos α her ?

Jetzt kommt die Vektorrechnung ins Spiel. Den cos eines Winkels bekommt man aus dem Skalarprodukt zweier Vektoren.

$$\mathbf{a \circ b = |a|\ |b| \cos \alpha}$$

In diesem Fall stehen nur die Vektoren AP und r zur Verfügung, andere gibt es nicht !
Der Richtungsvektor r liegt genau auf der Geraden, auf der auch die gesuchte Strecke AP_r liegt.
Der interessierende Winkel ist genau der Winkel, der zwischen diesen beiden Vektoren liegt.
Damit ergibt sich für diesen Fall:

$$\mathbf{r \circ AP = |r|\ |AP| \cos \alpha = |r|\ AP_r}$$

In diesem Ausdruck tritt der komplette Ausdruck für den Abstand auf. Man könnte also zur Berechnung des Abstandes AP_r das Skalarprodukt nehmen, wäre da nicht die störende Größe |r| .
Wie bekommt man die weg ?
Da es sich um ein Produkt handelt, also mit etwas was |r| = 1 erzeugt.
Das ist aber genau dann erfüllt, wenn r selbst ein Einheitsvektor ist.

Das Skalarprodukt von AP mit dem Einheitsvektor des Richtungsvektors r liefert unmittelbar den Abstand des Fußpunktes von Aufpunkt der Geraden.

Der Abstand ist dann die Länge des Vektors PF.

In diesem Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{68}} \\ \frac{2}{\sqrt{68}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{68}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{34}{\sqrt{68}} = \frac{2\ 17}{2\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

Sieht man sich in der Zeichnung die rote Strecke an, so ist diese Hypotenuse in einem Dreieck, dass 4 Einheiten breit ist und eine Einheit hoch, so dass über den Pythagoras eine Länge von $\sqrt{17}$ entsteht. Das ist der Abstand des Aufpunktes vom Fußpunkt.

Wie kommt man jetzt zu den Koordinaten des Fußpunktes. Der berechnete Abstand entspricht natürlich einem t-Wert in der Geradengleichung, der zu den Koordinaten des Fußpunktes führen soll. Wenn man diesen Wert als t in die Geradengleichung einsetzt, sieht man sehr schnell, dass man über den Fußpunkt hinaus kommt. Auch hier ist die Ursache, dass der Richtungsvektor "zu lang" ist und die berechnete Länge vervielfacht. Diese Berechnung funktioniert ebenfalls nur, wenn der Richtungsvektor keine weiteren Längeneinheiten mitbringt, um die berechnete Länge nicht noch einmal zu verlängern, also die Länge 1 hat, also ebenfalls Einheitsvektor ist.

Der Betrag des Richtungsvektors $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist $\sqrt{68} = \sqrt{4 \cdot 17} = 2\sqrt{17}$

Deshalb **muss** die Geradengleichung so aussehen:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \sqrt{17}\ \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor mit der Länge 1 da durch den Betrag des Richtungsvektors dividiert wird.}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

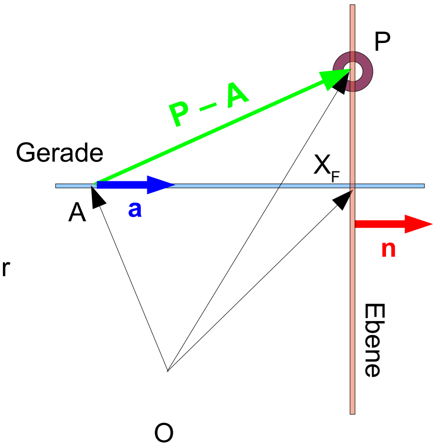
berechneter Abstand

Die Koordinaten dieses Fußpunktes sind aus der Zeichnung deutlich zu erkennen.

7.10. Lotfußpunkt über orthogonalen Unterraum der Geraden

(üblicher Rechenweg in der Schule)

Der fundamentale Unterschied zur Geraden in der Ebene besteht darin dass die senkrechte Richtung nicht bekannt ist, da zu einer Geraden im Raum unendlich viele senkrechte Richtungen existieren. Von diesen ist genau die eine auszusuchen, die zum Punkt P führt. Aus diesem Grund geht ohne Bestimmung des Lotfußpunktes bei Geraden gar nichts !



Hier wendet man einen Trick an:
Alle möglichen senkrechten Richtungen zur Geraden g liegen in einer Ebene, nämlich in der Ebenen für die der Richtungsvektor der Geraden der Normalenvektor ist !
Eine Ebene, die senkrecht zur Geraden ist.
Außerdem soll diese Ebene durch den Punkt P verlaufen.

Teil 1: Bestimme die Ebenengleichung $\boxed{(\vec{x} - \vec{P}) \circ \vec{a} = 0}$

Teil 2: Bestimme den Fußpunkt
Berechne den Durchstoßpunkt der Geraden durch diese Ebene. Das ist der Fußpunkt des Lotes.

Teil 3: Bestimme den Abstandsvektor
Über diesen Fußpunkt und P ist der Abstandsvektor zu bestimmen.

(Analog zur Ebene lässt sich der Fußpunkt auch über die Projektion des Verbindungsvektors P – A auf den Einheitsvektor des Richtungsvektors der Geraden berechnen.)

Musterbeispiel

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P(5 / -1 / 2)$$

Ebenengleichung: $$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Zur Berechnung des Durchstoßpunktes ist für den Vektor x in der Ebenengleichung die Geradengleichung einzusetzen.

$$\begin{pmatrix} 1 + 2s - 5 \\ 3 - s + 1 \\ 0 + s - 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 4s - 10 - (3 - s + 1) + s - 2 = 0$$
$$-14 + 6s = 0 \qquad s = \frac{7}{3}$$

Fußpunktberechnung: $$g : \vec{x}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 7/3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 17/3 \\ 2/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}}$$ ***Lotfußpunkt***

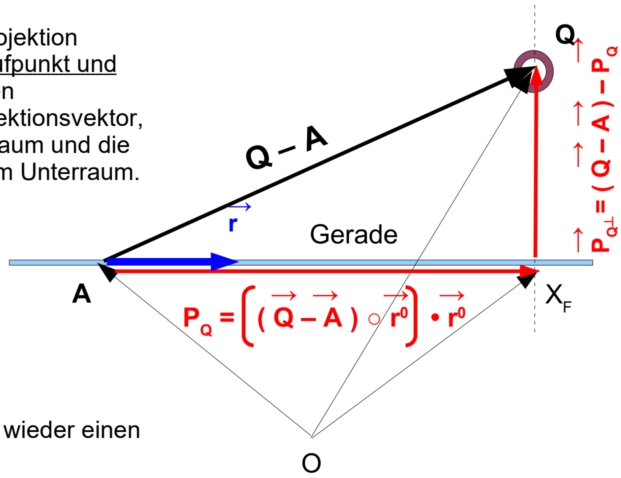
Abstandsvektor X_F – P: $$\boxed{\begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}}$$

Betrag des Abstandsvektors ist der **Abstand**: $d = 1/3 \sqrt{2^2 + 5^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{30} / 3 = 1,8257}$

7.11. Lotfußpunkt über Projektion auf den Unterraum der Geraden

(kein Schulstoff aber nützlich)

Bei dieser Berechnung wird eine andere Eigenschaft der Projektion benutzt. Wir projizieren den Verbindungsvektor zwischen Aufpunkt und Punkt auf den Unterraum der Geraden selbst. Bildet man den Differenzvektor des ursprünglichen Vektors mit seinem Projektionsvektor, dann ist die Richtung dieses Vektors orthogonal zum Unterraum und die Länge des Vektors entspricht dem Abstand des Punktes vom Unterraum.



Wie im Fall einer Ebene liefert die Projektion auf den Unterraum der Geraden genauso den Lotfußpunkt, wie bei einer Ebene und der Abstand ist die Differenz von Lotfußpunkt und Q.

$g:\ \vec{x} = \vec{A} + t\,\vec{r}$ affiner Raum

$\vec{x} - \vec{A} = t\,\vec{r}$ Vektorraum

Die Subtraktion des Vektors A macht aus dem affinen Raum wieder einen Vektorraum.

$\vec{P}_Q = \left[(\vec{Q} - \vec{A}) \circ \vec{r}^\circ\right] \bullet \vec{r}^\circ$	**Berechnet die Projektion eines Punktes Q auf eine Gerade.**

Projektion des Differenzvektors Q - A auf den Vektorraum der Geraden.

$\vec{P}_{Q\perp} = (\vec{Q} - \vec{A}) - \left[(\vec{Q} - \vec{A}) \circ \vec{r}^\circ\right] \bullet \vec{r}^\circ$	**Berechnet die Projektion des Punktes Q auf den orthogonalen Raum.**

Subtraktion des Projektionsvektors von Ausgangsvektor ist der Abstandsvektor des Punktes von der Geraden, da dieser Vektor im orthogonalen Unterraum der Geraden liegt.
Der Betrag dieses Vektors ist der Abstand des Punktes von der Geraden.

Musterbeispiel

$g:\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ Q (5 / –1 / 2) $\vec{Q} - \vec{A} = \begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$ $|r| = \sqrt{6}$ $\vec{r}^\circ = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$P_Q = \boxed{\left((\vec{Q} - \vec{A}) \circ \vec{r}^\circ\right) \bullet \vec{r}^\circ} = \vec{r}^\circ \bullet \vec{r}^{\circ T} \bullet (\vec{Q} - \vec{A}) = \boxed{\frac{1}{|r|^2} \bullet \vec{r} \bullet \vec{r}^T \bullet (\vec{Q} - \vec{A})}$$

(1) (2)

Als Matrizenmultiplikation mit GTR

Berechnung über die vordere Formel (1)

$$P_Q = \left[\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right] \bullet \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{14}{\sqrt{6}} \bullet \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{14}{6} \bullet \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{7}{3} \bullet \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14/3\\-7/3\\7/3\end{pmatrix}$$

Berechnung über die vordere Formel (2)

$$P_Q = \frac{1}{6} \bullet \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}^T \bullet \begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14/3\\-7/3\\7/3\end{pmatrix}$$

PQ ist der Projektionsvektor des Vektors Q – A auf die Gerade.
Addiert diesen Vektor zum Aufpunkt, erhält man den Lotfußpunkt.

$$X_F = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}14/3\\-7/3\\7/3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}17/3\\2/3\\7/3\end{pmatrix}}$$ ***Lotfußpunkt***

Subtrahiert man diesen Vektor von Q – A, erhält man den Abstandsvektor:

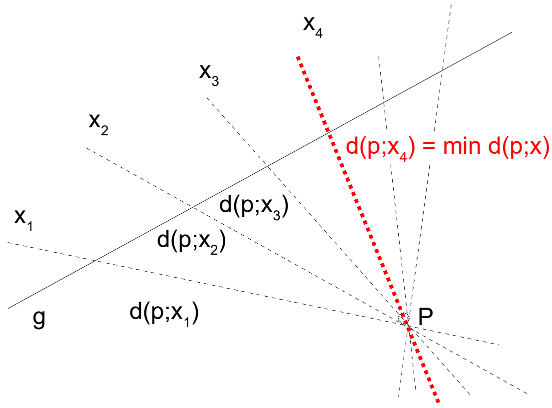
$$(\vec{Q} - \vec{A}) - \vec{P}_Q = \begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}14/3\\-7/3\\7/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\-5/3\\-1/3\end{pmatrix}$$

Der Betrag dieses Vektors ist der Abstand des Punktes Q

$$|(\vec{Q} - \vec{A}) - \vec{P}_Q| = \boxed{\frac{\sqrt{30}}{3} = 1{,}8257}$$ ***Abstand Q von der Geraden***

7.12. Minimum der Abstandsfunktion über Differenzialrechnung

Für jeden Punkt auf der Geraden kann man den Abstand zum Punkt P berechnen. In der Vektorrechnung bestimmt man diesen Abstand über den Betrag des Differenzvektor. Für den Geradenpunkt setzt man die Geradengleichung in Abhängigkeit von t ein.



Abstand ist der Betrag des Differenzvektors:
Abstand zwischen Punkt P und einem Geradenpunkt:

$$d(p;x) = \sqrt{(p_1 - (a_1 + t\,r_1))^2 + (p_2 - (a_2 + t\,r_2))^2 + (p_3 - (a_3 + t\,r_3))^2}$$

Der Abstand zweier Objekte ist immer der kürzeste Abstand. Der Abstand ist hier eine Funktion von t. Für Funktionen erhält man das Minimum einer Funktion über die erste Ableitung.

Musterbeispiel

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$ P(5 / –1 / 2)

Ein beliebiger Geradenpunkt: $\vec{x}(s) = \begin{pmatrix}1+2s\\3-1s\\1s\end{pmatrix}$

als Funktion des Parameter s.

$$\vec{P} - \vec{x}(s) = \begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1+2s\\3-1s\\1s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

1. Lösungsweg

Abstandsformel für diese Gerade:

$$\sqrt{(5-(1+2s))^2 + (-1-(3-1s))^2 + (2-1s)^2}$$ umgerechnet $$\sqrt{(4-2s)^2 + (-4+s)^2 + (2-s)^2}$$

Der kürzeste Abstand wir dort erreicht, wo die Funktion von s ihr Extremum hat.
Damit 1. Ableitung bilden:

Diese Ableitung ist 0 zu setzen, was bedeutet, man braucht nur den Zähler zu betrachten:

$$f'(s) = \frac{-2(4-2s)\,2 + 2\,(-4+s) - 2\,(2-s)}{2\sqrt{(4-2s)^2 + (-4+s)^2 + (2-s)^2}}$$

$$-16 + 8s - 8 + 2s - 4 + 2s = 0$$

$$-28 + 12\,s = 0$$

$$s = \frac{7}{3}$$ *(Dieser Wert entspricht dem von Abschnitt 4.3)*

Setzt man s in die Geradengleichung ein, erhält man den Lotfußpunkt.

Für die normale Berechnung des Abstandes einer Geraden zu einem Punkt spielt dieser Weg kaum eine Rolle, aber für die Berechnung des Abstandes zweier sich bewegenter Objekte ist es eine Möglichkeit den kürzesten Abstand in Abhängigkeit von der Zeit zu bestimmen.

2. Lösungsweg $\vec{P} - \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die oben erstellt Formel der Differenz zwischen P und der Geraden ist mathematisch zunächst eine Gerade. Wenn es auch schwierig ist, diese Gerade geometrisch mit dem dem Abstand und der Geraden in Verbindung zu bringen, so ist doch folgendes klar: Für jedes s liefert die Gerade einen Vektor, der den Abstand des zu diesem s gehörenden Geraden-punktes und dem Punkt P darstellt. Damit ist die Länge dieses Vektors der Abstand von P und g zum Zeitpunkt s.

Der kürzeste Abstand wird erreicht beim Abstand dieser Geraden zum Ursprung. Ist der Abstand zum Ursprung 0, heißt das, x(s) ist in diesem Fall genau P. Für zwei bewegt Objekte bedeutet das, sie sind zum gleichen Zeitpunkt s am gleichen Ort ! (Peng).

Gesucht ist der Abstand dieser Geraden zum Koordinatenursprung:

$\vec{a}(s) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

senkrechte Ebene durch Koordinatenursprung:
$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$

Einsetzen der Geradengleichung in die Ebenengleichung

$$\begin{aligned} 2(4+2s) - (-4 - s) + (2+s) &= 0 \\ 8 + 4s \quad + 4 + s \quad + 2 + s &= 0 \\ 14 + 6s &= 0 \\ s &= -7/3 \end{aligned}$$

$$\vec{a}(-7/3) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - 7/3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Abstandsvektor a (-7/3) – P: $\begin{pmatrix} -17/3 \\ -2/3 \\ -7/3 \end{pmatrix}$

Der Abstandsvektor ist der gleiche, wie in Kapitel 7.11 .

7.13. Projektion auf den orthogonalen Unterraum der Geraden

(kein Schulstoff)

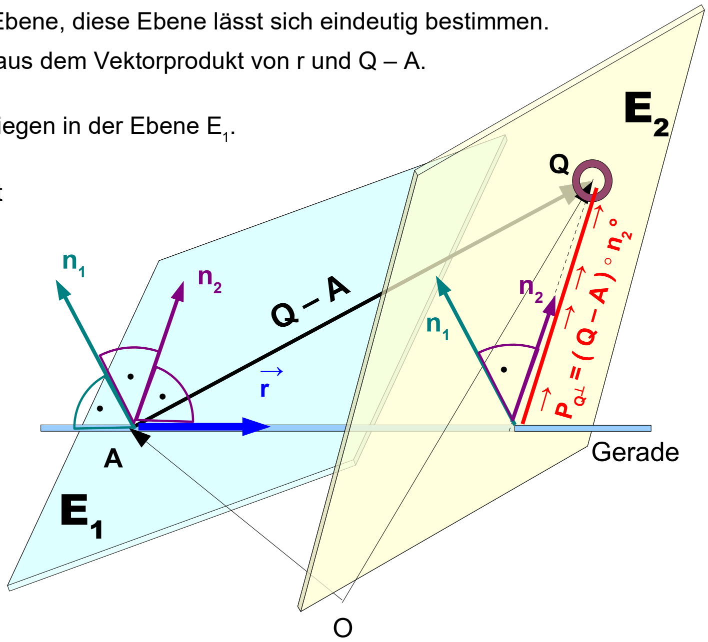
Wir projizieren den Verbindungsvektor zwischen Aufpunkt und Punkt auf den senkrechten Unterraum der Geraden der in Richtung des senkrechten Abstandes verläuft. Damit erreicht man wie bei der Ebene die Projektion direkt auf den orthogonalen Unterraum in Richtung des Abstandes.

Der senkrechte Unterraum einer Graden ist 2-dimensonal. Damit entsteht das gleiche Problem, wie bei der Projektion in eine Ebene in Kapitel 3.2.: Man braucht für diesen Unterraum eine orthogonale Basis. Beide Basisvektoren müssen außerdem senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden sein, da es der orthogonale Unterraum der Geraden sein soll.

Ebene E_1: Ebene von g und Q

Eine Gerade und ein Punkt liegen immer in einer Ebene, diese Ebene lässt sich eindeutig bestimmen.

- Der Normalenvektor der Ebene E_1 : n_1 , entsteht aus dem Vektorprodukt von r und Q – A.
- Damit steht n_1 senkrecht auf r und auf Q – A.
- Die Gerade g und der Verbindungsvektor Q – A liegen in der Ebene E_1.
- n_2 , entsteht aus dem Vektorprodukt von r und n_1.
- Damit steht n_2 senkrecht auf r und auf n_1 und liegt deshalb in der Ebene E_1



Ebene E_2: orthogonale Ebene zu g durch Q

Aus einer Geraden und einem Punkt lässt sich immer eine Ebene konstruieren, die durch den Punkt verläuft und senkrecht zur Geraden liegt. Der Normalenvektor der Ebene ist der Richtungsvektor der Geraden.

- n_1 und n_2 sind zueinander orthogonal und orthogonal zu r und damit orthogonale Basisvektoren der Ebene E_2, die senkrecht zur Geraden g liegt.
- n_2 ist die Richtung des Abstandsvektors von Q zu g, da er senkrecht zu g ist und in der Ebene E_1 von g und Q liegt.
- Die Projektion von Q – A auf n_2^0 liefert den Abstand von Q zu g.

Musterbeispiel

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad Q\,(5 / -1 / 2) \qquad \vec{n}_1 = (\vec{Q} - \vec{A}) \times \vec{r} = \begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \quad \textit{gekürzt}$$

$$\vec{Q} - \vec{A} = \begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{r} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} \qquad |n_2| = \sqrt{30} \qquad \vec{n}_2^\circ = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$$

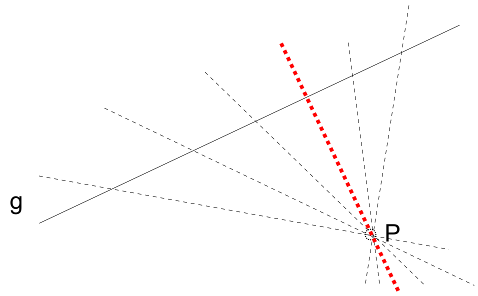
$$|P_{Q\perp}| = (\vec{Q} - \vec{A}) \circ \vec{n}_2^\circ = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}}(-10) = \boxed{-\frac{\sqrt{30}}{3}}$$

Abstand Q von der Geraden

Zur Bestimmung des Abstandsvektors ist dieser Abstand mit n_2^0 zu multiplizieren.

7.14. Bestimmung eines senkrechten Verbindungsvektors

Der Aufpunkt aller Verbindungsgeraden ist P und der Richtungsvektor entsteht aus der Differenz zu einem Geradenpunkt. Ist dieser Verbindungsvektor senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden g, dann ist der kürzeste Abstand zu P erreicht.
Wann zwei Vektoren senkrecht sind prüft man über das Skalarprodukt nach. In diesem Fall muss das Skalarprodukt gleich Null sein.



Musterbeispiel

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P(5 / -1 / 2)$$

Gerade zwischen P und einem beliebigen Geradenpunkt

$$P - x_g$$

$$g' : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5-(1+2s) \\ -1-(3-1s) \\ (2-1s) \end{pmatrix} = (1+t) \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = (1+t)\,\vec{P} - (\vec{A} + s\,\vec{r})$$

Dieser Richtungsvektor muss senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden g sein:

$$\begin{pmatrix} 5-(1+2s) \\ -1-(3-1s) \\ (2-1s) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4-2s \\ -4+s \\ 2-s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\vec{P} - \vec{A} - s\,\vec{r})\,\vec{r} = 0$$

$$(\vec{P} - \vec{A}) \circ \vec{r} - s\,\vec{r} \circ \vec{r} = 0$$

$$2(4-2s) - (-4+s) + (2-s) = 0$$
$$8 - 4s + 4 - s + 2 - s = 0$$
$$14 - 6s = 0 \qquad s = \frac{7}{3}$$

$$s = \frac{(\vec{P} - \vec{A}) \circ \vec{r}}{r^2}$$

Für $s = \frac{7}{3}$ soll der Richtungsvektor der Geraden senkrecht zum Richtungsvektor der Ausgangsgeraden sein.

$$\vec{x} = \vec{P} - \vec{A} + t\,\vec{P} + \frac{(\vec{P} - \vec{A}) \circ \vec{r}}{r^2}\, r$$

$$\begin{pmatrix} 4-2s \\ -4+s \\ 2-s \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2/3 \\ -5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Für ein Skalarprodukt, das 0 sein soll, kann man den Vektor mit 3 und (-1) multiplizieren. $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = (E + \frac{1}{r^2}\,\vec{r} \bullet \vec{r}^{\,T})(\vec{P} - \vec{A}) + t\,P$$

Das Skalarprodukt von $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert tatsächlich den Wert 0.

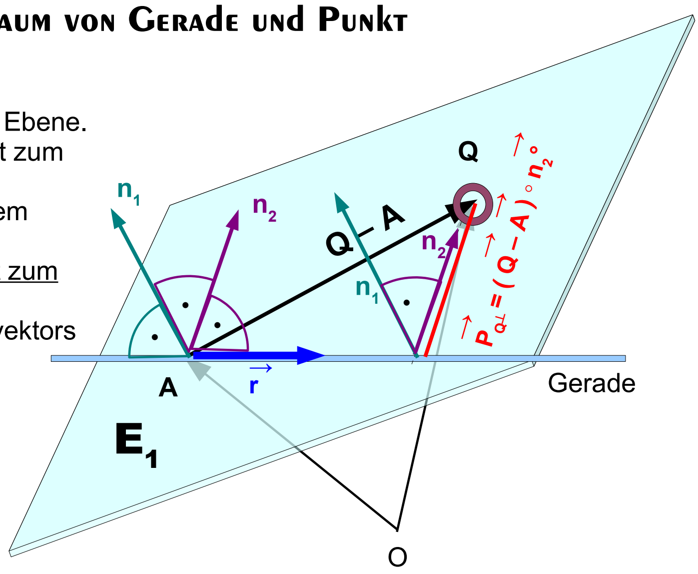
$\begin{pmatrix} -2/3 \\ -5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ ist der Lotvektor von P auf die Gerade.

Der Betrag dieses Lotvektors ist $\boxed{\frac{\sqrt{30}}{3}}$ ***Abstand P von der Geraden***

7.15. Abstandsberechnung im Unterraum von Gerade und Punkt

(für diejenigen, die das Vektorprodukt kennen)

Ein Punkt und eine Gerade liegen immer in einer Ebene.
- Der Normalenvektor dieser Ebene ist senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden
- Das Vektorprodukt des Normalenvektors mit dem Richtungsvektor der Geraden
- liefert einen Vektor in der Ebene und senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden.
- Damit ist es genau die Richtung des Abstandsvektors von P zur Geraden.



Musterbeispiel

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Q (5 / –1 / 2)

Zweiter Richtungsvektor der Ebene aus Aufpunkt und Punkt Q: $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

benutzter Richtungsvektor: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ebene, in der Punkt und Gerade liegen:

$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor dieser Ebene:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt zwischen Normalenvektor und Richtungsvektor der Geraden:

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dieser Vektor muss natürlich nicht identisch sein, mit dem zweiten Richtungsvektor, da die Richtungsvektoren nicht senkrecht sind.

7.14.1. Schnittpunkt mit senkrechte Gerade zu g

Damit ist es möglich, **die** Gerade zu finden, die durch Q geht und senkrecht auf g auftrifft:

$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden liefert den Fußpunkt des Lotes.

Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 + 2s &= 5 + 2t \\ 3 - s &= -1 + 5t \\ s &= 2 + t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2s - 2t &= 4 \\ -s - 5t &= -4 \\ s - t &= 2 \end{aligned}$$

Lösung:
t = 1/3; s = 7/3

Fußpunkt: $h : \vec{x}_F = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 17/3 \\ 2/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}}$ ***Lotfußpunkt***

Der Fußpunkt entspricht genau dem, der auch beim 1. Lösungsweg berechnet wurde.

7.14.2. Projektion Verbindungsvektor auf Abstandsvektor d

Der Vektor d liegt in der Ebene von g und Q und steht senkrecht auf g. Damit ist es die Richtung des senkrechten Abstandes. Das Skalarprodukt von (Q-A) auf den Abstandsvektor d^0 liefert den Abstand es Punktes zur Geraden: Es ist damit nicht notwendig, den Fußpunkt explizit zu berechnen. Es reicht, wenn man den Verbindungsvektor Q – A auf den Einheitsvektor von d projiziert.

$$Q - A = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d^0 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(Q - A) \circ d^0 = \frac{1}{\sqrt{30}}\,(8 - 20 + 2) = -\frac{1}{\sqrt{30}}\,10 = \boxed{-⅓\sqrt{30}}$$

Abstand P von der Geraden

7.14.3. Zerlegen des Verbindungsvektors Q – A in die Basis r, n , r x n

Die drei Vektoren r, n, r x n sind linear unabhängig und sogar noch paarweise senkrecht.

$$\vec{Q} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad n \times r = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

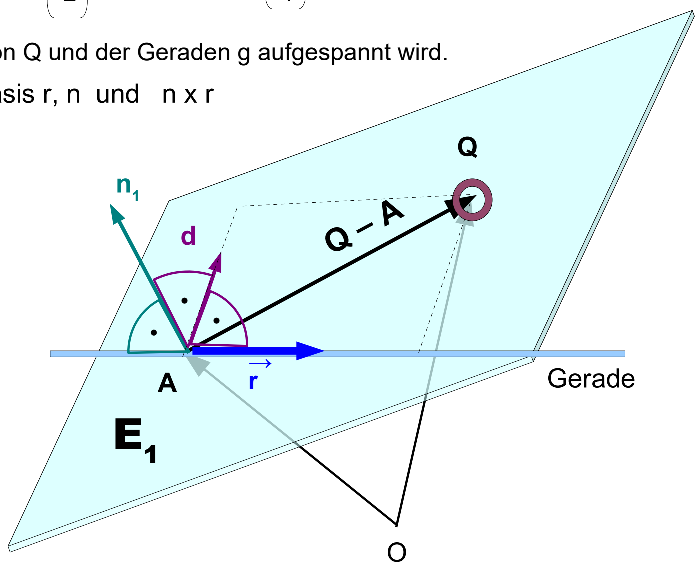
Der Verbindungsvektor Q – A liegt in der Ebene, die von Q und der Geraden g aufgespannt wird.

Zerlegen des Verbindungsvektors Q – A in die Basis r, n und n x r

$$\begin{array}{cccc} r & n & n \times r & Q{-}A \end{array}$$

$$t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung des Gleichungssystems:
t = 2⅓ ; q = 0 ; s = - ⅓



Von dem Vektor n x r wird die Länge von ⅓ gebraucht um in dieser Basis den Vektor Q – A darzustellen.

Der Betrag des Vektors n x r beträgt √30.
Damit beträgt der Abstand zur Geraden

$\boxed{⅓\sqrt{30}}$ ***Abstand Q von der Geraden***

Da der Verbindungsvektor Q – A in der Ebene von r und r x n liegt, ist die Komponente in Richtung n auch 0. Einen Richtungsanteil „aus der Ebene heraus“ gibt es nicht.

Der Anteil in Richtung des Richtungsvektors r beträgt 2 ⅓ = $^7/_3$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{7}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 17/3 \\ 2/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}}$$ ***Lotfußpunkt***

Über diesen Rechenweg bekommt man den Abstand und den Lotfußpunkt direkt.

7.15.4. Verwendung einer Projektionsmatrix

Abstand eines Punktes P von einer Geraden: $x = A + t\,r$

Zunächst Berechnung des Fußpunktes über das Lot l : $F = P + l$

Fußpunkt ist auch Geradenpunkt (r ist senkrecht zu l) $A + t\,r = P + l \quad | \circ r$

$$A \circ r + t\, r \circ r = P \circ r$$

$$t = \frac{(P - A) \circ r}{r^2}$$

t in die Geradengleichung einsetzen liefert den Lotfußpunkt, der aber auch auch über den Punkt P und den Lotvektor erreicht wird. $A + t\,r = F = P + l$

Umstellen der Gleichung nach dem Lotvektor: $A - P + \frac{(P - A) \circ r}{r^2}\, r = l$

Damit muß der Lotfußpunkt nicht explizit berechnet werden.

Der Lotvektor ist der senkrechte Verbindungsvektor vom Punkt P auf die Gerade g.

$$l = A - P + \frac{(P - A) \circ r}{r^2}\, r$$

Da auf dem Bruchstrich der Vektor P – A verwendet wird, wir der davor stehende Vektor auch auf P – A umgeschrieben:

$$l = -(P - A) + \frac{1}{r^2}\left((P\text{-}A)_1 r_1 + (P\text{-}A)_2 r_2 + (P\text{-}A)_3 r_3 \right) \bullet \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$l = -\begin{pmatrix} (P\text{-}A)_1 \\ (P\text{-}A)_2 \\ (P\text{-}A)_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} (r_1)^2 & (r_2 r_1) & (r_3 r_1) \\ (r_1 r_2) & (r_2)^2 & (r_3 r_2) \\ (r_1 r_3) & (r_2 r_3) & (r_3)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (P\text{-}A)_1 \\ (P\text{-}A)_2 \\ (P\text{-}A)_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{l = \left(\frac{1}{r^2} (r \bullet r^T) - E \right) (P - A)}$$

E ist die Einheitsmatrix

Musterbeispiel

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P\,(5 / -1 / 2) \qquad (P - A) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad r^2 = 6$$

$$(r \bullet r^T) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet (2 \;\; -1 \;\; 1) = \begin{pmatrix} (r_1)^2 & (r_2 r_1) & (r_3 r_1) \\ (r_1 r_2) & (r_2)^2 & (r_3 r_2) \\ (r_1 r_3) & (r_2 r_3) & (r_3)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} (r_1)^2 & (r_2 r_1) & (r_3 r_1) \\ (r_1 r_2) & (r_2)^2 & (r_3 r_2) \\ (r_1 r_3) & (r_2 r_3) & (r_3)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/6 & -1/6 \\ 1/3 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{r^2} (r \bullet r^T) - E = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -5/6 & -1/6 \\ 1/3 & -1/6 & -5/6 \end{pmatrix}$$

$$l = \left(\frac{1}{r^2} (r \bullet r^T) - E \right) (P - A) = \boxed{\begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}}$$ ***Abstandsvektor***

s. Abstandsvektor in Kapitel 7.10.

7.16. Abstand bewegter Objekte

(in der Schule nicht behandelt, aber im Abitur gebraucht)

Was ist darunter zu verstehen. In einer Abituraufgabe ging es um die Flugbahn von zwei Flugzeugen, und den **kürzesten Abstand der beiden Bahnen**. Das ist die normale Abstandsberechnung, wie sie im ersten Teil durchgeführt wird. Außerdem sollte berechnet werden, **zu welcher Zeit die beiden Flugzeuge den kürzesten Abstand** haben. Dieser kürzeste Abstand ist von der Wahl der beiden Geradenparameter und der Länge der beiden Richtungsvektoren abhängig. Denn, wenn auch die Bahn einen kürzesten Abstand hat, heißt das nicht, dass die beiden Flugzeuge zur gleichen Zeit dort sind. Gefragt ist also der Zeitpunkt der kürzesten Entfernung.
Die Aufgabe soll hier auch erst einmal ganz allgemein angegangen werden.

Es gibt zwei Geradengleichungen:

$g_1 : \vec{x} = \vec{P_1} + t\,\vec{a_1}$ $\qquad$ $g_2 : \vec{x} = \vec{P_2} + k\,\vec{a_2}$

1) Es muss bei dieser Rechnung davon ausgegangen werden, dass das erste Flugzeug in einer Zeiteinheit die Länge des Vektors a_1 zurücklegt und das zweite Flugzeug die Länge des Vektors a_2. Diese beiden Vektoren sind damit <u>**nicht**</u> auf einen Einheitsvektor zu bringen. Damit werden im Prinzip unterschiedliche Geschwindigkeiten gekennzeichnet.
2) Bei beiden Flugzeugen muss man davon ausgehen, dass sie zum Zeitpunkt 0 jeweils am Ort ihrer Aufpunkte waren, sonst müssten konkrete Punkte zum Zeitpunkt 0 angegeben werden und die Geradengleichung auf die neuen Startpunkte als Aufpunkte umgeschrieben werden.
3) Im Gegensatz zu sonstigen Schnittpunktberechnungen <u>sind hier die beiden Parameter t und k gleich zu setzen</u>, weil für beide Flugzeuge die gleiche Zeit vom Start vergangen ist.
4) Der Abstand zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 lässt sich berechnen aus der Formel: $g_1(t_0) - g_2(t_0)$. Der Betrag des Abstandes soll hier mal weggelassen werden und ein eventuelles negatives Vorzeichen akzeptiert sein.

7.16.1. Berechnung über Differenzialrechnung

Der Abstandsvektor zwischen zwei Geradenpunkten zu gleichen Zeitpunkt t :

$$\vec{P_1} + t\,\vec{a_1} - (\vec{P_2} + t\,\vec{a_2})$$

Von diesem Abstandsvektor ist der Betrag zu bestimmen:

$$\sqrt{\left(\vec{P_1} - \vec{P_2} + t\,(\vec{a_1} - \vec{a_2})\right)^2}$$

Unter der Wurzel handelt es sich um ein Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst, deshalb heben sich Quadrat und Wurzel nicht auf. In Komponentenschreibweise würde das folgendermaßen aussehen:

$$\sqrt{\left(P_{1x} - P_{2x} + t\,(a_{1x} - a_{2x})\right)^2 + \left(P_{1y} - P_{2y} + t\,(a_{1y} - a_{2y})\right)^2 + \left(P_{1z} - P_{2z} + t\,(a_{1z} - a_{2z})\right)^2}$$

Diese Formel ist nichts anderes, als die Summe der Quadrate der Komponenten des Abstandsvektors.
Nah der Binomische Formel ergibt sich folgender quadratischer Ausdruck in t :

$$\sqrt{(\vec{P_1} - \vec{P_2})^2 + 2\,t\,(\vec{P_1} - \vec{P_2})\circ(\vec{a_1} - \vec{a_2}) + t^2\,(\vec{a_1} - \vec{a_2})^2}$$

t ist die gesuchte Variable und die Koeffizienten davor sind jeweils Skalarprodukte aus zwei Vektoren.
Da Skalarprodukte immer reelle Zahlen liefern ist der Ausdruck unter der Wurzel eine quadratische Funktion in t.

Von diesem Abstand zweier Punkte auf den Geraden zur jeweils gleichen Zeit ist der kürzeste zu bestimmen.
Der Abstand ist eine Funktion des Parameters t.

=> Differenzialrechung => 1. Ableitung => Minium

Eine Möglichkeit ist, die Funktion in den GTR einzugeben und das Minimum ausrechnen zu lassen.

7.16.2. Berechnung über Skalarprodukt

Wie sieht es aus, wenn man das von Hand rechnen würde.
Die Ableitung unterliegt der Kettenregel, wobei der Ausdruck unter der Wurzel als innere Ableitung zu berücksichtigen ist. Bei der Ableitung der Wurzel kommt der gesamte Wurzelausdruck in den Nenner und hat damit auf das Nullsetzen keinen Einfluß mehr. Für das Null setzen ist also nur noch die innere Ableitung von Bedeutung.
Man kann auch argumentieren, dass der Minimale Abstand zwar durch die Wurzel ausgedrückt wird, aber die Stelle an der der Minimale Abstand erreicht wird ist die gleiche, wenn man ohne Wurzel rechnet.

$$\sqrt{(\vec{P_1} - \vec{P_2})^2 + 2\,t\,(\vec{P_1} - \vec{P_2})\circ(\vec{a_1} - \vec{a_2}) + t^2\,(\vec{a_1} - \vec{a_2})^2}$$

Die innere Ableitung der Wurzel nach t ergibt folgenden Ausdruck:

$$2\,(\vec{P}_1 - \vec{P}_2)\circ(\vec{a}_1 - \vec{a}_2) + 2\,t\,(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2$$

Für die Berechnung des Extremwertes muß diese 1. Ableitung Null gesetzt werden.

$$2\,(\vec{P}_1 - \vec{P}_2)\circ(\vec{a}_1 - \vec{a}_2) + 2\,t\,(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = 0$$

Die Gleichung lässt sich durch 2 dividieren und der Ausdruck mit t auf die andere Seite bringen:

$$(\vec{P}_1 - \vec{P}_2)\circ(\vec{a}_1 - \vec{a}_2) = -\,t\,(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2$$

$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2$ ist als Skalarprodukt eine reelle Zahl, so daß durch diese Zahl dividiert werden kann:

Damit erhält man den Zeitpunkt des kürzesten Abstandes

$$t = -\frac{(\vec{P}_1 - \vec{P}_2)\circ(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)}{(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2}$$

und als zugehörigen Abstandsvektor

$$\vec{x} = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) - \frac{(\vec{P}_1 - \vec{P}_2)\circ(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)}{(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2}\,(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)$$

7.16.3. Berechnung über Matrizen

Wenn man diese Gleichung $(\vec{P}_1 - \vec{P}_2)\circ(\vec{a}_1 - \vec{a}_2) + t\,(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = 0$ ganz ausführlich im Sinne der Vektorrechnung

schreibt, müßte man folgenden Ausdruck schreiben:

$$(\vec{P}_1 - \vec{P}_2)^T \circ (\vec{a}_1 - \vec{a}_2) + t\,(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^T \circ (\vec{a}_1 - \vec{a}_2) = 0$$

Da Matrizenmultiplikation immer als Zeilenvektor mal Spaltenvektor definiert ist, muß der erste Vektor eine Zeile sein und deshalb transponiert werden. nach den Rechenregeln für Matrizen gilt das Distributivgesetz, so dass man den zweiten Vektor in beiden Summanden ausklammern kann.

$$\left((\vec{P}_1 - \vec{P}_2)^T + t\,(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^T\right) \circ (\vec{a}_1 - \vec{a}_2) = 0$$

$$\left((\vec{P}_1 - \vec{P}_2) + t\,(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)\right)^T \circ (\vec{a}_1 - \vec{a}_2) = 0$$

Beim Vertauschen des Transponierens müssen die Faktoren vertauscht werden:

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^T \circ \left((\vec{P}_1 - \vec{P}_2) + t\,(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)\right) = 0$$

Für die Berechnung als Gleichungssystem muß der Vektor als erste Spalte stehen und der Vektor mit umgekehrten Vorzeichen als rechte Seite in der zweiten Spalte:

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2) \circ \begin{pmatrix} t\,(\vec{a}_1 - \vec{a}_2) & -(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis dieses Matrizenproduktes lässt sich direkt mit rref weiter berechnen. Der zurückgegebene Lösungsvektor hat die Struktur $(\,1 \quad t_0\,)$

Auf Grund der Struktur der Matrix muß als erstes t_0 stehen und als zweites – 1. Dieser Vektor ist als Spaltenvektor

neu zu erstellen. $\begin{pmatrix} t_0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Multipliziert man diesen Vektor von rechts mit der Matrix, erhält man den minimalen Abstandsvektor dessen Betrag der minimale Abstand der beiden bewegten Objekte ist.

7.16.4. Berechnung über Differenzgerade

Bereits in Abschnitt 7.16.1 ist gezeigt, es handelt sich um die folgende Differenz, die zum Minimum gemacht werden soll.

$$\vec{P}_1 + t\,\vec{a}_1 - (\vec{P}_2 + t\,\vec{a}_2)$$

Ordnet man die einzelnen Elemente etwas um ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\vec{P}_1 - \vec{P}_2 + t\,(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)$$

Das ist aber nichts anderes als eine Geradengleichung mit dem Stützvektor $\vec{P}_1 - \vec{P}_2$ und dem Richtungsvektor $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)$

$$\vec{x} = \vec{P}_1 - \vec{P}_2 + t\,(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)$$

Was hat diese Gerade mit dem Abstand zu tun ?

1) Der Vektor x auf der linken Seite ist der Abstandsvektor von g_1 und g_2 zu jedem Zeitpunkt t
2) Die Länge dieses Abstandsvektors ist der Abstand der beiden beweglichen Objekte zu diesem Zeitpunkt
3) Von diesen Abstandsvektoren ist der kürzeste zu finden.
4) Der Vektor x auf der linken Seite ist auch ein Ortsvektor vom Koordinatenursprung zu einem Geradenpunkt zum Zeitpunkt t.
5) Von diesen Ortsvektoren ist der kürzeste zu finden.
6) Der Kürzeste ist immer der senkrechte Abstand.

=> Gesucht ist der Abstand des Koordinatenursprungs zu Geraden nach ganz normaler Vektorrechnung.

Das liefert für den Abstand zum Ursprung wieder die bereits bekannte Formel

$$\vec{x} = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) - \frac{(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \circ (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)}{(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2}\,(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)$$

7.16.5. Musterbeispiel

$f_1 : x = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad f_2 : x = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Flugbahnen zweier Flugzeuge

f_1		f_2	Differenz
$7 + 3t$	–	$(18 + 2t)$	$= -11 + t$
$29 - 2t$	–	$(11 + 2t)$	$= 18 - 4t$
$7 - t$	–	(7)	$= -t$

Der Differenzvektor ist die Differenz zum gleichen Zeitpunkt. Von diesem Differenzvektor ist jetzt das Minimum zu suchen über die Methoden der Differenzialrechnung. Der Abstand ist der Betrag dieses Vektors

$$d = \sqrt{(-11 + t)^2 + (18 - 4t)^2 + (-t)^2}$$

Das ist eine Funktion von t, von der das Minimum zu berechnen ist.

Lösungsweg 1 : Differenzialrechnung

$$d' = \frac{2(-11+t) + 2(18-4t)(-4) + 2(-t)(-1)}{2\sqrt{(-11 + t)^2 + (18 - 4t)^2 + (-t)^2}}$$

$-22 + 2t - 144 + 32t + 2t = 0$
$-166 + 36t = 0$
$t = 166/36 = \mathbf{4{,}61}$

$d = \sqrt{(-6{,}39)^2 + (-0{,}44)^2 + (-4{,}61)^2}$
$= 7{,}89$

Die geringste Entfernung beider Flugzeuge beträgt ca. 7,89 km

Lösungsweg 2 : Gleichung über Skalarprodukt aus Differenzialrechnung

Im Dokument zur Vektorrechnung ist für dieses Problem eine Formel hergeleitet worden:

$$t = -\frac{(P_1 - P_2) \circ (a_1 - a_2)}{(a_1 - a_2) \circ (a_1 - a_2)} = -\frac{\begin{pmatrix} -11 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}} = -\frac{-11 - 72}{1 + 16 + 1} = \frac{83}{18} = 4{,}61$$

$$\vec{P_1} - \vec{P_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a_1} - \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösungsweg 3 : Gleichung über Matrizenprodukt

Berechnung in Matrixschreibweise:

$$\begin{array}{cc} a_1\text{-}a_2 & \begin{array}{cc} a_1\text{-}a_2 & \text{-}(P_1\text{-}P_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ -4 & -18 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = (18 \quad 83)$$

$\text{rref}(18 \quad 83) = (1 \quad 83/18)$ $\qquad t = 83/18$

Auf Grund der Zusammenstellung der Matrix kann mit dem Ergebnisvektor nicht direkt weitergearbeitet werden. In der Matrix steht in der ersten Spalte der Richtungsvektor, der mit dem Faktor t zu multiplizieren ist in in der zweite Spalte der negative Stützvektor der Differenzgeraden. Deshalb muß ein spezieller Lösungsvektor erstellt werden:

$\begin{pmatrix} 83/18 \\ -1 \end{pmatrix}$ Dieser Vektor kann dann mit der Matrix multipliziert werden und liefert den Abstandsvektor.

Der Betrag dieses Vektors liefert den minimalen Abstand der beiden Objekte.

Lösungsweg 4 : Abstand des Ursprungs von der Geraden

$$x = (P_1 - P_2) + t\,(a_1 - a_2) = \begin{pmatrix} -11 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung: $x \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Geradengleichung in Ebenengleichung einsetzen:

$$\left(\begin{pmatrix} -11 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Die Gleichung liefert beim Auflösen nach t genau die Formel, die im obigen Text hergeleitet wurde.

8. Projektion einer Geraden

8.1. Projektion einer Geraden auf Koordinatenebenen

8.1.1. Theoretische Überlegungen

Will man von einer gegebenen Geraden die Projektion der Geraden auf eine Koordinatenebene berechnen, muss der Wert der Koordinatenachse, die diese Ebenen nicht enthält, gleich 0 sein.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Soll die Projektionsgerade in der x_1x_2 Ebene bestimmt werden, dann ist die x_3 Komponente 0 zu setzen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Projektion in x_1x_2 Ebene: $x_3 = 0$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Projektion in x_2x_3 Ebene: $x_1 = 0$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Andererseits liefern zwei Projektionsgerade die Ausgangsgerade, die diese beiden Projektionen erzeugen.

8.1.2. Geradengleichung aus Projektionsgeraden erstellen

Projektionsgerade in der x_1x_2 Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Projektionsgerade in der x_2x_3 Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Aus der Herleitung von Projektionsgeraden ist klar, dass $u_2 = v_2$ sein muss, die Komponente des Richtungsvektors, in die nicht projiziert wurde muss gleich sein. Ist das nicht der Fall, muss ein Richtungsvektor so multipliziert werden, dass die beiden Komponenten übereinstimmen.
Dann ist die Komponente u_1 der Teil des Richtungsvektors für die erste Komponente und v_3 der Teil des Richtungsvektors für die dritte Komponente.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 = v_3 \end{pmatrix}$$

Probleme bei der Berechnung bereitet der Aufpunkt, da die beiden Punkte der Projektions-geraden nicht unbedingt die Durchstoßpunkte der Gerade durch die Koordinatenebenen sein müssen. Nur diese würden auch auf der Ausgangsgerade liegen.

Da die Punkte aber durch Projektion entstanden sind, muss es einen Punkt $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ c \end{pmatrix}$ geben der auf der Geraden liegt.

und es muss einen Punkt $Q \begin{pmatrix} d \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ geben, der auf der Geraden liegt.

Damit entsteht ein Gleichungssystem der Geraden mit einem Aufpunkt und einem weiteren Geradenpunkt:

$$\begin{pmatrix} d \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} d &= p_1 + t\,u_1 \\ q_2 &= p_2 + t\,u_2 \\ q_3 &= c + t\,u_3 \end{aligned}$$

umgestellt als Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} p_1 &= d - t\,u_1 \\ q_2 - p_2 &= t\,u_2 \\ q_3 &= c + t\,u_3 \end{aligned}$$

$$t = \frac{q_2 - p_2}{u_2} \qquad c = q_3 - \frac{q_2 - p_2}{u_2} u_3 \qquad d = p_1 + \frac{q_2 - p_2}{u_2} u_1$$

8.1.3. Musterbeispiel

Projektion in x_1x_2 Ebene:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Projektion in x_2x_3 Ebene:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Da die x_2 Komponenten des Richtungsvektors identisch sein müssen, ist der zweite Richtungsvektor durch 3 zu dividieren. Damit ergibt sich für den Richtungsvektor der Geraden:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In der Praxis wird man das Gleichungssystem für den Aufpunkt erstellen und direkt berechnen, da es sich in Abhängigkeit der Koordinatenebenen, in die projiziert wurde auch ändert. Hier sollen die Formeln benutzt werden und die Lösung des Gleichungssystem zu bestätigen:

$u_1 = -2;\quad u_2 = 1;\quad u_3 = 1$

$p_1 = 3\,;\quad p_2 = -1;$

$q_2 = 0;\quad q_3 = -1$

$$t = \frac{q_2 - p_2}{u_2} \qquad c = q_3 - \frac{q_2 - p_2}{u_2} u_3 \qquad d = p_1 + \frac{q_2 - p_2}{u_2} u_1$$

$$t = 1 \qquad c = -1 - 1 \cdot 1 = -2 \qquad d = 3 + 1 \cdot (-2) = 1$$

Geradengleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für t = 1 entsteht der Geradenpunkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

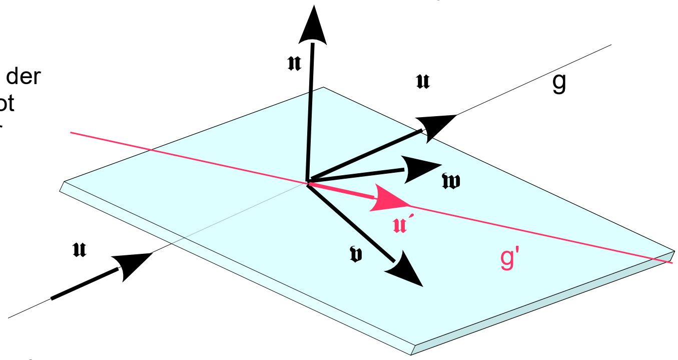
Bei der Projektion des Aufpunktes in die x_1x_2 Ebene entsteht der Aufpunkt der ersten Projektionsgeraden, bei Projektion des zweiten Punktes in die x_2x_3 Ebene entsteht der der Aufpunkt der zweiten Projektionsgeraden.

8.2. Projektion einer Geraden auf eine Ebene

(Kein Schulstoff)

Gegeben ist eine Ebenen im R^3 und eine Gerade im R^3. Gesucht ist die senkrechte Projektion der Geraden auf die Ebene.
– Schatten der Geraden, wenn das Licht senkrecht zur Ebene, aber nicht parallel zur x_3 Achse einfällt. -

Zur besseren Veranschaulichung wurden die beiden Richtungsvektoren der Ebene und der Normalenvektor der Ebene im Durchstoßpunkt der Ebene und nicht am Aufpunkt angesetzt. Die rot eingezeichnete Gerade g' ist die Projektion der Geraden g auf die Ebene.



Die Ebene sei in Parameterform gegeben.

$$E: \ \vec{x} = \vec{Q} + t\,\vec{v} + s\,\vec{w} \quad \text{mit } \vec{v}, \vec{w} \neq 0$$

$$g: \ \vec{x} = \vec{P} + t\,\vec{u} \quad \text{mit } \vec{u} \neq 0$$

Ohne Normalenvektor ist diese Aufgabe nicht zu lösen.

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$$

Ist die Ebene in Normalenform gegeben, können die beiden Lösungswege 1 und 2c benutzt werden, da diese die Richtungsvektoren der Ebene nicht benutzen.

8.2.1. Bestimmung des Lotfußpunktes von zwei Geradenpunkten

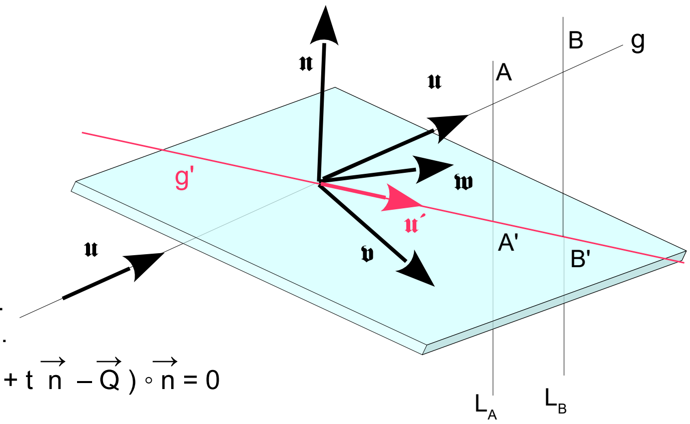
Auf der Geraden g werden zwei Punkte bestimmt und das Lot von den beiden Punkten auf die Ebene gefällt. Die Fußpunkte der beiden Lotvektoren sind Punkte der projizierten Geraden g' und damit kann aus den beiden Punkten die Geraden g' bestimmt werden.

$$\vec{A} = \vec{P} + t_1\,\vec{u} \qquad \vec{B} = \vec{P} + t_2\,\vec{u}$$

Anschließend werden die Lotgeraden LA und LB aufgestellt. Der Richtungsvektor dieser Geraden ist der Normalenvektor der Ebene.

$$L_A: \ \vec{x} = \vec{A} + t\,\vec{n} \qquad L_B: \ \vec{x} = \vec{B} + t\,\vec{n}$$

Da der Normalenvektor bereits berechnet wurde, sind die Schnittpunkte am einfachsten durch Einsetzen der Geradengleichungen in die Normalen- oder Koordinatengleichung der Ebene zu berechnen.



$$(\vec{A} + t\,\vec{n} - \vec{Q}) \circ \vec{n} = 0 \qquad (\vec{B} + t\,\vec{n} - \vec{Q}) \circ \vec{n} = 0$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt jeweils die Berechnung eines Parameter t . Setzt man diesen Parameter in die zugehörige Geradengleichung ein, erhält man die Durchstoßpunkte A' und B'. Aus den Punkten A' und B' lässt sich die projizierte Geradengleichung erstellen.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -24 \\ 26 \\ -19 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 18 \\ 35 \\ 45 \end{pmatrix} \qquad E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Als Punkt A lässt sich der Aufpunkt der Geraden verwenden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -24 \\ 26 \\ -19 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Als Punkt B ergibt sich für t = 1:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 61 \\ 26 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalenform der Ebene

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Geradengleichung in die Ebene einsetzen, aber als Skalarprodukte stehen lassen:

$$\left[\begin{pmatrix} -24 \\ 26 \\ -19 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -25 \\ 26 \\ -21 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ 26 \\ -21 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\vec{A} + t\,\vec{n} - \vec{Q}) \circ \vec{n} = [(\vec{A} - \vec{Q}) + t\,\vec{n}] \circ \vec{n} = (\vec{A} - \vec{Q}) \circ \vec{n} + t\,\vec{n} \circ \vec{n} = 0$$

Skalarprodukte sind reelle Zahlen, deshalb kann man mit ihnen dividieren. Löst man die Gleichung nach t auf entsteht folgender Ausdruck:

$$-\frac{(\vec{A}-\vec{Q})\circ\vec{n}}{|\vec{n}|^2}=t$$

Solche Skalarprodukte lassen sich ohne großen Aufwand mit einem GTR berechnen:

$-25\cdot(-3)+26\cdot 7+(-21)\cdot 1=236$

$-3\cdot(-3)+7\cdot 7+1\cdot 1=59$

$$t=-\frac{236}{59}=-4$$

$$L_A:\vec{A}'=\begin{pmatrix}-24\\26\\-19\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}-3\\7\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\-2\\-23\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}-6\\61\\26\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\7\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}-3\\7\\1\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}-7\\61\\24\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\7\\1\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}-3\\7\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\61\\24\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-3\\7\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\7\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-3\\7\\1\end{pmatrix}=0$$

$$(\vec{B}+t\,\vec{n}-\vec{Q})\circ\vec{n}=[(\vec{B}-\vec{Q})+t\,\vec{n}]\circ\vec{n}=(\vec{B}-\vec{Q})\circ\vec{n}+t\,\vec{n}\circ\vec{n}=0$$

$$-\frac{(\vec{B}-\vec{Q})\circ\vec{n}}{|\vec{n}|^2}=t$$

$-7\cdot(-3)+61\cdot 7+24\cdot 1=472$

$-3\cdot(-3)+7\cdot 7+1\cdot 1=59$

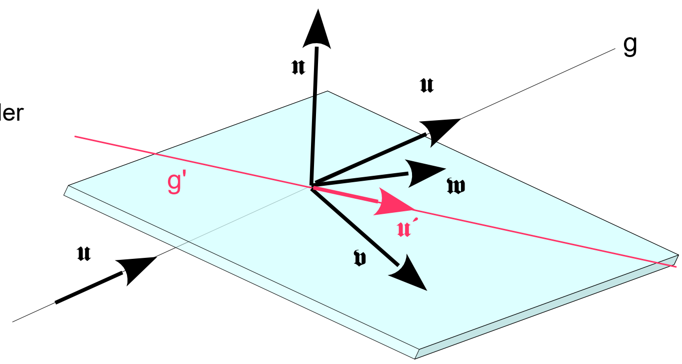
$$t=-\frac{472}{59}=-8$$

$$L_B:\vec{B}'=\begin{pmatrix}-6\\61\\26\end{pmatrix}-8\begin{pmatrix}-3\\7\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\5\\18\end{pmatrix}$$

Geradengleichung g' : $g':\vec{x}=\begin{pmatrix}-12\\-2\\-23\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}30\\7\\41\end{pmatrix}$

8.2.2. Zerlegung des Richtungsvektors in eine neue Basis

Bei dieser Lösungsmöglichkeit soll nur der Richtungsvektor der Geraden g' betrachtet werden. Den notwendigen Aufpunkt für die Gerade erhält man aus dem Durchstoßpunkt der Geraden durch die Ebene.
Welche Möglichkeit besteht, den Richtungsvektor u der Geraden direkt auf die Ebene zu projizieren. Einen solchen Vektor auf eine Gerade zu projizieren ist relativ einfach und wurde bei der Abstandsberechnung eines Punktes von einer Geraden gezeigt.



Das Problem bei einer Ebene ist, man kennt den Vektor nicht, auf den projiziert werden muss. Bei einer Geraden gibt es nur einen Richtungsvektor und bei einer Ebene kann dieser gesuchte Vektor irgend eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren sein. Man kennt aber die notwendigen Linearfaktoren nicht.

Grundgedanke:
(1) Die Richtungsvektoren der Ebene sind linear unabhängig, sonst würden sie keine Ebene aufspannen.
(2) Der Normalenvektor ist senkrecht zu den beiden Richtungsvektoren, damit ist er zu beiden Vektoren auch linear unabhängig.
(3) Eine Menge von 3 linear unabhängigen Vektoren stellt eine zulässige Basis für den drei-dimensionalen Raum dar.
(4) Damit lässt sich jeder Vektor des Raumes als Linearkombination dieser drei Vektoren schreiben, auch der Richtungsvektor der Geraden.

Es wird die gleiche Gerade und die gleiche Ebene benutzt, um das Ergebnis mit dem vorherigen Abschnitt zu vergleichen.

8.2.3. Richtungsvektoren und Normalenvektor der Ebene als neue Basis

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -24 \\ 26 \\ -19 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 18 \\ 35 \\ 45 \end{pmatrix}$ $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Stelle den Richtungsvektor $\vec{u}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{n}$ dar.

$$t \underset{\vec{v}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} + s \underset{\vec{w}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}} + r \underset{\vec{n}}{\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 18 \\ 35 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung stellt ein ganz normales Gleichungssystem dar, das auch als solches zu berechnen ist. Die Zerlegung von Vektoren in Basisvektoren ist immer eindeutig, damit muss dieses Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzen. Berechnung mit dem GTR.

$$t\,\vec{v} + s\,\vec{w} + r\,\vec{n} = \vec{u}$$

Lösung: $t = 7$; $s = -9$; $r = 4$

Es interessiert nur der Teil der in der Ebene von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ liegt.

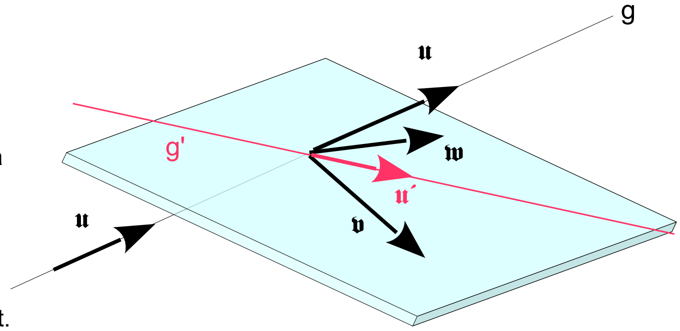
$$7 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 7 \\ 41 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor entspricht genau dem Richtungsvektor aus dem Lösungsweg 1.

8.2.4. Nur Projektion der Geraden in die Ebene

Das ist die Vektorgleichung für die Linearkombination mit den drei neuen Basisvektoren.

$$t\,\vec{v} + s\,\vec{w} + r\,\vec{n} = \vec{u}$$



Es soll auf den Normalenvektor verzichtet werden, da die Komponente in diese Richtung nicht interessiert. Um den Normalenvektor aus der Gleichung zu entfernen, wird die gesamte Gleichung mit einem Richtungsvektor skalar multipliziert, da das Skalarprodukt eines Richtungsvektors mit dem Normalenvektor 0 ergibt. Es wird der Vektor v benutzt.

$$t\,|\vec{v}|^2 + s\,\vec{w} \circ \vec{v} = \vec{u} \circ \vec{v}$$

In dieser Gleichung treten nur noch reelle Zahlen auf. Diese Gleichung wird nach t aufgelöst:

$$t = \frac{\vec{u} \circ \vec{v} - s\,(\vec{w} \circ \vec{v})}{|\vec{v}|^2}$$

Der Wert von t ist abhängig vom Wert von s. Das verwundert nicht, da Richtungsvektoren von Geraden nicht eindeutig sind. Sie können sich in der Länge unterscheiden. Für die Gleichung bedeutet das, wenn sich der Parameter s ändert, muss sich auch der *zugehörige* Parameter t ändern. Man kann für s einen beliebigen Wert wählen und bekommt den zugehörigen Wert t heraus.

Um vergleichbare Ergebnisse zu erzielen soll der Wert s= –9 benutzt werden, der sich bei der Lösung des Gleichungssystems ergeben hat. Als zugehöriger Wert von t sollte sich 7 ergeben.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 18 \\ 35 \\ 45 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \circ \vec{v} = 54 + 35 + 90 = 179$

$\vec{w} \circ \vec{v} = -3 - 6 = -9$ für $s = -9$: $s\,(\vec{w} \circ \vec{v}) = (-9) * (-9) = 81$

$|\vec{v}|^2 = 14$

$$\boxed{t = \frac{\vec{u} \circ \vec{v} - s\,(\vec{w} \circ \vec{v})}{|\vec{v}|^2} = \frac{179 - 81}{14} = 7}$$

Jeder Wert von s liefert einen Wert für t. Aber nicht jeder ganzzahlige Wert von s muss zu einem ganzzahligen Wert von t führen und damit auch nicht zu einem ganzzahligen Richtungsvektor, aber auf alle Fälle auf einen zulässigen Richtungsvektor.

8.2.5. Nur Projektion der Geraden auf den Normalenvektor der Ebene

$$t\,\vec{v} + s\,\vec{w} + r\,\vec{n} = \vec{u}$$

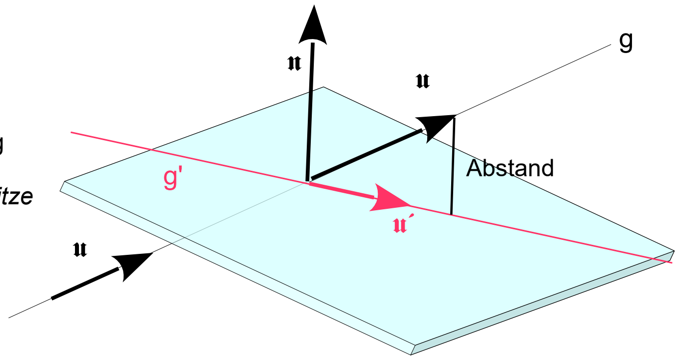
Es soll jetzt auf die beiden Richtungsvektoren verzichtet werden und nur die dritte Komponente in Richtung von n betrachtet werden. Dazu wird die Gleichung mit den Normalenvektor n skalar multipliziert, und alle Skalarprodukte mit den Richtungsvektoren werden 0.

$$r\,(\vec{n} \circ \vec{n}) = \vec{u} \circ \vec{n}$$

Löst man diese Gleichung nach r auf, erhält man: $r = \dfrac{\vec{u} \circ \vec{n}}{|\vec{n}|^2}$ $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 18 \\ 35 \\ 45 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \circ \vec{n} = -54 + 245 + 45 = 236$$

$$|\vec{n}|^2 = 59 \qquad r = \frac{236}{59} = 4$$



Die Richtung von n ist aber gleichzeitig die Richtung des senkrechten Abstandes eines Punktes von der Ebene. Damit ist es *der senkrechte Abstand der Spitze des Richtungsvektors der Geraden, wenn man den Fußpunkt des Richtungsvektors im Durchstoßpunkt von Gerade und Ebene ansetzen würde,* denn es ist die Komponente von u in Richtung des Normalenvektors n

$$t\,\vec{v} + s\,\vec{w} = \vec{u} - r\,\vec{n}$$

Der gesuchte Richtungsvektor in der Ebene: $t\,\vec{v} + s\,\vec{w}$

ergibt sich auch aus: $\vec{u} - r\,\vec{n}$

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 35 \\ 45 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 7 \\ 41 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor ist identisch mit dem Richtungsvektor aus Lösungsweg 1.

9. Lage zweier Geraden

Satz: (Gegenseitige Lage zweier Geraden)

Im dreidimensionalen Raum V^3 können zwei Geraden g und h vier verschiedene Lagebeziehungen aufweisen. Die Geraden seien in Parameterform gegeben.

(1) g und h schneiden sich in einem Punkt.
Nach Gleichsetzung der Parameterformen liefert das zugehörige LGS genau eine Lösung.

(2) g und h fallen zusammen, sie sind identisch.
Nach Gleichsetzung der Parameterformen liefert das zugehörige LGS unendlich viele Lösungen.

(3) g und h sind echt parallel.
Nach Gleichsetzung der Parameterformen liefert das zugehörige LGS einen Widerspruch und die beiden Richtungsvektoren sind linear abhängig.

(4) g und h sind windschief.
Nach Gleichsetzung der Parameterformen liefert das zugehörige LGS einen Widerspruch und die beiden Richtungsvektoren sind linear unabhängig.
Im zweidimensionalen Raum V^2 können zwei Geraden nicht windschief sein.

Im folgenden betrachten wir die Geraden g_1 und g_2 mit:

$g_1: \vec{x} = \vec{P} + t\,\vec{u}$ mit $\vec{u} \neq 0$ $\qquad$ $g_2: \vec{x} = \vec{Q} + s\,\vec{v}$ mit $\vec{v} \neq 0$

Die folgende Übersicht beschreibt, wie man die gegenseitige Lage von g_1 und g_2 ermitteln kann

u, v linear abhängig ?

ja: $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ $\qquad$ nein: $\vec{u} \times \vec{v} \neq 0$

ja:

$P \in g_2$?

Liegt P auch auf g_2 ?

$g_2: \vec{P} - \vec{Q} = s\,\vec{v}$ mit $\vec{v} \neq 0$

Punktprobe: Ist der Differenzvektor der beiden Aufpunkte ein Vielfaches eine Richtungsvektors.

- ja: $g_1 = g_2$ — Geraden sind identisch ①
- nein: $g_1 \parallel g_2$ $\quad g_1 \neq g_2$ — Geraden sind parallel ②

nein:

Gibt es einen Schnittpunkt

$\vec{P} + t\,\vec{u} = \vec{Q} + s\,\vec{v}$

Lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten. Das Ergebnis ist nicht der Schnittpunkt, sondern die Parameter für die Geradengleichungen zur Bestimmung des Schnittpunktes.

- hat eine Lösung: g_1 und g_2 schneiden sich in einem Punkt ③
- hat keine Lösung: g_1 und g_2 sind windschief ④

Nachweis mit der Vektorrechnung

①	②	③	④
$\det(\vec{P}-\vec{Q}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$ $(\vec{P}-\vec{Q}) \times \vec{u} = 0$	$\det(\vec{P}-\vec{Q}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$ $(\vec{P}-\vec{Q}) \times \vec{u} \neq 0$	$\det(\vec{P}-\vec{Q}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$ $\vec{u} \times \vec{v} \neq 0$	$\det(\vec{P}-\vec{Q}, \vec{u}, \vec{v}) \neq 0$

Nachweis mit dem Gauß'schem Algorithmus

t	s	
1	5	4
0	0	0
0	0	0

Die Geraden **sind identisch**.
Für r und s gibt es unendlich viele Lösungen r + s· 5 = 4.
2. und 3. Zeile immer gültig.

t	s	
1	5	4
0	0	1
0	0	0

Die Geraden sind **parallel und nicht identisch.**
2. Zeile: Widerspruch
3. Zeile: immer gültig

t	s	
1	0	3
0	1	2
0	0	0

Die Geraden **schneiden sich**. Das LGS ist eindeutig lösbar, hier: r = 3, s = 2.

t	s	
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Die Geraden sind **windschief.**
3. Zeile: Widerspruch
s· 0 = 1

9.1. Geraden mit Schnittpunkt ③

9.1.1. Berechnen des Schnittpunktes

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lagebeziehung: Die beiden Geraden sind nicht parallel. Ein Schnittpunkt oder windschiefe Geraden lassen sich nur mit einem Gleichungssystem lösen. Schnittpunkte berechnet man generell durch Gleichsetzen.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aus zwei Gleichungen die beiden Unbekannten berechnen und in der 3. Gleichung überprüfen.

oder

Die Gleichung wird komponentenweise in ein Gleichungssystem überführt:

$$\begin{aligned} 7 - 7s &= 18 + 3t \\ 1 + s &= 9 - 10t \\ 8 - 3s &= 11 + 3t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -7s - 3t &= 11 \\ s + 10t &= 8 \\ -3s - 3t &= 3 \end{aligned}$$

Dabei handelt es sich um ein „überbestimmtes“ Gleichungssystem mit 3 Zeilen, aber nur 2 Variablen. Wenn dieses Gleichungssystem lösbar ist, besitzen die Geraden einen Schnittpunkt, liefert das Gleichungssystem einen Widerspruch, sind die Geraden windschief.

Es werden wieder zwei Gleichungen benutzt.

$$\begin{aligned} s + 10t &= 8 \\ -3s - 3t &= 3 \end{aligned}$$

die erste der beiden Gleichungen mit 3 multipliziert und zur weiten addiert:

$$\begin{aligned} 3s + 30t &= 24 \\ -3s - 3t &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 27t &= 27 \\ t &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3s + 30 &= 24 \\ 3s &= -6 \\ s &= -2 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem berechnet nicht den Schnittpunkt, sondern nur die Parameterwerte der beiden Geraden, die in jeder Geradengleichung für sich zum Ortsvektor des Schnittpunktes führen.

Kontrolle in der ersten, bisher nicht benutzten, Gleichung:

$$-7(-2) - 3 = 14 - 3 = 11$$

Die erste Gleichung ist ebenfalls erfüllt, deshalb existiert ein Schnittpunkt.

Durch Einsetzen der ermittelten Parameter erhält man den Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt: $\begin{pmatrix} 21 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix}$

9.1.2. Schnittwinkel zwischen Geraden

Definition (Schnittwinkel von Geraden)

Wenn sich zwei Geraden schneiden, dann ist der Schnittwinkel der beiden Geraden.

α mit $\cos(\alpha) = \dfrac{|u \cdot v|}{|u| \cdot |v|}$

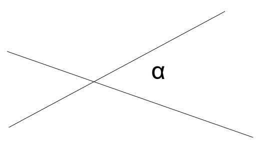
Anmerkungen:

- Der Schnittwinkel zweier Geraden ist der eingeschlossenen Winkel der beiden Richtungsvektoren
- Schnittwinkelberechnung macht nur Sinn, wenn vorher der Schnittpunkt nachgewiesen ist.

Der Schnittwinkel zweier Geraden ist der Schnittwinkel der beiden Richtungsvektoren

Schnittwinkel α: $0 \leq \alpha \leq 90°$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-7)^2 + 1^2 + (-3)^2} \; \sqrt{3^2 + (-10)^2 + 3^2}}$$



$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2}{|u_1|\,|u_2|}$$

9.1.3. Zur Geometrie des Geradenschnittpunktes

$$g_1: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{A} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{a} \qquad g_2: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B} + s \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b}$$

Schnittpunkt von zwei Geraden heißt, „suche den Punkt, der beide Geradengleichungen erfüllt." Deshalb Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen. Es muss möglich sein, dass der gleiche linke Ortsvektor x bei beiden Geradengleichungen entstehen kann.

$A + t\,a = B + s\,b \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Für ein Gleichungssystem müssen die Variablen auf die linke Seite und die Konstanten auf die rechte Seite

Auf die Reihenfolge und Vorzeichen achten

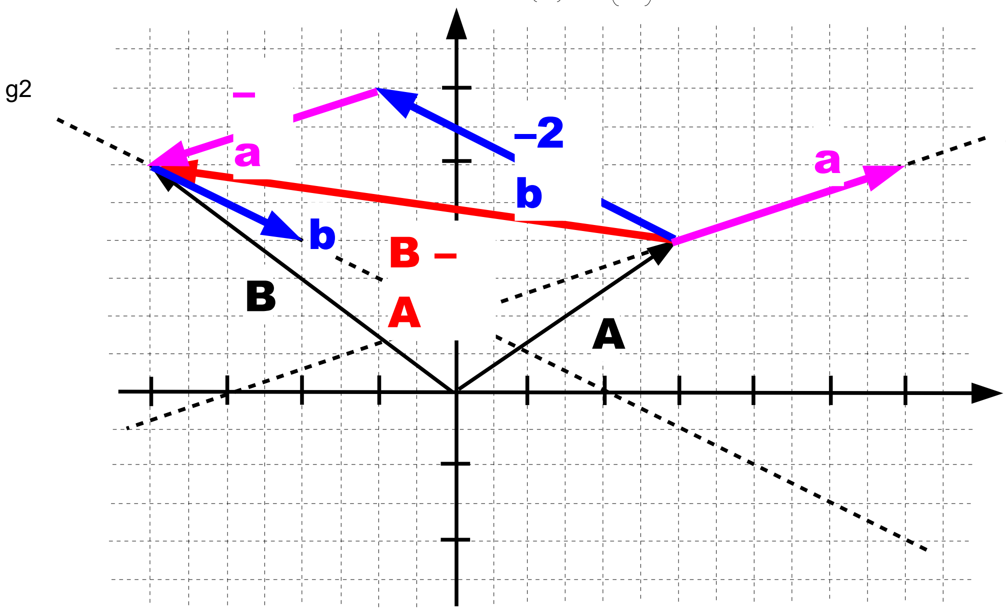
$t\,a - s\,b = B - A \qquad t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektorielle Interpretation: Der **Differenzvektor** der beiden Aufpunkte lässt sich als **Linearkombination** der beiden Richtungsvektoren darstellen, dann hat das Gleichungssystem eine Lösung.

Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $t = -1$; $s = 2$

Für die Linearkombination ist der Parameter von s mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen.

$t\,a - s\,b = B - A \qquad -1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$



Aus der Zeichnung ist deutlich zu erkennen, dass der Schnittpunkt (hier auf der y-Achse) vom Aufpunkt der ersten Geraden zu erreichen ist, indem man den Richtungsvektor um 1 Einheit in negative Richtung geht. Bei der zweiten Geraden muss man vom Aufpunkt 2 Einheiten in positive Richtung gehen, um den Schnittpunkt zu erreichen. Das Gleichungssystem berechnet nicht den Schnittpunkt, sondern nur die Parameter, um den Schnittpunkt zu erreichen.

> Zwei Geraden haben genau dann einen Schnittpunkt, wenn sich der **Differenzvektor der beiden Aufpunkte** als **Linearkombination der beiden Richtungsvektoren** darstellen lässt.
>
> Das ist genau dann der Fall, wenn **die beiden Geraden in einer Ebene** liegen.

9.2. Parallele Geraden im R^3 ②

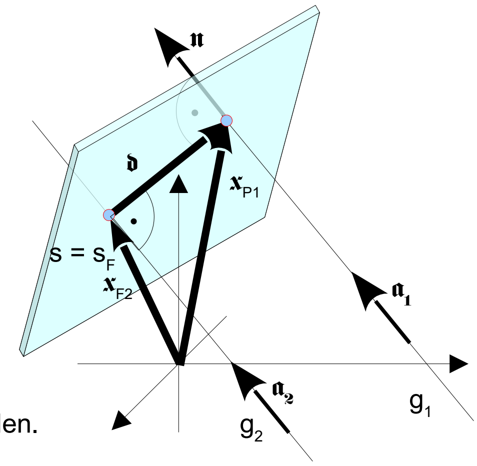
Musterbeispiel $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Parallele Geraden liegen immer in einer Ebene, für parallele Geraden gibt es Ebenen, die beide Geraden senkrecht schneiden. Beide Eigenschaften können ausgenutzt werden, um den Abstand paralleler Geraden zu bestimmen.

Nach den unter 4.2 angegebenen Untersuchungen ist bereits geklärt, dass die Geraden parallel sind und dass sie nicht identisch sind. Von diesen Voraussetzung kann damit Gebrauch gemacht werden.

9.2.1. Schnittpunkt zwischen beiden Geraden und senkrechter Ebene

Da beide Richtungsvektoren parallel sind, gibt es **eine Ebene**, die zu **beiden Geraden senkrecht** steht.



Teil 1: Bestimme die Ebenengleichung

Zwei parallele Geraden durchstoßen ein und dieselbe Ebene senkrecht, wenn der Normalenvektor der Ebene gleich dem Richtungsvektor der Geraden ist. (Parallele Geraden haben bis auf die Länge den gleichen Richtungsvektor.)
Die Ebenengleichung kann wie unter 7.1.2 erstellt werden. Der notwendige Punkt für die Ebenengleichung ist einer der beiden Aufpunkte der Geraden.

Teil 2: Bestimme den Fußpunkt

Von beiden Geraden kann ein Durchstoßpunkt berechnet werden.

Teil 3: Bestimme den Abstandsvektor

Der Abstandsvektor der beiden Durchstoßpunkte ist der Abstandsvektor der beiden Geraden.

Ebenengleichung: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ $\qquad 3x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 = 18$

Durchstoßpunkt für g_1:

$$(-2 + 3s - 4)\,3 + (-3 + 2s + 2)\,2 + (-2 + 2s - 5)\,2 = 0$$
$$-34 + 17\,s = 0$$
$$s = 2$$

Durchstoßpunkt: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Durchstoßpunkt für g_2:

$$(4 + 3t - 4)\,3 + (-2 + 2t - +2)\,2 + (5 + 2t - 5)\,2 = 0$$
$$t = 0$$

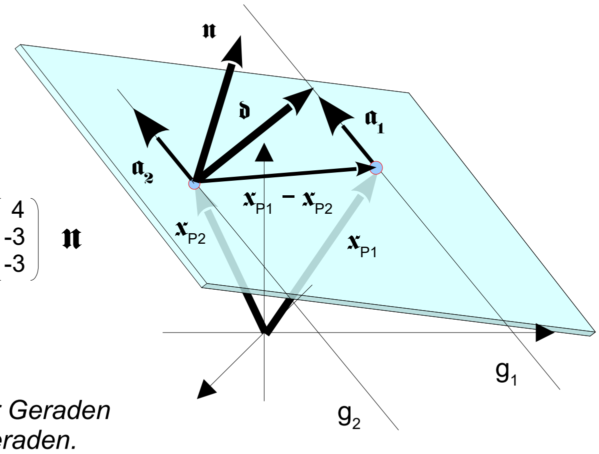
(Da die Ebenengleichung mit dem Aufpunkt von g_2 erstellt wurde, ist dieser Aufpunkt auch gleichzeitig Durchstoßpunkt von g_2 durch die Ebene.)

Der Differenzvektor der beiden Durchstoßpunkte gibt den Abstandsvektor. $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Der Betrag des Abstandsvektors ergibt den Abstand: $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

9.2.2. Zerlegen des Verbindungsvektors $P_2 - P_1$ in die Basis $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{d}$

Zwei parallele Geraden liegen in einer Ebene.



Der zweite Richtungsvektor ist der Verbindungsvektor zwischen den beiden Stützvektoren.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor dieser Ebene über das Vektorprodukt: $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{n}$

Vektorprodukt des Normalenvektors mit dem Richtungsvektor der Geraden: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{d}$

Es muss das Vektorprodukt mit dem Richtungsvektor der Geraden sein, denn man braucht einen senkrechten Vektor zur Geraden.

Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} & a_1 & & n & & a_1 \times n & & x_{P2} - x_{P1} \\ q & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} & + r & \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} & + s & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

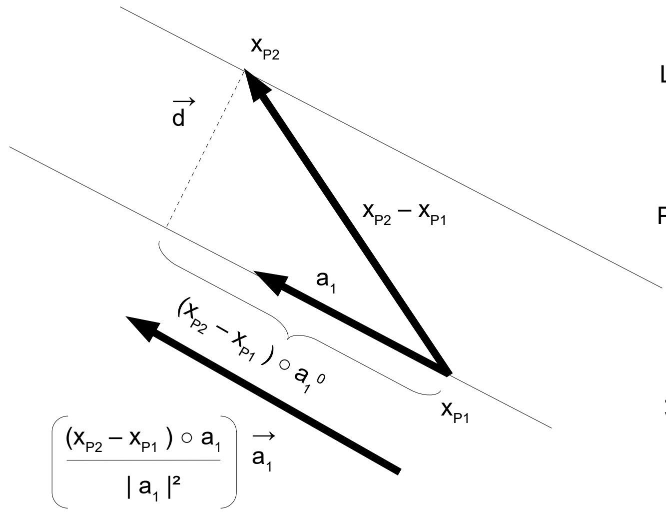
$q = 2$; $r = 0$; $s = 3$

Von dem senkrechten Abstandsvektor werden 3 Einheiten gebraucht, um den Verbindungsvektor der beiden Stützvektoren darzustellen. Dieser Verbindungsvektor hat selbst die Länge $\sqrt{2}$, damit ist der Abstand der beiden Geraden $3\sqrt{2}$.

9.2.3. Zerlegen des Verbindungsvektors $P_2 - P_1$ in Abstandsvektor und Geradenprojektion

Bekannt sind von den beiden parallelen Geraden nur die beiden Vektoren

$$\begin{array}{cc} a_1 & x_{P2} - x_{P1} \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \end{array}$$



Länge der Projektion auf den Einheitsvektor von a_1

$$\frac{(x_{P2} - x_{P1}) \circ a_1}{|a_1|} = \frac{34}{\sqrt{17}}$$

Projektionsvektors von $P_2 - P_1$ auf die Gerade g_1.

$$\left(\frac{(x_{P2} - x_{P1}) \circ a_1}{|a_1|^2}\right) \vec{a}_1 = \frac{34}{17} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Zerlegung von P2 – P1 in **<u>Projektion</u>** und orthogonalem Vektor

$$x_{P2} - x_{P1} = d + \left(\frac{(x_{P2} - x_{P1}) \circ a_1}{|a_1|^2}\right) \vec{a}_1$$

Orthogonaler Vektor ist der **<u>Abstandsvektor</u>**

$$d = x_{P2} - x_{P1} - \left(\frac{(x_{P2} - x_{P1}) \circ a_1}{|a_1|^2}\right) \vec{a}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Betrag des Vektors ist der Abstand

$|d| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

9.2.4. Projektion des Verbindungsvektors $P_2 - P_1$ auf den Abstandsvektor

Abstandsvektor d : $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor der beiden Stützvektoren der Geraden: $\vec{P_2} - \vec{P_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Das Skalarprodukt des Verbindungsvektors auf den Einheitsvektor der

Abstandsrichtung d ist $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

9.2.5. Abstand Punkt - Gerade

Da alle Punkte der Geraden g_2 von der Geraden g_1 den gleichen Abstand haben, kann man auch den Abstand eines Punktes von einer Geraden benutzen. Man verwendet z.B die Gerade g_1 und einen Punkt von der Geraden g_2 und berechnet den Abstand nach den Formeln für Abstand Punkt – Gerade.
Der Lösungsweg in 8.5.1 mit der senkrechten Ebene entspricht inhaltlich der senkrechten Ebene, die bei der Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden benutzt werden kann.

9.3. Identische Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad h: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

9.3.1. Punktprobe über Gleichungssystem

Die Geraden sind parallel. Das sollte man von vornherein erkennen und nur noch auf „identisch“ prüfen. Sollte man das nicht erkennen und mit der Berechnung eines Gleichungssystems beginnen, ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} 3 - 4r &= -1 + 2s \\ 0 + 2r &= 2 - s \\ 4 - 6r &= -2 + 3s \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -4r - 2s &= -4 \\ 2r + s &= 2 \\ -6r - 3s &= -6 \end{aligned}$$

Benutzt man die letzten beiden Gleichungen und multipliziert die 2. Gleichung mit 3 erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 6r + 3s &= 6 \\ -6r - 3s &= -6 \end{aligned}$$

Die Addition der beiden Gleichungen ergibt: $0 = 0$

Ergebnis: Die Gleichung ist immer richtig !
Jeder beliebige Wert von r oder s führt zu einem „Schnittpunkt“, dh. alle Geradenpunkte sind Schnittpunkte, dh. die Geraden sind identisch.

9.3.2. Richtungsvektor der Geraden und Verbindungsvektors $P_2 - P_1$ sind parallel.

Der Richtungsvektor einer Geraden : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

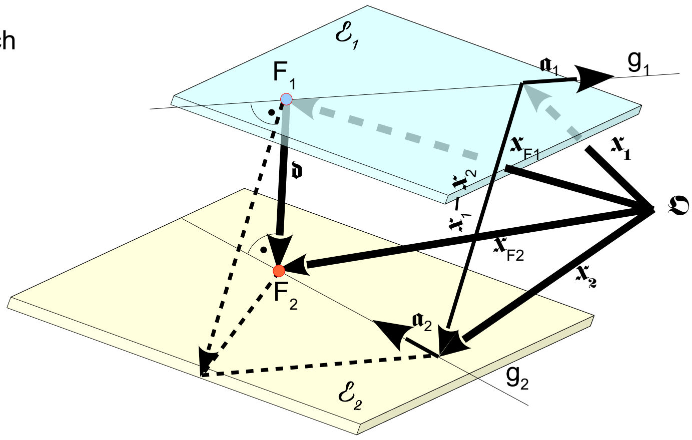
9.4. Windschiefer Geraden im R³

9.4.1. Abstand Ebene zu paralleler Geraden

gemäß 6. Lage zweier Geraden ④

Da diese Geraden nicht parallel sind und sich auch nicht schneiden, sind die Richtungsvektoren nicht linear abhängig und die Aufpunkte liegen nur auf einer Geraden.

Hier liegt die Schwierigkeit darin dass man zwei senkrechte Richtungen bestimmen muss, nämlich zu jeder Geraden und es ist auch nicht der Fußpunkt der Geraden bekannt, zwischen denen der kürzeste Abstand erreicht wird. Damit kann man nicht auf die Abstandsberechnung eines Punktes von einer Geraden zurückgreifen.



Hier wendet man ebenfalls einen Trick an:
Zwei windschiefen Geraden kann man jeweils eine Ebenen zuweisen mit der Eigenschaft, dass die beiden Ebenen parallel sind. Das erreicht man dadurch, dass man für beide Ebenen beide Richtungsvektoren der Geraden benutzt und für die eine Ebene den einen Aufpunkt und für die andere Ebene den anderen Aufpunkt.

Teil 1: Bestimme die Ebenengleichungen

Bestimme die Ebenengleichungen nach dem angegebenen Prinzip.

$E_1 : \vec{x} = \vec{P_1} + t\,\vec{a_1} + s\,\vec{a_2}$ $\qquad$ $E_2 : \vec{x} = \vec{P_2} + k\,\vec{a_1} + l\,\vec{a_2}$

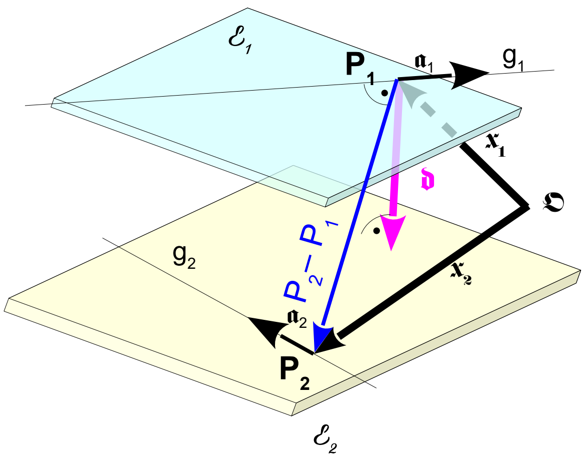
parallele Ebenen haben den gleichen Normalenvektor, der damit auch Richtung des senkrechten Abstandes beider Ebenen sind.

Teil 2: Bestimme den Abstand über Projektion

Der Abstandvektor d ist an allen Stellen zwischen den beiden Ebenen gleich und verläuft in Richtung des Normalenvektors der beiden Ebenen. Diesen Vektor kann man sich den Aufpunkt einer der beiden Geraden verschoben denken. (Im Bild in den Aufpunkt von g_2.)

Da jetzt die senkrechte Richtung bekannt ist, kann man den Verbindungsvektor von P_1 und P_2 auf den Abstandsvektor = Normalenvektor, **als Einheitsvektor**, projizieren:

$$\boxed{(\vec{P_2} - \vec{P_1}) \circ \vec{n^0} = d}$$



Teil 3: Bestimme den Abstandsvektor

Der Abstandsvektor ist die Länge des Abstandes multipliziert mit dem **Einheitsvektor** in Normalenrichtung

$$\boxed{\vec{d} = d \cdot \vec{n^0}}$$

Musterbeispiel $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

für alle weiteren Rechenwege.

Teil 1: Bestimme die Ebenengleichungen

Aufpunkt einer Ebene und die Richtungsvektoren beider Geraden:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der Ebene, $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Normalform oder Koordinatenform: $E_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] = 0$

Teil 2: Bestimme den Abstand

$$\frac{1}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] = d$$

$$\frac{1}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2}} (15 - 8) = \frac{7}{\sqrt{30}} \approx 1{,}278$$

(Ergebnisvergleich im folgenden Kapitel)

9.4.2. Zerlegen von $P_2 - P_1$ in die Basis r1, r2, n

$r_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $r_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $n \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängige Vektoren und bilden damit eine Basis des 3dim Raumes.

Zerlegen des Verbindungsvektors $P_2 - P_1$ in die Basis r_1, r_2 und n

$$t \underset{r_1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}} - r \underset{r_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} + s \underset{n}{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}} = \underset{P_2 - P_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

Lösung des Gleichungssystems:
t = 11/18 ; r = -17/90 ; s = 7/30

Man benötigt für die Zerlegung 7/30 Einheiten des Normalenvektors n um den Verbindungsvektor darzustellen. Eine Einheit des Normalenvektors n hat aber die Länge $|n| = \sqrt{30}$. Der Abstand des Punktes ist $7/30 * \sqrt{30} = 7/\sqrt{30} = 1{,}278$.

Gleichzeitig erhält man über t und r die beiden Fußpunkt auf den Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{11}{18} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/18 \\ 69/18 \\ 5/18 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{17}{90} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56/90 \\ 5 \\ -17/90 \end{pmatrix}$$

$$F_2 - F_1 = \begin{pmatrix} 7/30 \\ 35/30 \\ -14/30 \end{pmatrix}$$

$$|F_2 - F_1| = \sqrt{7^2 + 35^2 + 14^2}\ /30 = \sqrt{1470}\ / 30 = \sqrt{49 \bullet 30}\ / 30 = 7/30 \bullet \sqrt{30} = 1{,}278$$

Es sind zwei Punkte gefunden worden, von denen jeder auf einer Geraden liegt und deren Abstand mit dem Abstand der windschiefen Geraden identisch ist. Damit müssen es die Fußpunkte sein, da es keine zwei Paare geben kann.

9.4.3. Projektion von $P_2 - P_1$ auf den Normalenvektor der Ebene

(in der Schule nicht praktiziert, aber der einfachste Rechenweg. Der in der Schule angegebene Rechenweg über die beiden Lotfußpunkte sollte nicht beschritten werden, weil er zu aufwendig und zu fehleranfällig ist)

Normalenvektor aus den beiden Richtungsvektoren der Geraden $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad |n| = \sqrt{30}$

Verbindungsvektor der beiden Stützvektoren der Geraden: $\vec{P_2} - \vec{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

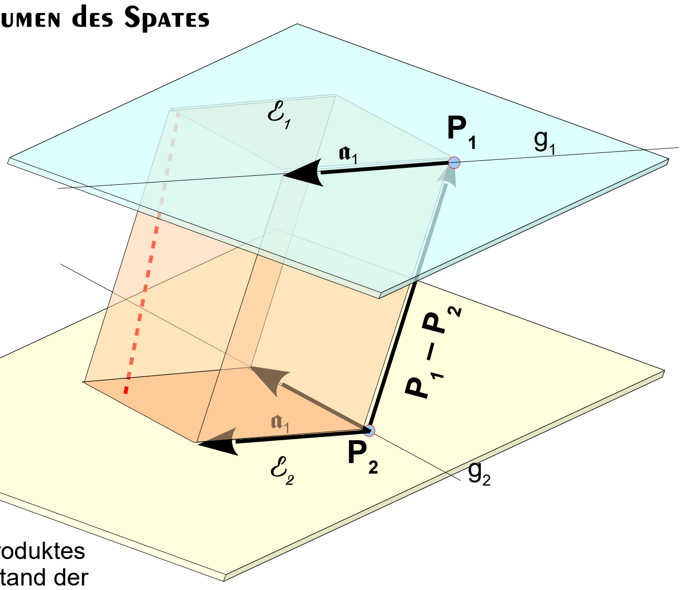
Projektion des Verbindungsvektors auf den Normaleneinheitsvektor : $(P_2 - P_1) \circ n^0 = d$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} (15 - 8) = \frac{7}{\sqrt{30}} \approx 1{,}278$$

Abstand der windschiefen Geraden.

Die Berechnung liefert nur den kürzesten Abstand der beiden Geraden, aber nicht, an welchen Punkten der Geraden dieser Abstand erreicht wurde. Diese Fußpunkte des Abstandes waren bisher noch nie gefragt, da sie eben aufwendig zu berechnen sind.

9.4.4. Bestimmen des Abstandes über das Volumen des Spates



Die Vektoren a_1 ; a_2 und $P_1 - P_2$ spannen ein Spat auf.
Die Volumen eines solchen Gebildes ist wie bei allen Körpern Grundfläche * Höhe.
Das Volumen eines Spates berechnet man in der Vektorrechnung über die Determinante der drei Vektoren, die dies Spat bilden, oder

$(a_1 \times a_2) \circ (P_1 - P_2)$

Die obere und untere Begrenzungsflächen liegen in den beiden parallelen Ebenen.

Dividiert man das Volumen eines Körpers durch seine Grundfläche erhält man die Höhe des Körpers.
Die Grundfläche des Spates ist die Fläche, die durch die Vektoren a_1 und a_2 aufgespannt wird.

Die Fläche eines Parallelogramms, das durch zwei Vektoren aufgespannt wird, ist der Betrag des Kreuzproduktes der beiden Vektoren. Die Höhe des Spates ist der Abstand der beiden Geraden. Damit lässt sich der Abstand auch folgendermaßen berechnen:

$$\boxed{\frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \circ (\vec{P_1} - \vec{P_2})}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = d}$$

Unter der Berücksichtigung, dass $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n}$ stimmt die Formel mit der im vergangen Abschnitt überein. Diese Rechnung liefert für die Berechnung mit einem GTR zusätzliche Möglichkeiten, da der Zähler des Bruches sehr einfach aus einer Determinante bestimmt werden kann.

$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad |n| = \sqrt{30}$ $\qquad \vec{P_2} - \vec{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}} (15 - 8) = \frac{7}{\sqrt{30}} \approx 1{,}278$$

9.4.5. Berechnung des minimalen Abstandes über Differenzialrechnung

$$t\overset{r1}{\begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix}} - r\overset{r2}{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}} + \overset{P_1–P_2}{\begin{pmatrix}0\\-3\\-4\end{pmatrix}}$$

Dieser Ausdruck stellt den Abstand zwischen zwei beliebigen Geradenpunkten dar. Für jedes t und jedes r existiert genau ein Abstand. Der Abstand selber ist die Wurzel aus dem Quadrat des Vektors. Für die Berechnung des t und des r kann auf die Wurzel verzichtet werden, sie ist nur wichtig für die Berechnung des Betrages selbst.

$f(t,r) = (-t-2r)^2 + (3t-3)^2 + (7t-r-4)^2$

Das ist eine Funktion von 2 Variablen,
die zum Minimum gemacht werden soll.

1. Ableitung der Funktion nach t :

$f_t(t,r) = 2(-t-2r+0)\,(-1) + 2(3t +0r-3)\,3 + 2\,(7t-r-4)\,7 = 0$
Gleichung durch 2 dividieren
$f_t(t,r) = (-t-2r+0)\,(-1) + (3t+0r-3)\,3 + (7t-r-4)\,7 = 0$

Matrizenschreibweise

$$t':\ \begin{pmatrix}-1 & 3 & 7\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}t & -r & P_2–P_1\end{array}\\ \begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 3\\ 7 & -1 & 4\end{pmatrix}\end{array}$$

In den Klammern stehen jeweils die Zeilen des vektoriellen Ausdrucks für den Abstand. Jede Zeile wird mit der inneren Ableitung der Klammern nach t multipliziert. (Kettenregel) Insgesamt ergeben diese Faktoren wieder den Vektor r1. Damit ergibt die nebenstehende Matrizenmultiplikation genau die Zeile.

1. Ableitung der Funktion nach r :

$f_r(t,r) = 2(-t-2r+0)\,(-2) + \qquad\qquad + 2\,(7t-r-4)\,(-1) = 0$

$$r':\ \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}t & r & P_2–P_1\end{array}\\ \begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 3\\ 7 & -1 & 4\end{pmatrix}\end{array}$$

Es ergibt sich die gleiche Rechnung wie oben, nur mit der inneren Ableitung nach r und damit die Multiplikation mit dem Vektor r2.

Gleichungssystem:

$f_t(t,r) = (-t-2r+0)\,(-1) + (3t+0r-3)\,3 + (7t-r-4)\,7 = 0$
$f_r(t,r) = (-t-2r+0)\,(-2) + (3t+0r-3)\,0 + (7t-r-4)\,(-1) = 0$

$$\begin{array}{c}t\\r\end{array}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 7\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}t & r & P_2–P_1\end{array}\\ \begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 3\\ 7 & -1 & 4\end{pmatrix}\end{array} = 0$$

oder

$$\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 0\\ 7 & -1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 3\\ 7 & -1 & 4\end{pmatrix} = 0$$

$t + 2r – 9 + 9t – 28 + 49t – 7r = 0$
$2t + 4r \qquad + 4 – \ 7t + \ r = 0$

$$\begin{array}{l}\underbrace{\begin{array}{l}t + 9t + 49t\\ 2t + 0t – 7t\end{array}}_{t} \begin{array}{c}+\\+\end{array} \underbrace{\begin{array}{l}2r + 0r – 7r\\ 4r + 0r + r\end{array}}_{r} \begin{array}{c}+\\+\end{array} \underbrace{\begin{array}{l}0 – 9 – 28\\ 0 + 0 + 4\end{array}}_{P_1–P_2} \begin{array}{l}= 0\\ = 0\end{array}\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}59t & – 5r & – 37 & = 0\\ - 5t & + 5r & + 4 & = 0\end{array}$$

Möglicherweise ist das Erstellen des Gleichungssystems auf diese Weise einfacher, vor allem, wenn ein entsprechender Taschenrechner zur Verfügung steht.

$$= \begin{pmatrix}59 & -5 & 37\\ -5 & 5 & -4\end{pmatrix} = 0$$

Da die drei Vektoren keine orthogonale Basis bilden, ist die Matrix als Gleichungssystem zu rechnen.

Erstellt man eine rechte Seite von dem Gleichungssystem, muss man aus $P_1–P_2$ den Ausdruck $P_2–P_1$ machen.

$$\begin{array}{rrcl} & t & r & P_2–P_1\\ & 59t & – 5r & = 37\\ – & 5t & + 5r & = – 4\end{array}$$

Das ist in beiden Fällen das gleiche Gleichungssystem, das nur noch mit rref gelöst werden muß.

mit der Lösung : $t = 11/18$
$r = - 17/90$

Das Ergebnis entspricht den Faktoren zur Berechnung der Fußpunkte aus Kapitel 9.4.2.

9.4.6. Bestimmung der Differenz zwischen zwei beliebigen Geradenpunkte

$g_1: \vec{x} = \vec{P_1} + t\,\vec{a_1}$

$g_2: \vec{x} = \vec{P_2} + s\,\vec{a_2}$

Abstand : $x = P_1 + t\,a_1 - (P_2 + s\,a_2)$

$x = (P_1 - P_2) + t\,a_1 - s\,a_2$

Das ist eine Ebenengleichung.
Die Ebenengleichung kann man umwandeln in eine HNF.

$n = a_1 \times a_2$

$\left(x - (P_1 - P_2)\right) \circ n = 0$

Von dieser Ebene berechnet man den Abstand des Ursprungs.

$$d = \frac{(\vec{P_1} - \vec{P_2}) \circ \vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Musterbeispiel g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Die gleichen Geraden, wie im vorhergehenden Abschnitt)

$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad P_1 - P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

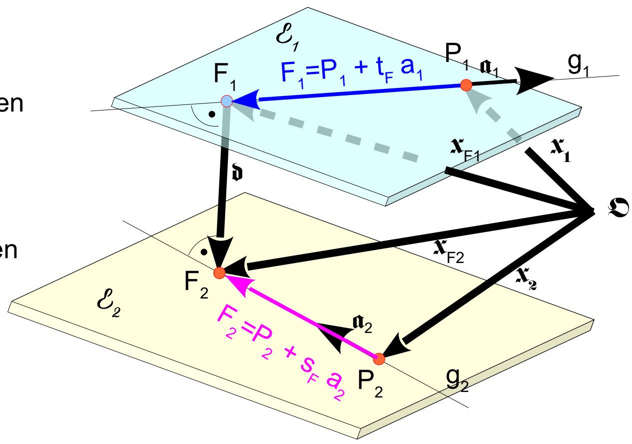
$1\,x_1 + 5\,x_2 - 2\,x_3 - (-15+8) = 0$

Betrag Normalenvektor : $\sqrt{30}$

Abstand des Ursprungs : $\frac{7}{\sqrt{30}}$

9.4.7. Fußpunkt windschiefer Geraden im R^3

1. Lösungsweg



(1) Für die Gerade g_1 gibt es einen Parameter t_F für den der Fußpunkt F_1 auf der Geraden erreicht wird.

$$g_1 : \vec{F_1} = \vec{P_1} + t_F\, \vec{a_1}$$

(2) Für die Gerade g_2 gibt es einen Parameter s_F für den der Fußpunkt F_2 auf der Geraden erreicht wird.

$$g_2 : \vec{F_2} = \vec{P_2} + s_F\, \vec{a_2}$$

(3) Der Differenzvektor $d = F_2 - F_1$ muss senkrecht zu beiden Richtungsvektoren sein.

$$\boxed{(\vec{F_2} - \vec{F_1}) \circ \vec{a_1} = 0} \qquad \boxed{(\vec{F_2} - \vec{F_1}) \circ \vec{a_2} = 0}$$

Jetzt werden die Ortsvektoren der Fußpunkte ganz formal in die beiden Skalarprodukte eingesetzt.

$$[\quad F_2 \quad - \quad F_1 \quad] \circ a_1 = 0 \qquad\qquad [\quad F_2 \quad - \quad F_1 \quad] \circ a_2 = 0$$

$$[\,(P_2 + s_F\, a_2) - (P_1 + t_F\, a_1)] \circ a_1 = 0 \qquad\qquad [\,(P_2 + s_F\, a_2) - (P_1 + t_F\, a_1)] \circ a_2 = 0$$

$$s_F\, a_2 \circ a_1 - t_F\, a_1 \circ a_1 = (P_1 - P_2) \circ a_1 \qquad\qquad s_F\, a_2 \circ a_2 - t_F\, a_1 \circ a_2 = (P_1 - P_2) \circ a_2$$

Gleichung in Matrixschreibweise :

$$a_1 \circ [\, a_2 \quad -a_1 \quad P_1 - P_2\,] \qquad\qquad a_2 \circ [\, a_2 \quad -a_1 \quad P_1 - P_2\,]$$

$$\begin{pmatrix} — a_1 — \\ — a_2 — \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_2 & -a_1 & P_1 - P_2 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} s_F\,(a_2 \circ a_1) - t_F\,(a_1 \circ a_1) &= (P_1 - P_2) \circ a_1 \\ s_F\,(a_2 \circ a_2) - t_F\,(a_1 \circ a_2) &= (P_1 - P_2) \circ a_2 \end{aligned}}$$

Alle Skalarprodukte liefern reelle Zahlen, so dass ein Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit 2 Variablen (s_F und t_F) entstanden ist.

Die Lösung des Gleichungssystems und das Einsetzen der beiden Parameter in die jeweilige Geradengleichung liefert die beiden gesuchten Fußpunkte.

Musterbeispiel

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Lösungsweg: Gleichungssystem über Matrizenmultiplikation erstellen

$$\begin{pmatrix} — a_1 — \\ — a_2 — \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_2 & -a_1 & P_1 - P_2 \\ | & | & | \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -13 \\ -3 & -2 & -7 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} +14\,t + 4\,s &= +24 \\ +4\,t + 13\,s &= -5 \end{aligned}$$

$t = 2$
$s = -1$

2. Lösungsweg: Gleichungssystem über Skalarprodukt mit Richtungsvektoren

Für beide Gleichungen benötigt man den Differenzvektor der beiden Geradengleichungen

$$F_2 - F_1 = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt mit dem Richtungsvektor von g_1:

$$(13 + 2s - t)\,1 + (7 - 3s - 2t)\,2 + (1 + 0s + 3t)\,(-3) = 0$$

Skalarprodukt mit dem Richtungsvektor von g_2:

$$(13 + 2s - t)\,2 + (7 - 3s - 2t)\,(-3) + (1 + 0s + 3t)\,0 = 0$$

Führt zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 24 - 4\,s - 14\,t &= 0 \\ 5 + 13\,s + 4\,t &= 0 \end{aligned}$$

oder umgestellt:

$$\begin{aligned} 24 &= 4\,s + 14\,t \\ 5 &= -13\,s - 4\,t \end{aligned}$$

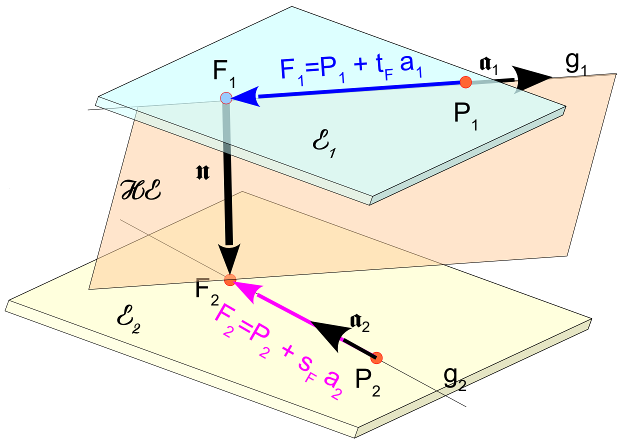
liefert die Lösung: $s = -1$; $t = 2$

Das führt zu den Fußpunkten $g_1 : \vec{x}_{F1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2 : \vec{x}_{F2} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

und zu einem Abstandsvektor $F_2 - F_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

und zu einer Entfernung $d = \sqrt{9^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{166} \approx 12{,}88$

3. Lösungsweg



Es wird eine Ebene erzeugt, die senkrecht zu den beiden parallelen Ebenen steht, in denen die Geraden liegen. Ein Richtungsvektor der Ebene wird ein Richtungsvektor einer Geraden, hier $\mathfrak{a}_1$, der andere Richtungsvektor ist der Normalenvektor der parallelen Ebenen. Der sichert, dass die Ebene senkrecht ist. Der Fußpunkt der zweiten Geraden ist der Schnittpunkt der zweiten Geraden mit dieser Hilfsebene. Der Fußpunkt der ersten Geraden F_1 wird für ein t_F erreicht, für das der zugehörige Faktor für den Richtungsvektor $\mathfrak{n}$ Null sein muss.

Da der Fußpunkt von g_1 auf der Geraden liegt, braucht man den Vektor n nicht, um vom Aufpunkt der Ebene, der auch Aufpunkt der Geraden ist, um zum Fußpunkt zu gelangen.

Parameterdarstellung für die Hilfsebene HE:

$$HE : \vec{x} = \vec{P_1} + t\,\vec{a_1} + r\,\vec{n}$$

Parameterdarstellung der Geraden g_2 :

$$g_2 : \vec{x} = \vec{P_2} + s\,\vec{a_2}$$

Gesucht Durchstoßpunkt von g_2 durch HE:

$$\vec{P_1} + t\,\vec{a_1} + r\,\vec{n} = \vec{P_2} + s\,\vec{a_2}$$

$$t\,\vec{a_1} + r\,\vec{n} - s\,\vec{a_2} = \vec{P_2} - \vec{P_1}$$

Das führt zu einem 3 x 3 Gleichungssystem, dessen Lösung folgende Werte liefert:

$t \rightarrow t_F$: Liefert den Parameter t_F, der für den Fußpunkt der Geraden g_1 gehört
$s \rightarrow s_F$: Liefert den Parameter s_F, der für den Fußpunkt der Geraden g_2 gehört
$r \rightarrow d$: Liefert den Faktor, der mit n zu multiplizieren ist, um den Abstandsvektor zu erhalten.

Musterbeispiel

$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(Die gleichen Geraden, wie im vorhergehenden Abschnitt)

3. Lösungsweg:

Normalenvektor der Ebene: $n = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\qquad HE : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

(s. Kapitel 6.5.1.)

$t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} t + 9r - 2s &= 13 \\ 2t + 6r + 3s &= 7 \\ -3t + 7r &= 1 \end{aligned}$$

Lösung des Gleichungssystems:
$t = 2$
$r = 1$
$s = -1$

Fußpunkt Gerade g_1: $\vec{x}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Fußpunkt Gerade g_2: $\vec{x}_F = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Abstand $r\,\vec{n}$: $\qquad \vec{d} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ *(Die Ergebnisse entsprechen denen vom Lösungsweg 1)*

*(Unter Benutzung eines GTR ist das eine durchaus ernst zu nehmende Lösungsmöglichkeit. Man hat nicht nur alle Ergebnisse, sondern kann auch noch kontrollieren, ob die Länge des Differenzvektors zwischen den beiden Fußpunkten **identisch** ist mit dem berechneten Abstandsvektor. Der Abstandsvektor ist dann auf zwei verschiedenen Wegen entstanden.)*

10. Lagebeziehungen Geraden und Ebenen

Satz: (Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene)

Im dreidimensionalen Raum V3 können eine Gerade g und eine Ebene E drei verschiedene Lagebeziehungen aufweisen. Es seien jeweils die Parameterformen gegeben.

(1) g und E schneiden sich in einem Punkt. (Durchstoßpunkt)
Nach Gleichsetzung der Parameterformen liefert das zugehörige LGS genau eine Lösung.

(2) g liegt in E , sie sind aber nicht identisch.
Nach Gleichsetzung der Parameterformen liefert das zugehörige LGS unendlich viele Lösungen. Insbesondere ist der Geradenparameter frei setzbar.

(3) g und E sind echt parallel, g liegt nicht in E .
Nach Gleichsetzung der Parameterformen liefert das zugehörige LGS einen Widerspruch.

Im folgenden betrachten wir die Gerade g und die Ebene E mit:

$g: \vec{x} = \vec{P} + t\,\vec{u}$ mit $\vec{u} \neq 0$ $\qquad$ $\vec{x} = \vec{Q} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ mit $\vec{v}, \vec{w} \neq 0$

bzw. $(\vec{x} - \vec{Q}) \cdot \vec{n}^0 = 0$

Die folgende Übersicht beschreibt, wie man die gegenseitige Lage von g und E ermitteln kann

u,v,w linear abhängig
oder $u \circ n^0 = 0$

(Liegt der Richtungsvektor der Geraden in der Ebene oder ist er parallel)

ja:

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

$P \in E$?

Punktprobe; Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 1 Unbekannten (Gerade). oder 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten (Ebene).

Ist der Differenzvektor der beiden Aufpunkte ein Vielfaches der beiden Richtungsvektors. $\vec{P} - \vec{Q} = r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$

g liegt in E

$g \parallel E$ $\quad$ g parallel
$g \not\subset E$ $\quad$ zu E

nein:

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$

$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$

g und E schneiden sich in einem Punkt

Lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten. Das Ergebnis ist nicht der Schnitt-punkt, sondern die Parameter für die Geradengleichung oder Ebenengleichung zur Bestimmung des Schnittpunktes.

① ② ③

Nachweis mit der Vektorrechnung

①
$\det(\vec{P}-\vec{Q}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$
$(\vec{P} - \vec{Q}) \cdot \vec{n} = 0$

②
$\det(\vec{P}-\vec{Q}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$
$(\vec{P} - \vec{Q}) \cdot \vec{n} = 0$

③
$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$
$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$

Nachweis mit dem Gauß'schem Algorithmus

①

t	r	s	
1	0	4	0
0	1	2	0
0	0	0	0

Gerade **liegt in** der Ebene.
Es ist eine einparametrige Lösung möglich =
Gerade als Lösungsmenge

②

t	r	s	
1	0	4	3
0	1	2	0
0	0	0	1

Gerade und Ebene sind **parallel nicht in Ebene**.
Die 3. Zeile enthält Widerspruch

③

t	r	s	
1	0	4	0
0	1	2	0
0	0	1	2

Es gibt einen **Schnittpunkt**.
Eindeutig lösbar

10.1. Schnittpunkt von Gerade und Ebene ③

10.1.1. Geradengleichung in Parameterform, Ebenengleichung in Parameterform

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -10 \neq 0$$

Gerade und Ebene haben einen Schnittpunkt.

Schnittgebilde bestimmt man über Gleichsetzung

$$\begin{aligned} 5 + s &= -2 + 3v \\ 7 - 3s &= 0 + 1v \\ 3 + &= 0 + 1u \end{aligned}$$

Gleichungssystem umordnen

$$\begin{aligned} s \quad - 3v &= -7 \\ -3s \quad - v &= -7 \\ -u &= -3 \end{aligned}$$

$s = 1{,}4$; $u = 3$; $v = 2{,}8$

Setzt man die Parameter in die entsprechenden Gleichungen ein, erhält man den Schnittpunkt.

10.1.2. Geradengleichung in Parameterform, Ebenengleichung in Normalenform

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

oder als Koordinatengleichung $-x_1 + 3x_2 - 2 = 0$

Komponentenweises Einsetzen der Geradengleichung in die Koordinatengleichung der Ebene

$-(5 + s) + 3(7 - 3s) - 2 = -5 - s + 21 - 9s - 2 = 14 - 10s = 0$

$s = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

Einsetzen des berechneten Wertes für s in die Geradengleichung liefert den Schnittpunkt mit der Ebene.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{7}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32/5 \\ 14/5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

10.1.3. Schnittwinkel von Gerade und Ebene

Definition: (Schnittwinkel von Gerade und Ebene)

Wenn sich die **Gerade** g: $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{u}$ und die **Ebene** E: $(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$ schneiden, dann gilt für den Schnittwinkel

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}|\,|\vec{n}|}$$

Für den Schnittwinkel α gilt : $0^0 \leq \alpha \leq 90^0$

Bemerkung: Hier taucht das Skalarprodukt mit dem sin auf, was natürlich nicht korrekt ist. Aber das Skalarprodukt wird hier mit dem Normalenvektor und dem Richtungsvektor der Geraden gebildet, damit ist der Winkel der berechnet wird nicht der Winkel zwischen Ebene und Gerade, sondern zwischen Gerade und Normalenvektor. Für den tatsächlichen Schnittwinkel mit der Ebene müsste dieser Winkel von 90^0 subtrahiert werden, aber genau das macht bereits der sin.

10.2. Parallele Gerade und Ebene ②

10.2.1. Geradengleichung in Parameterform, Ebenengleichung in Parameterform

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 \\ -34 \\ -28 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix}$

Der Normalenvektor ist bis auf die Länge eindeutig, deshalb können gemeinsame Faktoren in den Komponenten ausgeklammert und vernachlässigt werden.

$\vec{n} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 26 - 68 + 42 = 0$

Gerade verläuft parallel zur Ebene oder liegt in der Ebene, da der Richtungsvektor und der Normalenvektor senkrecht sind.

Zu klären ist, ob der Punkt der Geraden in der Ebene liegt oder nicht. da bereits der Normalenvektor der Ebene bestimmt ist, bietet sich an, die Ebene in die HNF zu bringen und in dieser Form die Punktprobe zu rechnen.

$\begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0$ $\begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$

Der Punkt erfüllt die Ebenengleichung, die Gerade liegt in der Ebene.

10.2.2. Geradengleichung in Parameterform, Ebenengleichung in Normalenform

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

1. Der Richtungsvektor der Geraden muss senkrecht zum Normalenvektor der Ebene sein..
   Dann ist die Gerade parallel zur Ebene.

$\vec{n} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 26 - 68 + 42 = 0$

Gerade verläuft parallel zur Ebene oder liegt in der Ebene, da der Richtungsvektor und der Normalenvektor senkrecht sind.

Zu klären ist, ob der Punkt der Geraden in der Ebene liegt oder nicht. Da bereits der Normalenvektor der Ebene bestimmt ist, bietet sich an, die Ebene in die HNF zu bringen und in dieser Form die Punktprobe zu rechnen.

2. Der Aufpunkt der Geraden muss die Ebenengleichung erfüllen.
   Dann liegt die Gerade in der Ebene

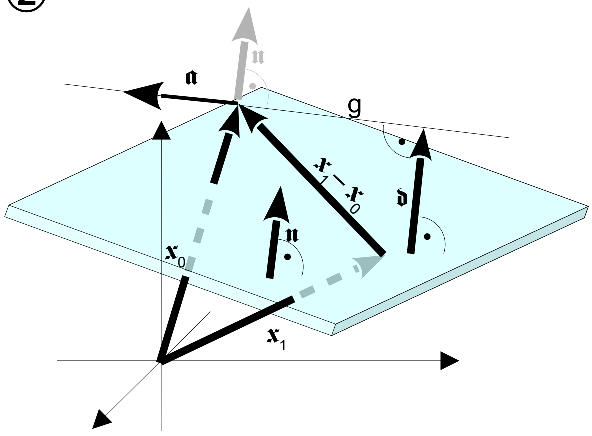
$\begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0$ $\begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 112$

Der Punkt erfüllt die Ebenengleichung nicht, die Gerade liegt parallel zur Ebene.

10.2.3. Abstand einer Geraden zu einer Ebene ②

Der Abstand einer Gerade zu einer Ebene kann nur auftreten, wenn die Gerade parallel zur Ebene verläuft. Damit kann man diese Voraussetzung in die Überlegung der Lösung mit einbeziehen.

- der Richtungsvektor der Geraden muss eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren der Ebene sein.
- der Normalenvektor der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden sind senkrecht.
- => der Normalenvektor gibt die Richtung des senkrechten Abstandes.



Da die Gerade parallel zur Ebene ist, haben **alle** Punkte der Geraden den gleichen Abstand zur Ebene. Es reicht also, einen Punkt auszuwählen und von diesem den Abstand zu berechnen. Deshalb benutzt man gleich den Aufpunkt der Geraden. Damit reduziert sich das Problem auf die Berechnung des Abstandes eines Punktes zu einer Ebene gemäß dem vorangegangenen Kapitel 7.3.

10.3. Gerade in der Ebene ①

10.3.1. Geradengleichung in Parameterform, Ebenengleichung in Parameterform

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 \\ -34 \\ -28 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix}$

Der Normalenvektor ist bis auf die Länge eindeutig, deshalb können gemeinsame Faktoren in den Komponenten ausgeklammert und vernachlässigt werden.

$\vec{n} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 26 - 68 + 42 = 0$

Gerade verläuft parallel zur Ebene oder liegt in der Ebene, da der Richtungsvektor und der Normalenvektor senkrecht sind.

Zu klären ist, ob der Punkt der Geraden in der Ebene liegt oder nicht. da bereits der Normalenvektor der Ebene bestimmt ist, bietet sich an, die Ebene in die HNF zu bringen und in dieser Form die Punktprobe zu rechnen.

$\begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0$

$\begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$

Der Punkt erfüllt die Ebenengleichung, die Gerade liegt in der Ebene.

10.3.2. Geradengleichung in Parameterform, Ebenengleichung in Normalenform

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 \\ -34 \\ -28 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix}$

Der Normalenvektor ist bis auf die Länge eindeutig, deshalb können gemeinsame Faktoren in den Komponenten ausgeklammert und vernachlässigt werden.

1. Der Richtungsvektor der Geraden muss senkrecht zum Normalenvektor der Ebene sein..
   Dann ist die Gerade parallel zur Ebene.

$\vec{n} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 26 - 68 + 42 = 0$

Gerade verläuft parallel zur Ebene oder liegt in der Ebene, da der Richtungsvektor und der Normalenvektor senkrecht sind.

Zu klären ist, ob der Punkt der Geraden in der Ebene liegt oder nicht. Da bereits der Normalenvektor der Ebene bestimmt ist, bietet sich an, die Ebene in die HNF zu bringen und in dieser Form die Punktprobe zu rechnen.

2. Der Aufpunkt der Geraden muss die Ebenengleichung erfüllen.
   Dann liegt die Gerade in der Ebene

$\begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$

Der Punkt erfüllt die Ebenengleichung,
die Gerade liegt in der Ebene.

11. Lagebeziehungen zwischen Ebenen

Satz: (Gegenseitige Lage zweier Ebenen)

Im dreidimensionalen Raum V3 können zwei Ebenen E1 und E2 drei verschiedene Lagebeziehungen aufweisen. Die Ebenen seien in Parameterform gegeben.

(1) E1 und E2 sind echt parallel.
Nach Gleichsetzung der Parameterformen liefert das zugehörige LGS einen Widerspruch.

(2) E1 und E2 fallen zusammen, sie sind identisch.
Nach Gleichsetzung der Parameterformen liefert das zugehörige LGS unendlich viele Lösungen. Die Parameter einer Ebene sind völlig frei, unabhängig voneinander setzbar.

(3) E1 und E2 schneiden sich in einer Geraden.
Nach Gleichsetzung der Parameterformen liefert das zugehörige LGS unendlich viele Lösungen. Die Parameter einer Ebene lassen sich nicht unabhängig voneinander setzen.

Im folgenden betrachten wir die Ebenen E_1 und E_2 in Parameterform

$E_1: \vec{x} = \vec{P} + t\,\vec{a} + s\,\vec{b}$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$ $E_2: \vec{x} = \vec{Q} + k\,\vec{c} + l\,\vec{d}$ mit $\vec{c}, \vec{d} \neq 0$

bzw. in Normalenform

$E_1: (\vec{x} - \vec{P}) \cdot \vec{n}_1^{\,0} = 0$ $E_2: (\vec{x} - \vec{Q}) \cdot \vec{n}_2^{\,0} = 0$

Die folgende Übersicht beschreibt, wie man die gegenseitige Lage von E_1 und E_2 ermitteln kann

n1, n2
linear abhängig

$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0$ ja

$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq 0$ nein

Punktprobe; Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten.

$P \in E_2$?
Liegt P auch auf E_2 ?

Ist der Differenzvektor der beiden Aufpunkte ein Vielfaches der beiden Richtungsvektors.

$\vec{P} - \vec{Q} = t\,\vec{a} + s\,\vec{b}$

E_1 und E_2 schneiden sich

Lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten. Das Ergebnis ist, wenn das Gleichungssystem lösbar ist eine Parameterlösung, damit eine Gerade.

$E_1 = E_2$
Ebenen sind identisch

$E_1 \parallel E_2$
$E_1 \neq E_2$ ②
Ebenen sind parallel

① ② ③

Nachweis mit der Vektorrechnung

$\det(\vec{P} - \vec{Q}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$ $\det(\vec{P} - \vec{Q}, \vec{a}, \vec{b}) \neq 0$

Nachweis mit dem Gauß'schem Algorithmus

t	s	k	l	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	0	0	0

Beide Ebenen **identisch**.
Es ist eine zweiparametrige Lösung möglich =
Ebene als Lösungsmenge

t	s	k	l	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	0	0	1

Die Ebenen sind **parallel aber nicht identisch**.
Die 3. Zeile enthält Widerspruch

t	s	k	l	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	1	3	2

Es gibt eine **Schnittgerade**.
Es gibt eine Parameterlösung =
Gerade als Lösungsmenge

11.1. Schnittgeraden von Ebenen ③

Alles, was mit Schnittpunkten, Schnittgeraden zusammenhängt heißt : **Gleichsetzen** ;
in Ausnahmefällen : **Einsetzen**

Satz: (Beide Ebenen in Parameterform):

$E_1 : \vec{x} = \vec{P} + t\,\vec{a} + s\,\vec{b}$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$ $\qquad E_2 : \vec{x} = \vec{Q} + k\,\vec{c} + l\,\vec{d}$ mit $\vec{c}, \vec{d} \neq 0$

Sind beide Ebenen in Parameterform gegeben entsteht die Schnittgerade durch Gleichsetzen der beiden variablen Ortsvektoren der Ebenen:

$$\boxed{\vec{P} + t\,\vec{a} + s\,\vec{b} = \vec{Q} + k\,\vec{c} + l\,\vec{d}}$$

Dabei handelt es sich um ein Gleichungssystem von 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten. Der Gaussche Algorithmus liefert eine für t, s, k eine Lösung abhängig von l. Damit ist die Lösungsmenge eine Gerade.

$$E_1:\ x = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad E_2:\ x = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Satz: (Eine Ebene in Parameterform, eine Ebene in Koordinatenform):

$E_1 : \vec{x} = \vec{P} + t\,\vec{a} + s\,\vec{b}$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$ $\qquad E_2 :\ n_{21}\, x_1 + n_{22}\, x_2 + n_{23}\, x_3 = D$

Die Koordinaten x1, x2, x3 des variablen Ortsvektor der Ebene 1 müssen die Koordinatengleichung der Ebene 2 erfüllen, deshalb wird der allgemeine Ebenpunkt der Ebene 1 in die Gleichung der Ebene 2 eingesetzt.

$$\boxed{n_{21}\,(p_1 + ta_1 + sb_1) + n_{22}\,(p_2 + ta_2 + sb_2) + n_{23}\,(p_3 + ta_3 + sb_3) = D}$$

Dabei handelt es sich um eine Gleichung mit 2 Unbekannten. Die Gleichung ist nach einer der beiden Variablen t oder s aufzulösen: $s = k + m\,t$
(Lösung enthält eine konstante Zahl k und einen Faktor vor dem Parameter t)
und in die Parametergleichung der Ebene einzusetzen:

$$\vec{x} = \vec{P} + t\,\vec{a} + (k + m\,t)\,\vec{b}$$

Das Zusammenfassen aller konstanten Werte zu einem neuen Aufpunkt und das Zusammen-fassen aller mit t behafteten Werte zu einem neuen Richtungsvektor liefern die Schnittgerade.

$$\vec{x} = (\vec{P} + k\,\vec{b}) + t\,(\vec{a} + m\,\vec{b})$$

Satz: (Beide Ebenen in Koordinatenform):

$E_1 :\ n_{11}\, x_1 + n_{12}\, x_2 + n_{13}\, x_3 = D_1$ $\qquad E_2 :\ n_{21}\, x_1 + n_{22}\, x_2 + n_{23}\, x_3 = D_2$

Die Schnittgerade enthält alle die Punkte, die beide Gleichungen erfüllen müssen. Die beiden Ebenengleichungen führen damit zu einem Gleichungssystem von 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten.

$$\boxed{\begin{aligned} n_{11}\, x_1 + n_{12}\, x_2 + n_{13}\, x_3 &= D_1 \\ n_{21}\, x_1 + n_{22}\, x_2 + n_{23}\, x_3 &= D_2 \end{aligned}}$$

Damit besitzt das Gleichungssystem eine Parameterlösung und somit eine Gerade als Lösungsmenge

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden **muss** in beiden Ebenen liegen, da die Gerade beiden Ebenen angehört.
Damit **muss** der Richtungsvektor der Schnittgeraden senkrecht zu beiden Normalenvektoren sein !

11.1.1. Beide Ebenen in Parameterform ③

Musterbeispiel

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4 + s - 12t &= 15 + 4u + 4v \\ 1 + 1,5s - 4t &= 1 - u - v \\ -1 - 2s + 10t &= -6 - u - 9v \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s - 12t - 4u - 4v &= 11 \\ 1,5s - 4t + u + v &= 0 \\ -2s + 10t + u + 9v &= -5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t - 12s - 4u - 4v &= 11 \\ 14s + 7u + 7v &= -16,5 \\ 112v &= 7 \end{aligned}$$

$$v = 1/16$$
$$u = r$$

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1/16 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 + \frac{1}{4} \\ 1 - 1/16 \\ -6 - 9/16 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15,25 \\ {}^{15}/_{16} \\ -6\,{}^{9}/_{16} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diese Geradengleichung entspricht bis auf das Vorzeichen des Richtungsvektors der Geradengleichung des Lösungsweges 1.

Musterbeispiel

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + t + 3s &= 2 + 2u + 2v \\ 1 + 2t + 2s &= 3 + 2u + v \\ 1 + 3t + s &= 1 + 2u + 3v \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t + 3s - 2u - 2v &= 1 \\ 2t + 2s - 2u - v &= 2 \\ 3t + s - 2u - 3v &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t + 3s - 2u - 2v &= 1 \\ -4s + 2u + 3v &= 0 \\ v &= 1 \end{aligned}$$

Parameter für E_1:

$$\begin{aligned} s &= \tfrac{1}{4}(2r + 3) = \tfrac{1}{2}r + \tfrac{3}{4} \\ t &= 1 - 3\left(\tfrac{1}{2}r + \tfrac{3}{4}\right) + 2r + 2 \\ &= \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}r \end{aligned}$$

Parameter für E_2:

$$v = 1$$
$$u = r$$

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}r\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(\tfrac{1}{2}r + \tfrac{3}{4}\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{4} + 9/4 \\ 1 + 3/2 + 3/2 \\ 1 + 9/4 + 3/4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 3/2 \\ 1 + 1 \\ 3/2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In beiden Fällen gelangt man zu der identischen Schnittgeraden. Das muss aber nicht sein. Die Aufpunkte der beiden Geraden müssen nicht gleich sein und die Richtungsvektoren können ein Vielfaches voneinander sein.

11.1.2. Ebene in Parameterform /Ebene in Normalform

③

Normalform von Ebene 1 herstellen

$$E_1 \quad \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\right] = 0$$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}15\\1\\-6\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}4\\-1\\-9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \circ \left[\underbrace{\begin{pmatrix}15\\1\\-6\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}4\\-1\\-9\end{pmatrix}}_{E_2} - \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\right] = 0$$

Parameterform von Ebene 2 einsetzen

Daraus entsteht eine Gleichung mit zwei Unbekannten.

$$1\,(15 + 4u + 4v - 4) + 2\,(1 - u - v - 1) + 2(-6 - u - 9v + 1) = 0$$
$$1 + 0\,u - 16\,v = 0$$
$$v = \frac{1}{16}$$

Im Normalfall entsteht hier eine Abhängigkeit zwischen den beiden Parametern, die dann beim Einsetzen in die Ebenengleichung entsprechend zusammengefasst werden müssen.

Aus den Anteilen mit dem verbleibenden Parameter entsteht der neue Richtungsvektor. Hier ist er identisch mit dem ersten Richtungsvektor der Ebene, da der zugehörige Parameter u bereits beliebig sein darf.

Einsetzen in E_2 :

$$x_1 = 15 + u\,4 + 4/16 = 15{,}25 + u\,4$$
$$x_2 = 1 - u - 1/16 = 15/16 - u$$
$$x_3 = -6 - u - 9/16 = -6\,{}^{9}/_{16} - u$$

Schnittgerade:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}15{,}25\\ {}^{15}/_{16}\\ -6\,{}^{9}/_{16}\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Musterbeispiel

$$E_1 : \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}\right] = 0$$

(da sich auf der linken Seite das u wieder herauslöscht wurde die gleiche Ebene nochmals mit einem anderen Richtungsvektor gerechnet.)

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$(2 + 2u + 2v) + 2\,(-1 + v) + 2(-2 - u + 3v) = 6$$
$$-4 + 10\,v = 6$$
$$v = 1$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$(2 + 0u + 2v) + 2\,(-1 + u + v) + 2(-2 + 4u + 3v) = 6$$
$$-4 + 10\,u + 10\,v = 6$$
$$u = 1 - v$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + (1 - v)\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ist senkrecht zum Normalenvektor der ersten Ebene, also liegt die Gerade zunächst parallel zur Ebene E_1. Für u = –1 und v = 1 ist der Richtungsvektor der geraden eine Linearkombination der beider Richtungsvektoren aus E_2, also auch parallel zu E_2.
Der Punkt (4/0/1) ist zunächst Aufpunkt von E_1, liegt aber für u = 0 und v=1 auch auf E_2. Der Punkt (2/0/2) erfüllt die Ebenengleichung E_1: (1/2/2)○(-2/0/1) = 0 und für u = 1 und v = 0 liegt der Punkt auch auf E_2, damit auf der Schnittgeraden

11.1.3. Beide Ebenen in Normalform ③

$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1\,x_3 = d_1$
$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2\,x_3 = d_2$

Die Anwendung des Gauß'schen Algorithmus führt auf das veränderte Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll} a'_1x_1 & + c'_1\,x_3 = d'_1 & |: a'_1 \\ \quad + b'_2x_2 & + c'_2\,x_3 = d'_2 & |: b'_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_1 & = -\,c''_1\,x_3 + d''_1 \\ \quad x_2 & = -\,c''_2\,x_3 + d''_2 \end{array}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystem ist nicht eindeutig, darf auch nicht, da die Lösung eine Gerade sein muss. Der GTR rechnet das Gleichungssystem so weit, dass auch in der ersten Zeile an der zweiten Stelle eine 0 steht. Die dritte Spalte kann er nicht mehr bearbeiten, weil ihm dazu eine Gleichung fehlt. Üblicherweise setzt man die Koordinaten $x_3 = t$ und erhält damit den Parameter für die Schnittgerade.

Die Matrix des mit rref(berechneten Gleichungssystems hat folgendes Aussehen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & c''_1 & d''_1 \\ 0 & 1 & c''_2 & d''_2 \end{array}\right)$$

Die entstandene Matrix besteht weiter aus 2 Zeilen und 4 Spalten. Die beiden Werte für c müssen mit umgekehrtem Vorzeichen auf die rechte Seite gebracht werden. Man multipliziert jede Zeile der Matrix mit einem 4 dimensionalen Vektor (0, 0, –1, 1) (*da die Matrix hat 4 Spalten hat, kann sie nur mit einem 4 dimensionalen Spaltenvektor multipliziert werden*). Der Faktor 1 an der Position für c bewirkt, dass der Wert für $x_3 = 1$ ist, das Minuszeichen davor bringt die Koeffizienten „auf die rechte Seite“. Die Werte für d sind einfach zu übernehmen. Die daraus berechneten Werte für x_1 und x_2 sind die zu $x_3 = 1$ zugehörigen Komponenten des Lösungsvektors.

Aufpunkt

Alle Werte, die kein t enthalten gehören zum Aufpunkt und alle Werte, die ein t enthalten gehören zum Richtungsvektor. Das kann man sich bei der Berechnung der Geraden zu Nutze machen. Für die Berechnung des Aufpunktes benötigt man kein t, ein Aufpunkt entsteht auch, wenn man t = 0 setzt. Damit entstehen die x_1 und x_2 Koordinaten des Aufpunktes für $x_3 = 0$:

$x_1 = d''_1$; $x_2 = d''_2$; $x_3 = 0$

Stützvektor oder Aufpunkt der Geraden: $\begin{pmatrix} d''_1 \\ d''_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Möchte man den Wert für x_3 nicht gleich 0 setzen, weil dadurch etwa Dezimalzahlen entstehen, dann kann man die Matrix mit einem Vektor (0 , 0, –k, 1) multiplizieren und erhält für die Komponente $x_3 = k$ des Aufpunktes die zugehörigen x_1 und x_2 Komponenten.

Richtungsvektor

Die Bestimmung des Richtungsvektors ist von der rechten Seite unabhängig, da die rechten Seiten niemals einen Parameter t erhalten werden. Damit kann man für den Richtungsvektor die rechten Seiten = 0 setzen

$x_1 = -\,c''_1$; $x_2 = -\,c''_2$; $x_3 = 1$ denn der Wert für x_3 ist $1 \cdot t$

Richtungsvektor der Geraden: $\begin{pmatrix} -c''_1 \\ -c''_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Möchte man den Wert für x_3 nicht gleich 1 setzen, weil dadurch etwa Dezimalzahlen entstehen, dann kann man die Matrix mit einem Vektor (0 , 0, –k, 0) multiplizieren und erhält für die Komponente $x_3 = k$ des Richtungsvektors die zugehörigen x_1 und x_2 Komponenten.

Deshalb kann man die Ergebnismatrix bei der Berechnung des Gleichungssystems einfach mit einer 4 x 2 Matrix multiplizieren.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k & -k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Als Ergebnis erhält man eine 2 x 2 Matrix, bei der in der 1. Spalte ein Stützvektor steht und in der 2. Spalte ein Richtungsvektor. Wenn als irgendwelchen Gründen die Vektoren „unschön“ sind kann man sie durch Veränderung der k Werte ändern.

Musterbeispiel

E_1: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$
E_2: $x_1 + 4x_2 = 19$

Ausgangspunkt ist die Koordinatenform der beiden Ebenen. Damit entsteht ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit 3 Unbekannten. In diesem Gleichungssystem lässt sich mindestens 1 Unbekannte frei wählen.

1. Lösungsweg

Für $x_2 = u$
folgt aus E_2: $x_1 = 19 - 4u$
und aus E_1: $19 - 4u + 2u + 2x_3 = 4$
$x_3 = -15/2 + u$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 19-4u \\ u \\ -7{,}5+u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ -7{,}5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Lösungsweg

$$\begin{aligned} x_1 \quad\; + 4x_3 &= -11 \\ x_2 - x_3 &= 7{,}5 \end{aligned}$$

Die Variable, die jetzt zum Parameter wird ist x_2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 7{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -4 \\ 8{,}5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ 8{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Setzt man in der Gleichung aus Lösungsweg 1 für u = 8,5 ein, dann erhält man den Stützvektor dieser Geradengleichung, also ist er auch ein Punkt auf der Geraden.
In der zweiten Matrix wurden für den Parameter x_3 jeweils eine „1" eingesetzt. Deshalb ist an den x_3 Positionen von Stützvektor und Richtungsvektor ebenfalls eine „1" einzusetzen.

3. Lösungsweg

E_1: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$
E_2: $x_1 + 4x_2 = 19$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden muss in beiden Ebenen liegen. Damit lässt sich der Richtungsvektor aus dem Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren bestimmen. Es ist dann nur noch ein Stützvektor für die Gerade zu bestimmen.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren dürfen durch einen konstanten Wert gekürzt werden, da sich dadurch nicht die Richtung, sondern nur die Länge ändert.
Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ist senkrecht zu beiden Normalenvektoren der Ebene, da er in beiden Ebenen liegen muss !

$$\begin{aligned} x_1 \quad\; + 4x_3 &= -11 \\ x_2 - x_3 &= 7{,}5 \end{aligned}$$

Aus $x_3 = 0$ folgt $x_1 = -11$
und $x_2 = 7{,}5$

Es bleibt einen Punkt zu bestimmen, der auf der Schnittgeraden und damit in beiden Ebenen liegt.
Die Bestimmung des Punktes mit Hilfe der Normalform der Ebenengleichungen, in Koordinatenform geschrieben

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Geraden ist identisch mit den vorhergehenden, der hier angegebene Punkt kann auf der Geraden von Lösungsweg 1 mit dem Parameter u = 7,5 erzeugt werden.

11.1.4. Schnittwinkel von Ebenen

Definition: (Schnittwinkel von Ebenen)

Wenn sich die zwei Ebenen E_1: $(x - p) \circ n_1 = 0$ und E_2: $(x - q) \circ n_2 = 0$ schneiden, dann gilt für den Schnittwinkel, dass er gleich dem Schnittwinkel der beiden Normalenvektoren ist.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$$

Für den Schnittwinkel α gilt : $0^0 \leq \alpha \leq 90^0$

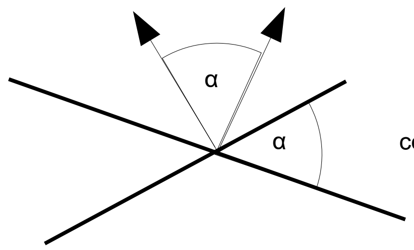
$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}\ \sqrt{1^2 + 4^2 + 0^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

$\alpha = 43{,}31°$

Der Schnittwinkel zweier Ebenen ist der Schnittwinkel der beiden Normalenvektoren

Schnittwinkel α: $0 \leq \alpha \leq 90°$



$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2}{|n_1|\,|n_2|}$$

11.2. Parallele Ebenen ②

11.2.1. Beide Ebenen in Parameterform

$$E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} \qquad E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}3\\7\\3\end{pmatrix}$$

Gleichungssystem erstellen

$$\begin{aligned} 0 + 1t + 1s &= 1 + 2u + 3v \\ -1 - 1t + 4s &= 2 + 3u + 7v \\ -1 - 1t + 2s &= 0 + 1u + 3v \end{aligned}$$

Gleichungssystem umstellen

$$\begin{aligned} t + s - 2u - 3v &= 1 \\ -t + 4s - 3u - 7v &= 3 \\ -t + 2s - 1u - 3v &= 1 \end{aligned}$$

I + II : $5s - 5u - 10v = 4$
I + III: $3s - 3u - 6v = 2$

3*I' – 5*II' : $0 = 2$

- Gleichungssystem enthält einen Widerspruch
- Gleichungssystem ist unlösbar
- Ebenen haben keine gemeinsamen Punkte

11.2.2. Eine Ebene in Parameterform; eine Ebene in Normalform

$$E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} \qquad E_2:\ \begin{pmatrix}-4\\6\\-10\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right] = 0$$

Einsetzen der Ebenengleichung 1 in die Ebenengleichung 2

$$\begin{pmatrix}-4\\6\\-10\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right] = 0$$

Zusammenfassung der konstanten Vektoren

$$\begin{pmatrix}-4\\6\\-10\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}\right] = 0$$

Skalarprodukt berechnen:

$$\begin{aligned} -4(-1 + t + s) + 6(-3 - t + 4s) - 10(-1 - t + 2s) &= 0 \\ 4 - 4t - 4s - 18 - 6t + 24s + 10 + 10t - 20s &= 0 \\ -4 &= 0 \end{aligned}$$

- Gleichungssystem enthält einen Widerspruch
- Gleichungssystem ist unlösbar
- Ebenen haben keine gemeinsamen Punkte

11.2.3. Beide Ebenen in Normalform

$$E_1:\ \begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\right] = 0 \qquad E_2:\ \begin{pmatrix}-4\\6\\-10\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right] = 0$$

Umschreiben der Ebenen in Koordinatenform

$2x - 3y + 5z = -2$ $\qquad$ $-4x + 6y - 10z = 8$

Gleichungssystem erstellen

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= -2 \\ -4x + 6y - 10z &= 8 \end{aligned}$$

2*I + II : $0 = 4$

- Gleichungssystem enthält einen Widerspruch
- Gleichungssystem ist unlösbar
- Ebenen haben keine gemeinsamen Punkte

11.2.4. Abstand paralleler Ebenen

Auch in diesem Fall sind die beiden Ebenen parallel. Damit haben alle Punkte einer Ebene den gleichen Abstand zur anderen Ebene. Damit wählt man wieder den Aufpunkt einer Ebene und bestimmt den Abstand dieses Punktes zur anderen Ebene.
Beide Ebenen haben den gleichen Normalenvektor.

Eine der beiden Ebenen ist in die Normalform zu überführen. Abstandsberechnungen können nur unter Benutzung des Normalenvektors durchgeführt werden. In diesem Fall wurde die Ebene 2 in Normalform überführt. In diese Ebenengleichung ist der Stützvektor der Ebene 1 einzusetzen und durch den Betrag des Normalenvektors zu dividieren.

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad E_2: \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\text{Abstand} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{38}}}_{\text{Betrag des Normalenvektors}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{Stützvektor von } E_1} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{38}} \cdot (-2) \approx -0{,}3244$$

Das negative Vorzeichen macht normalerweise keine Probleme, außer bei manchen Lehrern. Das Vorzeichen richtet sich danach, in welchen Teil des Halbraums der Normalenvektor zeigt und in welchem Halbraum der Punkt liegt. Deshalb spricht man in der Vektorrechnung bei der Berechnung des Abstandes auch von einem „orientierten Abstand".

11.3. Identische Ebenen ①

11.3.1. Beide Ebenen in Parameterform

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem erstellen

$$\begin{aligned} 0 + 1t + 1s &= -1 + 2u + 3v \\ -1 - 1t + 4s &= 0 + 3u + 7v \\ -1 - 1t + 2s &= 0 + 1u + 3v \end{aligned}$$

Gleichungssystem umstellen

$$\begin{aligned} t + s - 2u - 3v &= -1 \\ -t + 4s - 3u - 7v &= 1 \\ -t + 2s - 1u - 3v &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I + II:} &\quad 5s - 5u - 10v = 0 \\ \text{I + III:} &\quad 3s - 3u - 6v = 0 \end{aligned}$$

$3 \cdot \text{I}' - 5 \cdot \text{II}'$: $0 = 0$

- Gleichungssystem ist immer richtig
- Ebenen sind identisch

11.3.2. Eine Ebene in Parameterform; eine Ebene in Normalform

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad E_2: \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Einsetzen der Ebenengleichung 1 in die Ebenengleichung 2

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Zusammenfassung der konstanten Vektoren

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Skalarprodukt berechnen:

$$\begin{aligned} -4\,(1 + t + s) + 6\,(-1 - t + 4s) - 10\,(-1 - t + 2s) &= 0 \\ -4 - 4t - 4s - 6 - 6t + 24s + 10 + 10t - 20s &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

- Gleichungssystem ist immer richtig
- Ebenen sind identisch

11.3.3. Beide Ebenen in Normalform

$$E_1: \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad E_2: \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Umschreiben der Ebenen in Koordinatenform

$$2x - 3y + 5z = -2 \qquad -4x + 6y - 10z = 4$$

Gleichungssystem erstellen

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= -2 \\ -4x + 6y - 10z &= 4 \end{aligned}$$

$2 \cdot \text{I} + \text{II}$: $0 = 0$

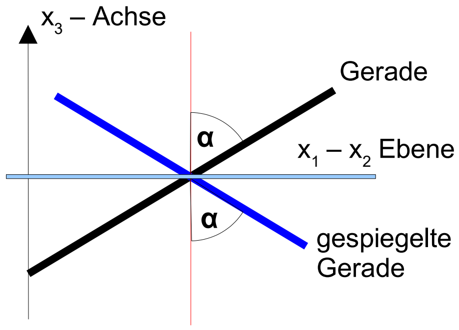
- Gleichungssystem ist immer richtig
- Ebenen sind identisch

12. Spiegelung und Reflexion

Diese Thema wird nicht immer im Unterricht behandelt, aber teilweise doch Aufgaben dazu gestellt. Der Grund dafür ist, dass für dieses Thema die Abstandsberechnung die Grundlage sind und man die Aufgaben als Anwendung der Abstandsberechnungen ansehen kann. Deshalb ist es nützlich vorher das Dokument zum „Abstand“ zu lesen. Außerdem ist für beide Probleme die Berechnung des Durchstoßpunktes eine zentrale Aufgabenstellung.
Im Abitur waren Berechnungen von Spiegelungen noch nicht dran, aber in den Pflichtaufgaben Beschreibungen verlangt, wie man eine solche Spiegelung rechnen müsste.

Spiegelung

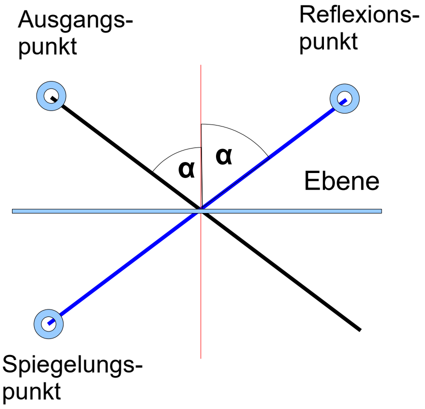
Das Thema Spiegelung trifft für alle möglichen geometrischen Gebilde zu, so für Punkte, Geraden, Ebenen. Ausgangspunkt der Überlegung ist immer, dass der Spiegelpunkt von dem „Spiegel“ genau so weit entfernt ist, wie der Ausgangspunkt, aber „auf der anderen Seite“ des Spiegels liegt. Die nebenstehende Zeichnung zeigt die Spiegelung einer Geraden an der x_1-x_2 Ebene.
Charakteristisch dabei ist, dass alle Punkte, die über der x_1-x_2-Ebene liegen auf Punkte gespiegelt wird, die unterhalb der x_1-x_2-Ebenen liegen und umgekehrt.



Reflexion

Im Gegensatz zur Spieglung bleiben der Reflexion Punkte, die oberhalb der Reflexionsebene liegen auch oberhalb der Ebene erhalten. Wie aus der Optik bekannt ist, spielt dabei der Reflexionswinkel eine wesentliche Rolle. Dieser Reflexionswinkel wird in der Vektorrechnung als Geradengleichung angegeben.
Aus der Zeichnung ist die Vorgehensweise zum Berechnen der Reflexionspunktes zu sehen. Der Reflexionspunkt liegt auf der gespiegelten Geraden des Einfallswinkels des Ausgangspunkt und hat vom Durchstoßpunkt der beiden Geraden den gleichen Abstand, wie der Ausgangspunkt.

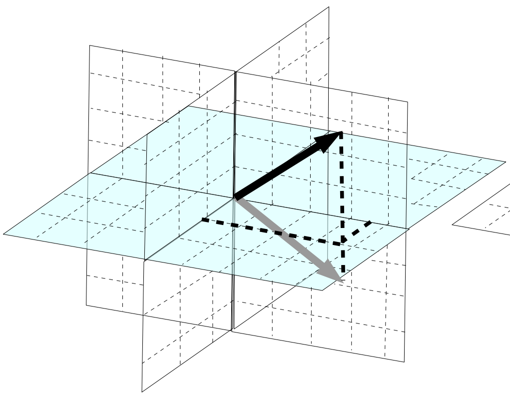
Damit hat der Reflexionspunkt folgende Eigenschaften:



- Er ist von der Reflexionsebene genau so weit entfernt, wie der Ausgangspunkt.
- Er liegt auf einer Geraden, die mit der Ausgangsgeraden den gleichen Durchstoßpunkt auf der Reflexionsebene besitzt
- Der Reflexionspunkt ist von diesem Durchstoßpunkt genau so weit entfernt, wie der Ausgangspunkt.
- Der Reflexionspunkt liegt auf der gleichen Seite, wie der Ausgangspunkt.
- Die Entfernung zwischen Spiegelungspunkt und Durchstoßpunkt ist auf der anderen Seite des Durchstoßpunktes abzutragen, um den Reflexionspunkt zu erhalten.

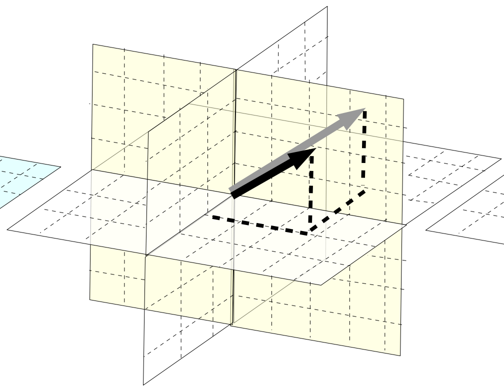
12.1. Spiegelung eines Punktes an einer Koordinatenebene

Spiegelung an der $x_1 - x_2$ Ebene



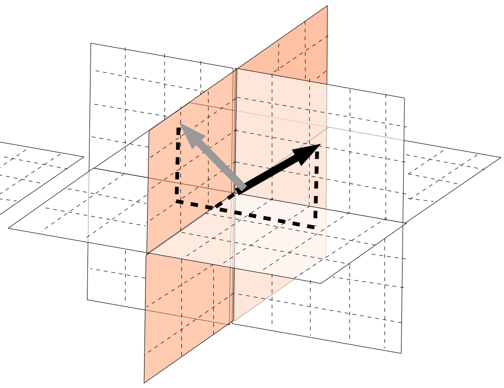
Die x_1 und x_2 Komponenten des gespiegelten Vektors sind gleich dem Ausgangsvektor, die x_3 Komponente ändert das Vorzeichen.

Spiegelung an der $x_2 - x_3$ Ebene



Die x_2 und x_3 Komponenten des gespiegelten Vektors sind gleich dem Ausgangsvektor, die x_1 Komponente ändert das Vorzeichen.

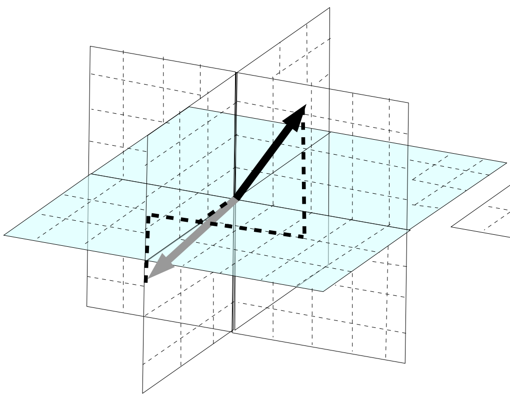
Spiegelung an der $x_1 - x_3$ Ebene



Die x_1 und x_3 Komponenten des gespiegelten Vektors sind gleich dem Ausgangsvektor, die x_2 Komponente ändert das Vorzeichen.

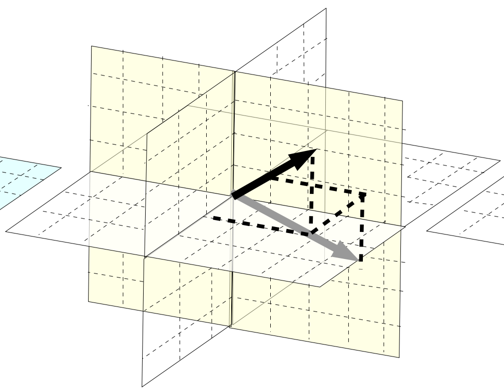
12.2. Spiegelung eines Punktes an einer Koordinatenachse

Spiegelung an der x_1 Achse



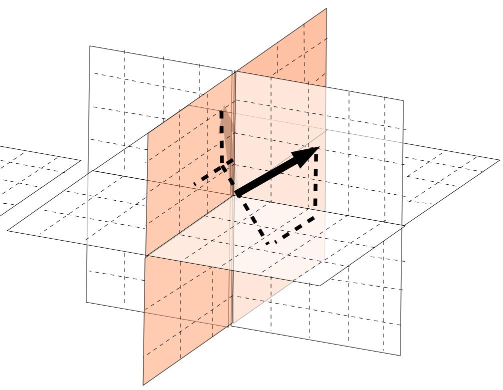
Die x_1 Komponente des gespiegelten Vektors sind gleich dem Ausgangsvektor, die x_2 und x_3 Komponente ändert das Vorzeichen.

Spiegelung an der x_2 Achse



Die x_2 Komponenten des gespiegelten Vektors sind gleich dem Ausgangsvektor, die x_1 und x_2 Komponente ändert das Vorzeichen.

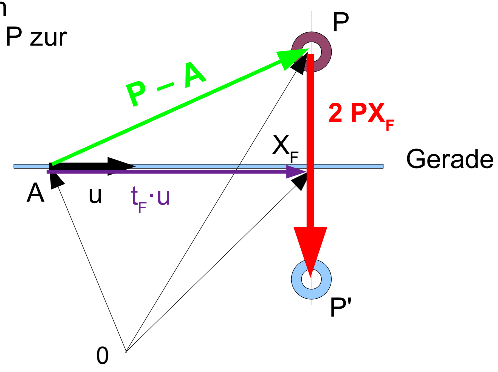
Spiegelung an der x_3 Achse



Die x_3 Komponenten des gespiegelten Vektors sind gleich dem Ausgangsvektor, die x_1 und x_2 Komponente ändert das Vorzeichen.

12.3. Spiegelung eines Punktes an einer Geraden

Soll ein Punkt an einer Geraden gespiegelt werden, benötigt man unbedingt den Fußpunkt des senkrechten Abstandes vom Punkt P zur Geraden, den Fußpunkt des Lotes auf die Gerade.



Diese Berechnung wurde bereits beim Abstand eines Punktes von einer Geraden gezeigt.
Jetzt berechnet man den Richtungsvektor vom Punkt P zum Fußpunkt (auf die richtige Richtung achten!) dieser Vektor wird verdoppelt und zum Punkt P addiert. Dadurch erhält man den gespiegelten Punkt P'.

$$P + PX_F = A + t_F\, u$$

unter der Bedingung, dass $PX_F \circ u = 0$

Spiegelung eines Punktes an einer Geraden im R^3

Wie bei der Abstandsberechnung eines Punktes von einer Geraden im R^3 ist hier mehr Aufwand zu treiben, als im R^2. Das liegt daran, dass die notwendige senkrechte Richtung nicht eindeutig festgelegt ist, da zu einer Geraden eine ganze Ebene senkrecht ist. Deshalb muss hier erst der Fußpunkt bestimmt werden, damit von diesem die Verbindung zum Punkt P gebildet werden kann.
Dazu kann man die beiden Verfahren nutzen, die schon beim Berechnen des Lotes auf eine Gerade benutzt wurden:

1. Ebene senkrecht zur Gerade und durch P, dann Durchstoßpunkt durch die Ebene berechnen. Dieser Durchstoßpunkt ist der gesuchte Fußpunkt.
2. Projektion des Verbindungsvektors von P mit dem Geradenstützvektor auf den Richtungs**einheits**vektor der Geraden. Der berechnete Abstand ist der Abstand des Fußpunktes vom Aufpunkt der Geraden.

Hier soll der 2. Weg beschrieben werden.

12.3.1. Projektion des Verbindungsvektors auf den Richtungsvektor

Zur Auflösung der ersten Gleichung nach t_F müssen die Vektoren dieser Gleichung das Skalarprodukt mit u gebildet werden.
(Warum! Weil nur das sichert, dass bei dem Faktor t_F eine reelle Zahl $|u|^2$ entsteht, durch die dann dividiert werden kann.)

$$P \circ u + PX_F \circ u = A \circ u + t_F\, |u|^2$$

was aufgelöst nach t_F liefert: $t_F = \dfrac{(P - A) \circ u}{|u|^2} = [\,(P - A) \circ u^0\,] \bullet \dfrac{1}{|u|}$

(Was ist das ? : $[\,(P - A) \circ u^0\,]$ ist eine Projektion des Vektors P – A auf den Vektor u^0, und nach der Geometrie die Länge von P-A in Richtung u (Interpretation Skalarprodukt). Diese Länge multipliziert mit dem Einheitsvektor in Richtung u liefert von A aus genau den Fußpunkt des Lotes. siehe dazu obige Zeichnung)

$X_F = A + t_F\, u$ *Das bei der Berechnung von t_F „noch übrige $1/|u|$“ sichert, dass hier das t_F eigentlich mit dem Einheitsvektor u^0 multipliziert wird. Was auch so sein muss, da durch die Länge von u keine zusätzliche Längenänderung entstehen darf.*

$X_F - P$ liefert den Abstandvektor.

Musterbeispiel

Der Punkt P ist an der Geraden g zu spiegeln.

Geradengleichung: $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ $P - A = AP = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix}$

Projektion auf den Einheitsvektor des Richtungsvektors

$$t_F = (P - A) \circ \frac{u}{|u|} \qquad t_F = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} \right) \circ \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-2 - 12 - 14}{\sqrt{14}} = \frac{-28}{\sqrt{14}}$$

Lotfußpunkt bestimmen

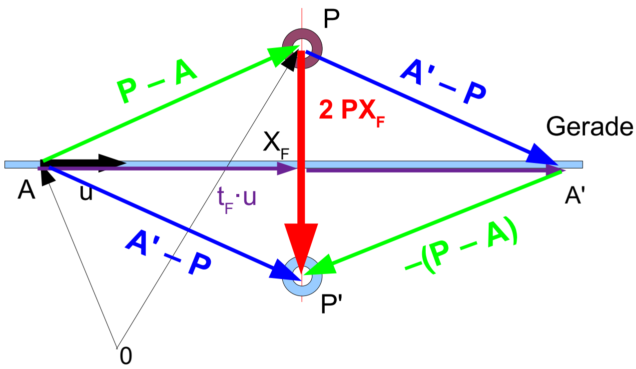
$$X_F = A + t_F\, u^0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{-28}{\sqrt{14}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u^0} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Hier ist auf die genaue Richtung zu achten ! $PX_F = X_F - P$

$$P' = P + 2PX_F \qquad \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix}$$

12.3.2. Nutzung des projizierten Vektors

Bei dem vorher beschriebenen Lösungsweg wurde schon auf folgende Gleichungen aufmerksam gemacht, die entstehen, wenn man den Differenzvektor P – A auf die Gerade mittels Skalarprodukt projiziert.



$$P + PX_F = A + t_F\, u \qquad | \circ u$$

$$P \circ u + PX_F \circ u = A \circ u + t_F\, |u|^2$$

$$t_F = \frac{(P - A) \circ u}{|u|^2} = [\,(P - A) \circ u^0\,] \bullet \frac{1}{|u|}$$

setzt man diesen Wert für t in die Geradengleichung ein, und berücksichtigt, dass die Division eines Vektors durch seinen Betrag auf den Einheitsvektor führt, erhält man für den Fußpunkt folgende Gleichung

$$x_F = A + [\,(P - A) \circ u^0\,]\, u^0$$

Dieser Vektor führt genau zum Fußpunkt auf der Geraden. Setzt man jetzt den Vektor von A nach F noch einmal in F an entsteht, wie in der obigen Zeichnung zu erkennen ein gleichschenkliges Dreieck mit P als Punkt der Spitze und die Seiten von P auf die Gerade sind gleich lang.
Spiegelt man dieses Gebilde an der Geraden erhält man eine Raute mit gleich langen Seiten und senkrecht stehenden Diagonalen. Diese Raute liefert einen Weg, den Spiegelpunkt zu berechnen.

$$A' = A + 2 \bullet [\,(P - A) \circ u^0\,]\, u^0$$

Von dem Punkt A' auf der Geraden, der durch die Verdoppelung des projizierten Vektors entstanden ist, ist der Vektor P – A zu subtrahieren und man gelangt zum Spiegelpunkt.

Geradengleichung: $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$t_F = \frac{-28}{\sqrt{14}}$$

Diese Werte stammen von der vorherigen Seite.

Berechnung des Punktes A'

$$A' = A + 2\, t_F\, u^0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} + 2\, \frac{-28}{\sqrt{14}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u^0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Von diesem Punkt A' den Vektor
AP = P – A subtrahieren:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{A'} \underbrace{-}_{-} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix}}_{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Zum Punkt A den Vektor
PA' = A' – P addieren:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{+}_{+} \underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}}_{PA'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Der auf der vorherigen Seite berechnete Spiegelpunkt

12.3.3. Berechnung mit Hilfe von Spiegelungsmatrizen

Die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix kann man geometrisch als Drehung des Vektors im Koordinatensystem ansehen. Über geeignete Matrizen ist auf diesem Weg auch eine Spiegelung berechenbar. Der Ausgangspunkt ist der gleiche, wie in den vorherigen Abschnitten, aber der Lösungsweg erfolgt nicht über Teilergebnisse einzelner Vektoren, sondern in einer Zusammenfassung aller Berechnungen in Matrizen und Vektoren.

Spiegelung eines Punktes P an einer Geraden: $x = A + t\,r$

Zunächst Berechnung des Fußpunktes über das Lot l : $F = P + l$

Fußpunkt ist auch Geradenpunkt (r ist senkrecht zu l)

$$A + t\,r = P + l \qquad | \circ r$$
$$A \circ r + t\,r \circ r = P \circ r$$
$$t = \frac{(P - A) \circ r}{r^2}$$

t einsetzen und umstellen nach l :

$$A + t\,r = P + l$$
$$A - P + \frac{(P - A) \circ r}{r^2}\, r = l$$

Berechnen des Spiegelpunktes

$$\begin{aligned} P' &= P + 2\,l \\ &= P + 2\,A - 2P + 2\,\frac{(P - A) \circ r}{r^2}\, r \\ &= P - 2\,(P - A) + 2\,\frac{(P - A) \circ r}{r^2}\, r \\ &= A - (P - A) + 2\,\frac{(P - A) \circ r}{r^2}\, r \end{aligned}$$

Komponentenweise Darstellung der Vektoren

$$= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \right) + \frac{2}{r^2}\,\left((P\text{-}A)_1 r_1 + (P\text{-}A)_2 r_2 + (P\text{-}A)_3 r_3 \right) \bullet \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (P\text{-}A)_1 \\ (P\text{-}A)_2 \\ (P\text{-}A)_3 \end{pmatrix} + \frac{2}{r^2} \begin{pmatrix} (P\text{-}A)_1 r_1)\, r_1 + (P\text{-}A)_2 r_2)\, r_1 + (P\text{-}A)_3 r_3)\, r_1 \\ (P\text{-}A)_1 r_1)\, r_2 + (P\text{-}A)_2 r_2)\, r_2 + (P\text{-}A)_3 r_3)\, r_2 \\ (P\text{-}A)_1 r_1)\, r_3 + (P\text{-}A)_2 r_2)\, r_3 + (P\text{-}A)_3 r_3)\, r_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (P\text{-}A)_1 \\ (P\text{-}A)_2 \\ (P\text{-}A)_3 \end{pmatrix} + \frac{2}{r^2} \begin{pmatrix} (r_1)^2\,(P\text{-}A)_1 + (r_2 r_1)\,(P\text{-}A)_2 + (r_3 r_1)\,(P\text{-}A)_3 \\ (r_1 r_2)\,(P\text{-}A)_1 + (r_2)^2\,(P\text{-}A)_2 + (r_3 r_2)\,(P\text{-}A)_3 \\ (r_1 r_3)\,(P\text{-}A)_1 + (r_2 r_3)\,(P\text{-}A)_2 + (r_3)^2\,(P\text{-}A)_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (P\text{-}A)_1 \\ (P\text{-}A)_2 \\ (P\text{-}A)_3 \end{pmatrix} + \frac{2}{r^2} \begin{pmatrix} (r_1)^2 & (r_2 r_1) & (r_3 r_1) \\ (r_1 r_2) & (r_2)^2 & (r_3 r_2) \\ (r_1 r_3) & (r_2 r_3) & (r_3)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (P\text{-}A)_1 \\ (P\text{-}A)_2 \\ (P\text{-}A)_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \left(\frac{2}{r^2} \begin{pmatrix} (r_1)^2 & (r_2 r_1) & (r_3 r_1) \\ (r_1 r_2) & (r_2)^2 & (r_3 r_2) \\ (r_1 r_3) & (r_2 r_3) & (r_3)^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} (P\text{-}A)_1 \\ (P\text{-}A)_2 \\ (P\text{-}A)_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P' = A + \left(\frac{2}{r^2}\,(r \bullet r^T) - E \right) (P - A)}$$

$r \circ r^T$: Multipliziert einen Spaltenvektor mit einem Zeilenvektor, das Ergebnis ist eine quadratische Matrix

Auch, wenn die Gleichung auf den ersten Blick nicht sehr freundlich aussieht. Eine solche Rechnung ist nur sinnvoll mit einen GTR zu rechnen, der Matrizen berechnen kann. Unter diesem Aspekt benutzt die Formel möglichst wenig verschiedene Matrizen und sie lassen sich bis auf die Einheitsmatrix auch direkt aus der Geraden und dem Punkt generieren.

Bricht man bei der vorherigen Berechnung die Berechnung an der Stelle ab:

Berechnen des Spiegelpunktes $\quad P' = P + 2\,l$

und orientiert sich nicht auf die Berechnung des Spiegelpunktes, sondern des Lotfußpunktes, dann ergibt sich folgendes

Berechnen des Lotfußpunktes $\quad F = P + l$

$$F = P + A - P + \frac{(P-A)\circ r}{r^2}\, r$$

$$F = P + \frac{(P-A)\circ r}{r^2}\, r - E\,(P-A)$$

$$\boxed{F = P + \left(\frac{1}{r^2}\,(r \bullet r^T) - E\right) \bullet (P-A)}$$

gleichzeitig ergibt sich mit F – P der Abstand des Punktes P von der Geraden

$$\boxed{F - P = \left(\frac{1}{r^2}\,(r \bullet r^T) - E\right) \bullet (P-A)}$$

Musterbeispiel

Beispiel aus dem **Kapitel 12.3.**

Geradengleichung: $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad P' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix} \quad F - P = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$

Ergebnisse aus Kapitel 12.3.

$r^2 = r^T \circ r = 14$ (Quadrat des Betrages des Vektors r)

Die zur Berechnung notwendigen Matrizen und Vektoren :

$$\frac{1}{r^2} \bullet (r \bullet r^T) = \begin{pmatrix} 2/7 & 3/7 & 1/7 \\ 3/7 & 9/14 & 3/14 \\ 1/7 & 3/14 & 1/14 \end{pmatrix} \qquad 2 \bullet \frac{1}{r^2} \bullet (r \bullet r^T) = \begin{pmatrix} 4/7 & 6/7 & 2/7 \\ 6/7 & 1\,2/7 & 3/7 \\ 2/7 & 3/7 & 1/7 \end{pmatrix} \qquad P - A = \begin{pmatrix} 7-8 \\ 7-11 \\ -6-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Lotfußpunktes:

$$F = P + \left(\frac{1}{r^2}\,(r \bullet r^T) - E\right) \bullet (P-A) = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/7 & 3/7 & 1/7 \\ 3/7 & 9/14 & 3/14 \\ 1/7 & 3/14 & 1/14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Abstandsvektors :

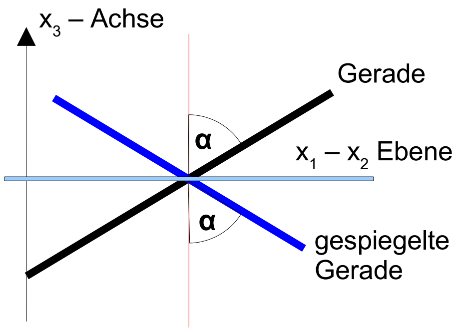
$$F - P = \left(\frac{1}{r^2}\,(r \bullet r^T) - E\right) \bullet (P-A) = \begin{pmatrix} 2/7 & 3/7 & 1/7 \\ 3/7 & 9/14 & 3/14 \\ 1/7 & 3/14 & 1/14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Berechnung des gespiegelten Punktes :

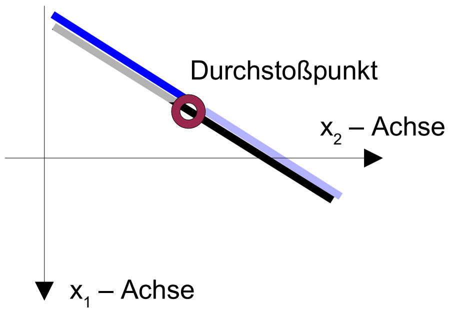
$$P' = A + \left(\frac{2}{r^2}\,(r \bullet r^T) - E\right)(P-A) = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/7 & 6/7 & 2/7 \\ 6/7 & 2/7 & 3/7 \\ 2/7 & 3/7 & -6/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix}$$

12.4. Spiegelung einer Geraden an einer Koordinatenebene

Seitenansicht



Draufsicht $x_1 - x_2$ – Ebene ; $x_3 = 0$



An den nebenstehenden Ansichten ist zu erkennen, dass die gespiegelte Gerade die gleiche Projektions-gerade in der x_1–x_2 – Ebene besitzt, wie die Ausgangsgerade. Damit müssen die x_1 und x_2 Komponenten des Richtungsvektors mit denen der Ausgangsgeraden identisch sein (Natürlich nicht in der Länge, aber man benutzt der Einfachheit halber die gleichen Werte wie bei der Ausgangsgerade).

Außerdem muss der Richtungsvektor der gespiegelten Geraden mit dem Normalenvektor der x_1–x_2–Ebene den gleichen Winkel bilden, wie der Richtungsvektor der Ausgangsgeraden. Damit müssen beide das gleiche Skalarprodukt bilden, da die x_1 und x_2 Komponenten gleich sind, muss die x_3 Komponente vom Betrag her auch mit der x_3-Kompo-nente des Richtungsvektors der Ausgangsgeraden übereinstimmen. Aber die x_3–Richtung ist genau entgegengesetzt, also ändert sich nur das Vorzeichen der x_3 Komponente beim Richtungsvektor.

Diese Erkenntnis kann an sich auch bei der Bestimmung des Aufpunktes zu Nutze machen. Kennt man irgend einen Punkt der auf der Geraden liegt, behält man die x_1 und x_2 Koordinaten bei und ändert bei der x_3 Koordinate das Vorzeichen. Damit kann man der möglicherweise unschönen Berechnung des Durchstoßpunktes entgehen.

Musterbeispiel

Geradengleichung: $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zwei Punkte auf der Geraden (s=0 ; s=2): $P1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $P2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

an der x_1-x_2-Ebene gespiegelte Punkte: $P1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $P2' = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

Geradengleichung aus den gespiegelten Punkten:

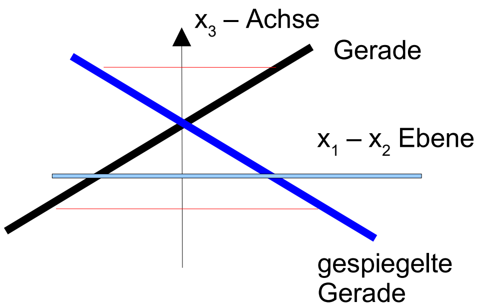
$g_1' : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ oder auch: $g_1' : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Schlußfolgerung: Die Geradengleichung entsteht auch, wenn man einen Punkt spiegelt und beim Richtungsvektor bei der x_3 – Komponente das Vorzeichen vertauscht.

12.5. Spiegelung einer Geraden an einer Koordinatenachse

Zunächst ist zu klären, was unter Spiegelung an einer Achse zu verstehen ist. Eine Achse ist keine Spiegelungsebene im herkömmlichen Sinn. Dazu soll hier eine Spiegelung an der x_3 – Achse betrachtet werden.

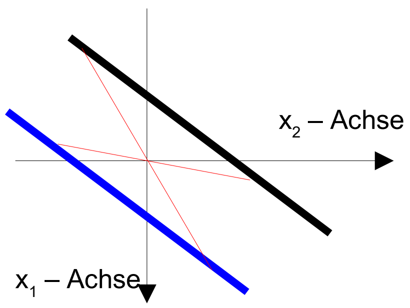
Seitenansicht



Zu jedem x_3 –Wert auf der x_3 – Achse kann man eine zur x_3-Achse senkrechte Linie – oder eine parallele Linie zu x_1–x_2 Ebene – zu der Geraden ziehen. Damit wird eine zur x_1-x_2 Ebene parallele Gerade definiert, die die x_3 Achse schneidet. Trägt man jetzt den Abstand von der x_3 – Achse bis zur Ausgangsgeraden in die entgegengesetzte Richtung ab, erhält man wieder einen Punkt.

Die Verbindung aller dieser Punkte liefert wieder eine Gerade. Diese Gerade versteht man unter der an der Achse gespiegelten Geraden. Daraus folgt die erste Eigenschaft der gespiegelten Geraden: Ausgangspunkt und gespiegelter Punkt haben die gleiche x_3 –Koordinate. Die Geraden selbst müssen weder sich noch die x_3-Achse schneiden. Das wird noch einmal an der Draufsicht der x_1 - x_2 Ebene sichtbar.

Draufsicht x_1 – x_2 – Ebene ; $x_3 = 0$



Diese Draufsicht macht weitere Eigenschaften der gespiegelten Geraden deutlich: Sowohl die x_1 Koordinate, als auch die x_2 Koordinate eines Punktes ändern ihr Vorzeichen. Die Projektion der Geraden in die x_1 –x_2 Ebene führt zu einer parallelen Geraden, das bedeutet, dass die x_1 und x_2 Komponenten des Richtungsvektors gleich sind. Ein anderer Aufpunkt liefert eine parallele Gerade.

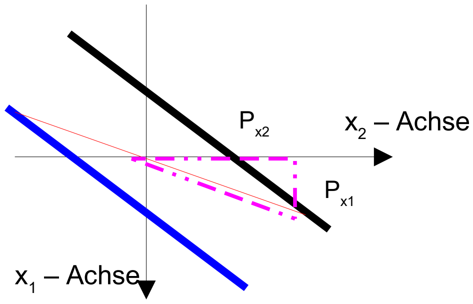
Die Seitenansicht der beiden Geraden zeigt, dass die Gerade für die entgegengesetzten x_1 und x_2 Werte genauso steigend oder fallend ist, wie die Ausgangsgerade.

Musterbeispiel

Geradengleichung: $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zwei Punkte auf der Geraden (s=0 ; s=2):

$P1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $P2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$



Der Abstand zur x_3 – Achse bestimmt sich aus dem Pythagoras: $d = \sqrt{P_{x1}^2 + P_{x2}^2}$

aus der x_1 und x_2 Komponente des Punktes P.

Abstand P_1 : $\sqrt{14}$
Abstand P_2: $\sqrt{102}$

an der x_3-Achse gespiegelte Punkte: $P1' = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $P2' = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Geradengleichung aus den gespiegelten Punkten:

$g_1' : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ oder auch: $g_1' : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ indem jede Komponente des Richtungsvektors durch 2 dividiert wird.

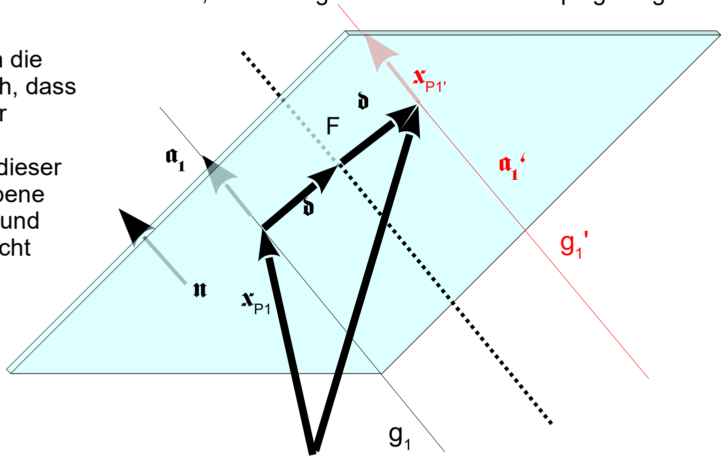
Schlußfolgerung: Die Geradengleichung entsteht auch, wenn man einen Punkt spiegelt und beim Richtungsvektor bei der x_3 – Komponente das Vorzeichen vertauscht.

12.6. Spiegelung Gerade an einer parallelen Geraden

Damit eine Gerade an einer anderen Geraden gespiegelt werden kann, ist eine Möglichkeit, dass die beiden Geraden parallel sind.
Wie bereits bei Spiegelung an einer Koordinatenachse zu sehen war, ist das Ergebnis einer solchen Spiegelung eine parallele Gerade.

Wenn eine Spiegelung nur stattfinden kann, wenn die beiden Geraden parallel sind, dann heißt das auch, dass die beiden Geraden den gleichen Richtungsvektor haben.
Damit lässt sich eine Ebene konstruieren, für die dieser Richtungsvektor der Normalenvektor ist. Diese Ebene wird von beiden Geraden senkrecht durchstoßen und muss auch von der gespiegelten Geraden senkrecht durchstoßen werden.

Für das Erstellen dieser Ebene wird der Richtungsvektor der Spiegelgeraden benutzt (ist in dem Fall identisch mit dem Richtungsvektor der Geraden g) und als Aufpunkt der Ebene der Aufpunkt der Geraden g_1.



Dann wird der Abstandsvektor von x_{P1} nach F berechnet und dieser Vektor noch einmal zum Punkt F addiert.
Damit erhält man den Spiegelpunkt x_{P1}' des Punktes x_{P1}. Mit diesem Punkt und dem Richtungsvektor a_1 von g_1 kann man die Gleichung der gespiegelten Geraden aufstellen.

Musterbeispiel

$$g: x = \begin{pmatrix}-2\\-6\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \qquad h: x = \begin{pmatrix}5\\9\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$$

1. Aufstellen der Hilfsebene in Normalenform :

Aufpunkt: $\begin{pmatrix}-2\\-6\\1\end{pmatrix}$ Normalenvektor: $\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$ $E: \left[x - \begin{pmatrix}-2\\-6\\1\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} = 0$ $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -16$

2. Schnitt von *h* mit *E* liefert Fußpunkt *F* :

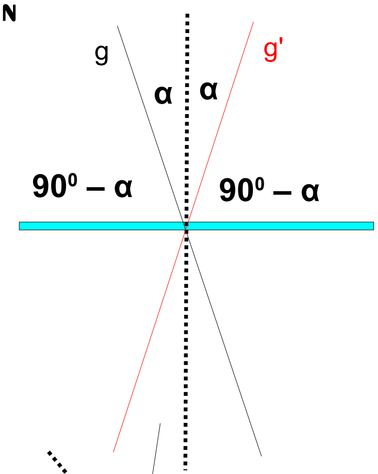
$3 \cdot (5 + 3s) + 2 \cdot (9 + 2s) + 2 \cdot (1 + 2s) = -16 \quad \Rightarrow \quad s = -3$

3. s = − 3 in h eingesetzt liefert : F(− 4 | 3 | − 5)

4. $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2\,\overrightarrow{PF}$

$$\begin{pmatrix}-2\\-6\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-2\\9\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\12\\-11\end{pmatrix} \qquad g^*: x = \begin{pmatrix}-6\\12\\-11\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$$

12.7. Spiegelung Gerade an einer schneidenden Geraden

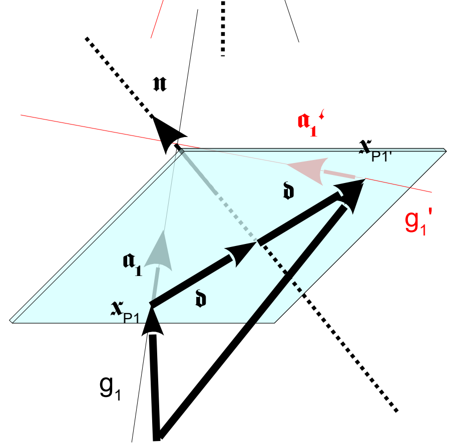


Das Spiegeln an sich schneidenden Geraden ist das Gleiche, wie das Spiegeln an der senkrechten Ebenen der Spiegelgeraden. Dazu soll die nebenstehende Zeichnung betrachtet werden.

Der Winkel α zwischen der Geraden g die gespiegelt werden soll und der Geraden, an der gespiegelt werden soll, ist der gleiche, wie der Winkel von der Geraden, an der gespiegelt werden soll und dem gespiegelten Bild von g. Das ist die Definition einer Spiegelung.
Aber es sind auch die Winkel der Geraden g und der gespiegelten Geraden g' mit der zur Spiegelgeraden senkrechten Ebene gleich und es entsteht dadurch das gleiche Spiegelbild.

Aus dieser Vorüberlegung entsteht der Lösungsweg für die Spiegelung der Geraden.

- Es wir die zur Spiegelgeraden senkrechte Ebene erzeugt. Dazu benutzt man den Richtungsvektor der Spiegelgeraden als Normalenvektor der Ebene und als Aufpunkt für die Ebene wird der Aufpunkt der Geraden g benutzt.
- Anschließend wird der Durchstoßpunkt der Spiegelgeraden durch diese Ebene bestimmt.
- Dieser Differenzvektor wird an den Fußpunkt noch einmal angetragen, so erhält man den gespiegelten Aufpunkt der Geraden g_1.
- Gemeinsam mit dem Schnittpunkt von g_1 und der Spiegel-geraden kann man die gespiegelte Geradengleichung aufstellen, denn dieser Schnittpunkt muss auch Punkt der gespiegelten Geraden sein.



Musterbeispiel

$g: x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h: x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneiden sich im Punkt S(2 | 1 | 3)

1. Aufstellen der Hilfsebene in Normalenform :

Aufpunkt von g Richtungsvektor von h

Aufpunkt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Normalenvektor: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad E: \left[x - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ $\quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 2$

2. Schnitt von *h* mit *E* liefert Fußpunkt *F* :

$2 \cdot (4 + 2t) + 1 \cdot (2 + t) + 1 \cdot (4 + t) = 2$

$$8 + 4t + 2 + t + 4 + t = 2$$
$$6t + 14 = 2$$
$$6t = -12$$
$$t = -2$$

Fußpunkt *F* : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2\,\overrightarrow{PF}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

die gespiegelte Gerade ist $\quad g^*: x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

12.8. Spiegelung von Geraden mit Hilfe von Spiegelungsmatrizen

Das Spiegeln eines Punktes an einer Geraden wurde bereits beschrieben. Hier soll es nur noch um die Spiegelung des Richtungsvektors gehen. Natürlich kann man den gespiegelten Richtungsvektor auch aus zwei gespiegelten Punkten neu bestimmen. Da der Richtungsvektor ein verschiebbarer Vektor ist, kann man sich ihn auch mit dem Fußpunkt auf der Geraden denken. Außerdem kann man sich dann die Gerade als Ursprungsgerade denken. Damit erhält man die Spiegelung eines Punktes an einer Ursprungsgeraden.

Spiegelung eines Vektors v an einer Ursprungsgeraden:

Ursprungsgerade

$$x = t\,r$$

Zunächst Berechnung des Fußpunktes über das Lot l :

$$F = v + l$$

Fußpunkt ist auch Geradenpunkt (r ist senkrecht zu l)

$$t\,r = v + l \qquad | \circ r$$

$$t\,r \circ r = v \circ r$$

$$t = \frac{v \circ r}{r^2}$$

t einsetzen und umstellen nach l :

$$t\,r = v + l$$

$$\frac{v \circ r}{r^2}\, r = v + l$$

$$\frac{v \circ r}{r^2}\, r - v = l$$

Berechnen des gespiegelten Vektors

$$v' = v + 2\,l$$

$$= v + 2\left(\frac{v \circ r}{r^2}\, r - v\right)$$

$$= 2\,\frac{v \circ r}{r^2}\, r - v$$

$$v' = \frac{2}{r^2}\,(v_1r_1 + v_2r_2 + v_3r_3)\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$v' = \frac{2}{r^2}\begin{pmatrix} (v_1r_1)r_1 + (v_2r_2)r_1 + (v_3r_3)r_1 \\ (v_1r_1)r_2 + (v_2r_2)r_2 + (v_3r_3)r_2 \\ (v_1r_1)r_3 + (v_2r_2)r_3 + (v_3r_3)r_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$v' = \frac{2}{r^2}\begin{pmatrix} (r_1)^2 & r_2r_1 & r_3r_1 \\ r_1r_2 & (r_2)^2 & r_3r_2 \\ r_1r_3 & r_2r_3 & (r_3)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{v' = \left(\frac{2}{r^2}\,(r \cdot r^T) - E\right) v}$$

Die Matrix, mit der der Richtungsvektor v multipliziert werden muss, ist die gleiche wie die Matrix bei der Punktspiegelung für den zu spiegelnden Punkt P. Der Teil für die Berechnung des Stützvektors entfällt, da die Spiegelungsgerade eine Gerade durch den Ursprung ist.

Musterbeispiel

- Parallele Geraden -

zu spiegelnde Gerade

$$g : x = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gerade, an der gespiegelt wird

$$h : x = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P' = A + \left(\frac{2}{r^2} (r \cdot r^T) - E \right) \cdot (P - A) \qquad v' = \frac{2}{r^2} (r \cdot r^T)\, v - v$$

$$\frac{2}{r^2} (r \cdot r^T) = \begin{pmatrix} 1\ 1/9 & 5/7 & 5/7 \\ 5/7 & 4/9 & 4/9 \\ 5/7 & 4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

$$P' = \begin{pmatrix} 1\ 1/9 & 5/7 & 5/7 \\ 5/7 & 4/9 & 4/9 \\ 5/7 & 4/9 & 4/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v' = \begin{pmatrix} 1\ 1/9 & 5/7 & 5/7 \\ 5/7 & 4/9 & 4/9 \\ 5/7 & 4/9 & 4/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P' = \begin{pmatrix} -18 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -11 \end{pmatrix} \qquad v' = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die gespiegelte Gerade ist $g^* : x = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Schneidende Geraden -

zu spiegelnde Gerade

$$g : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gerade, an der gespiegelt wird

$$h : x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden sich im Punkt S(2 | 1 | 3)

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = A + \left(\frac{2}{r^2} (r \cdot r^T) - E \right) \cdot (P - A) \qquad v' = \frac{2}{r^2} (r \cdot r^T)\, v - v$$

$$\frac{2}{r^2} (r \cdot r^T) = \begin{pmatrix} 1\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$P' = \begin{pmatrix} 1\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad v' = \begin{pmatrix} 1\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die gespiegelte Gerade ist $g^* : x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

12.9. Projektion eines Punktes auf eine Gerade (Lotfußpunkt)

Projektion eines Punktes P auf eine Gerade : $x = A + t\,r$

Zunächst Berechnung des Fußpunktes über das Lot l : $F = P + l$

Fußpunkt ist auch Geradenpunkt
(r ist senkrecht zu l)

$$A + t\,r = P + l \qquad | \circ r$$
$$A \circ r + t\,r \circ r = P \circ r$$
$$t = \frac{(P - A) \circ r}{r^2}$$

t einsetzen und umstellen nach l : $A + t\,r = P + l$

$$A - P + \frac{(P - A) \circ r}{r^2}\, r = l$$

Berechnen des Fußpunktes

$$F = P + l$$
$$F = P + A - P + \frac{(P - A) \circ r}{r^2}\, r$$
$$F = P - (P - A) + \frac{1}{r^2}\,(r \bullet r^T)\,(P - A)$$
$$\boxed{\begin{aligned} F &= P + \left(\frac{1}{r^2}\,(r \bullet r^T) - E \right) (P - A) \\ F &= A + \frac{1}{r^2}\,(r \bullet r^T)\,(P - A) \end{aligned}}$$

Außerdem ist F – P der Abstandsvektor des Punktes P zur Geraden und dessen Betrag der Abstand des Punktes zu Ebene :

$$F - P = \left(\frac{1}{r^2}\,(r \bullet r^T) - E \right) (P - A)$$

Musterbeispiel Zum Punkt P ist der Lotfußpunkt zur Geraden g zu bestimmen. (Beispiel aus 12.3)

Geradengleichung: $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\quad P - A = AP = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix}$

Der dort berechnete Lotfußpunkt für die Spiegelung war : $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{r^2}\,(r \bullet r^T)\,(P - A) = \begin{pmatrix} 2/7 & 3/7 & 1/7 \\ 3/7 & 9/14 & 3/14 \\ 1/7 & 3/14 & 1/14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$F = A + \frac{1}{r^2}\,(r \bullet r^T)\,(P - A) = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

12.10. Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

Soll ein Punkt an einer Ebene gespiegelt werden, hat man gegenüber der Geraden den Vorteil dass man die Richtung des senkrechten Abstandes durch den Normalenvektor kennt. Andererseits muss man aufgrund der Orientierung des Normalenvektors unterscheiden, ob der Punkt auf der selben Seite von der Ebene wie der Ursprung liegt, oder auf der anderen Seite, wie der Ursprung.

Der Normalenvektor sollte immer so orientiert sein, dass er auf die Seite zeigt, in der der Ursprung **nicht** liegt.

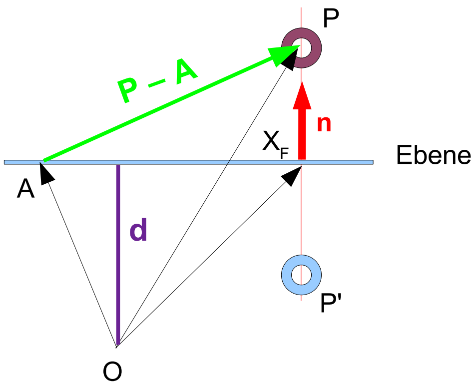
Alle Abstandsberechnungen mit Ebenen laufen über die HNF oder die Koordinatengleichung der Ebene.

Punkt und Ursprung auf verschiedenen Seite der Ebene

$d_P = (P–A) \circ n^0$

d_P n ist ein Vektor, der von der Ebene weg zum Punkt P zeigt.
Der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel ist immer kleiner als 90^0. Damit auch wirklich der Abstand von der Ebene zum Punkt genommen wird, muss der Abstand mit n^0 multipliziert werden.
Außerdem benötigt man von P aus die Richtung zur Ebene und dann den gleichen Abstand noch einmal in die entgegengesetzte Richtung. Damit erhält man den Spiegelpunkt von P durch:

$P' = P – 2 [(P–A) \circ n^0] n^0$

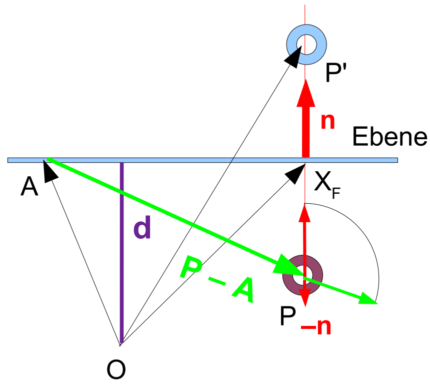


Punkt und Ursprung auf der gleichen Seite der Ebene

$d_P = (P–A) \circ n^0$

Die beiden Vektoren n und (P-A) schließen einen Winkel von mehr als 90^0 ein. Damit liefert das Skalarprodukt einen negativen Wert, weil der cos vor Winkel größer 90^0 negativ ist.
Auf Grund dessen ist die Projektion von P-A auf den Normalenvektor eine Projektion auf -n (siehe Zeichnung).
Damit zeigt $[(P–A) \circ n^0] n^0$ von P aus nicht in die Richtung der Ebene, sondern in die entgegengesetzte Richtung. Also muss $[(P–A) \circ n^0] n^0$ vom Punkt P aus Subtrahiert werden, damit die Richtung zur Ebene hin zeigt.

$P' = P – 2 [(P–A) \circ n^0] n^0$



Musterbeispiel

Der Punkt P ist an der Ebene E zu spiegeln.

Ebenengleichung: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 20$ $P = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $|n| = 3$

1. Abstandsvektor zweimal zu P addieren : $P' = P + 2\ d\ n_0$.

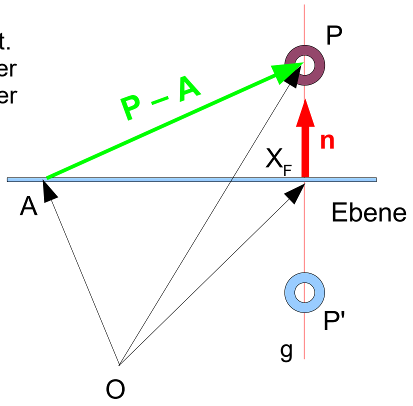
Um den Differenzvektor AP auf den Normalen**einheits**vektor zu projizieren müsste erst ein Punkt auf der Ebene bestimmt werden. Deshalb wird hier ein anderer Weg gewählt. Es wir der Abstand des Punktes von der Ebene bestimmt und der mit dem Nomalen**einheits**vektor multipliziert.

$d = ⅓ (2•7 + 6 + 2•9 – 20) = 6$ Der orientierte Abstand ist positiv, der Punkt liegt auf der anderen Seite des Nullpunktes. Der Normalenvektor zeigt auf die Seite, auf der P liegt.

$$P' = P – 2\ d\ n^0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} – 2 \cdot 6 \cdot ⅓ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. *Erstellen der Lotgeraden und Bestimmung des Schnittpunktes*

Es wird eine zur Ebene senkrechte Gerade erzeugt, die durch den Punkt P geht. Damit ist die notwendige Richtung festgelegt. Auf dieser Geraden muss auch der Spiegelpunkt P' liegen. Der Durchstoßpunkt der Geraden durch die Ebene ist der Fußpunkt des Lotes.



$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad |n| = 3$

Geradengleichung:

$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung:

$\vec{x} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 20$

Durchstoßpunkt durch die Ebene:

$$\begin{aligned} 2(7 + 2s) + (6 + s) + 2(9 + 2s) &= 20 \\ 14 + 4s + 6 + s + 18 + 4s &= 20 \\ 38 + 9s &= 20 \\ 9s &= -18 \\ s &= -2 \end{aligned}$$

$X_F = P + t_F\, u = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ Abstandsvektor PX_F : $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ *Hier ist auf die genaue Richtung zu achten !*

$P' = P + 2PX_F = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. *Neues Koordinatensystem auch Richtungsvektoren und Normalenvektor*

Falls die Ebenengleichung nicht in Normalform gegeben ist. Ohne Berechnung des Normalenvektors geht es aber auch hier nicht.

Ebenengleichung: $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Der Punkt P ist an der Ebene E zu spiegeln. $P = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Normalenvektor und damit senkrechte Richtung: $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die beiden Richtungsvektoren der Ebene und ihr Normalenvektor sind linear unabhängig und bilden damit eine Basis des gesamten Raumes. Um den Vektor P – A in der Basis dieser drei Vektoren darzustellen ist die Lösung eines Gleichungssystems notwendig.

$s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad P - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung des Gleichungssystems: $s = -2$; $t = 2$; $k = 2$

k ist die Komponente des Vektor P – A in Richtung des Normalenvektors. Setzt man k = 0 erhält man den Teil des Vektors, der in der Ebene liegt.

$-2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ Vektor in der Ebene vom Stützvektor zum Fußpunkt des Lotes

Fußpunkt = Stützvektor + projizierter Vektor $F = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Vektor ist parallel zum Normalenvektor und damit Abstandsvektor. $PF = F - P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

gespiegelter Punkt P' $P' = P + 2\,PF = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Spiegelung eines Punktes mit Hilfe von Spiegelungsmatrizen

	Allgemeine Ebene und Gerade	Um A verschobene Objekte in den Ursprung
Spiegelung eines Punktes P an einer Ebene:	$(x - A) \circ n = 0$	$x \circ n = 0$
Zunächst Berechnung der Lotgerade l :	$l: \ x = P + t\,n$	$l: \ x = (P - A) + t\,n$
Fußpunkt ist auch Geradenpunkt (n ist senkrecht zu E)	$(P + t\,n - A) \circ n = 0$ $(P - A) \circ n + t\,n^2 = 0$ $t = -\dfrac{(P-A)\circ n}{n^2}$	$(P - A + t\,n) \circ n = 0$ $(P - A) \circ n + t\,n^2 = 0$ $t = -\dfrac{(P-A)\circ n}{n^2}$

Berechnen des Lotfußpunktes :

$$l: \ F = P - \frac{(P-A)\circ n}{n^2}\,n$$

$$F - P = -\frac{(P-A)\circ n}{n^2}\,n$$

Berechnen des Spiegelpunktes

$$P' = P + 2(F - P)$$

$$= P - 2\,\frac{(P-A)\circ n}{n^2}\,n$$

$$= A + P - A - 2\,\frac{(P-A)\circ n}{n^2}\,n$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (P-A)_1 \\ (P-A)_2 \\ (P-A)_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ((P\text{-}A)_1 n_1)\, n_1 + ((P\text{-}A)_2 n_2)\, n_1 + ((P\text{-}A)_3 n_3)\, n_1 \\ ((P\text{-}A)_1 n_1)\, n_2 + ((P\text{-}A)_2 n_2)\, n_2 + ((P\text{-}A)_3 n_3)\, n_2 \\ ((P\text{-}A)_1 n_1)\, n_3 + ((P\text{-}A)_2 n_2)\, n_3 + ((P\text{-}A)_3 n_3)\, n_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (P-A)_1 \\ (P-A)_2 \\ (P-A)_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (n_1)^2\,(P\text{-}A)_1 + (n_2 n_1)\,(P\text{-}A)_2 + (n_3 n_1)\,(P\text{-}A)_3 \\ (n_1 n_2)\,(P\text{-}A)_1 + (n_2)^2\,(P\text{-}A)_2 + (n_3 n_2)\,(P\text{-}A)_3 \\ (n_1 n_3)\,(P\text{-}A)_1 + (n_2 n_3)\,(P\text{-}A)_2 + (n_3)^2\,(P\text{-}A)_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (P-A)_1 \\ (P-A)_2 \\ (P-A)_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (n_1)^2 & (n_2 n_1) & (n_3 n_1) \\ (n_1 n_2) & (n_2)^2 & (n_3 n_2) \\ (n_1 n_3) & (n_2 n_3) & (n_3)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (P\text{-}A)_1 \\ (P\text{-}A)_2 \\ (P\text{-}A)_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (n_1)^2 & (n_2 n_1) & (n_3 n_1) \\ (n_1 n_2) & (n_2)^2 & (n_3 n_2) \\ (n_1 n_3) & (n_2 n_3) & (n_3)^2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} (P\text{-}A)_1 \\ (P\text{-}A)_2 \\ (P\text{-}A)_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= A + \left(E - 2\,\frac{(n \bullet n^T)}{n^2} \right) (P\text{-}A)}$$

Ist in der Normalform der Ebene kein Stützvektor angegeben, sondern nur der Wert d auf der rechten Seite, dann entsteht diese d aus einem beliebigen Stützvektor und dem Normalenvektor. Damit ergibt sich das d aus dem hier betrachteten Rechenweg aus : $A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3 = d$

Damit vereinfacht sich der Ausdruck

$$\frac{2}{n^2}\,(A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3) \bullet \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \frac{2d}{n^2} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Musterbeispiel

Ebenengleichung: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 20$ $P = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ Normalenvektor : $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $|\, n \,|^2 = 9$

1. Unter Benutzung eines Stützvektors der Ebene $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Linker Teil für die Multiplikation mit dem Stützvektor: $\frac{1}{n^2}\,(n \bullet n^T) = \begin{pmatrix} 4/9 & 2/9 & 4/9 \\ 2/9 & 1/9 & 2/9 \\ 4/9 & 2/9 & 4/9 \end{pmatrix}$

Matrix multiplizieren mit P – A : $2 \bullet \frac{1}{n^2}\,(n \bullet n^T) \bullet (P - A) = 2 \bullet \begin{pmatrix} 4/9 & 2/9 & 4/9 \\ 2/9 & 1/9 & 2/9 \\ 4/9 & 2/9 & 4/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Koordinaten des gespiegelten Punktes : $-\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Unter Benutzung des d aus der Koordinatengleichung d = 20

$$= \frac{2d}{n^2}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} - \frac{2}{n^2}\,(n \bullet n^T)\,P + P = \frac{40}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4/9 & 2/9 & 4/9 \\ 2/9 & 1/9 & 2/9 \\ 4/9 & 2/9 & 4/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8\,8/9 \\ 4\,4/9 \\ 8\,8/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16\,8/9 \\ -\,8\,4/9 \\ -\,16\,8/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Durch Verschieben der Ebene in den Ursprung

Produkt der Normalenvektoren, bei dem beide Vektoren Einheitsvektoren sein müssen.

$$\frac{1}{n^2}\,n\,n^T = \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_1n_2 & n_2^2 & n_2n_3 \\ n_1n_3 & n_2n_3 & n_3^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Sn = E - 2\frac{1}{n^2}\,n\,n^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ebene in den Nullpunkt verschieben heißt um einen Stützvektor die Ebene verschieben: $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

P – A

$\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ diesen Vektor Spiegeln $\begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und zurückschieben $\begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

12.11. Spiegelung einer Geraden an einer parallelen Ebene

Bei einer parallelen Geraden zu einer Ebene haben alle Geradenpunkt von der Ebene den gleichen Abstand und die gespiegelte Gerade hat den gleichen Richtungsvektor. Wenn man einen Geradenpunkte bestimmt und den dazu gehörenden Spiegelpunkt kann man die neue Geradengleichung aufstellen.

Musterbeispiel Die Gerade g ist an der Ebene E zu spiegeln.

Ebenengleichung: $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -45$ $\quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lotgerade vom Aufpunkt der Geraden g auf die Ebene: $l : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt der Lotgeraden mit der Ebene (Lotfußpunkt): $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

Abstandsvektor AF = F – A : $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Spiegelpunkt P' = P + 2 AF $\quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix}$

Geradengleichung: $g' : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

12.12. Spiegelung einer Geraden an einer Ebene die die Gerade schneidet

12.12.1. Spiegelung eines Punktes und Berechnung des Schnittpunktes

Bei einer Geraden die eine Ebene schneidet liegt der Schnittpunkt sowohl auf der Geraden, als auch auf der Spiegelgeraden. Dann muss noch ein Punkt an der Ebene gespiegelt und über die beiden Punkte die neue Geradengleichung erstellt werden.

Musterbeispiel Die Gerade g ist an der Ebene E zu spiegeln.

Ebenengleichung: $2x_1 + 5x_2 - x_3 - 49 = 0$ $\quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt von Gerade und Ebene: $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lotgerade des Aufpunktes auf die Ebene: $l : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt der Lotgeraden mit der Ebene (Lotfußpunkt) : $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$

Abstandsvektor AF = F – A : $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Spiegelpunkt P' = A + 2 AF = $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Geradengleichung: $g' : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$

12.12.2. Richtungsvektor der Geraden als Linearkombination der Richtungsvektoren der Ebene und dem Normalenvektor der Ebene darstellen.

1. Ebene in Parameterform gegeben

Eine mögliche Parametergleichung der unter 8.1 benutzten Ebene: $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Geradengleichung wie unter 8.1.

Normalenvektor der Ebene : $n \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren der Ebene und der Normalenvektor der Ebene sind drei linear unabhängige Vektoren und damit als Basis des R^3 geeignet. Der Richtungsvektor der Geraden soll jetzt in dieser Basis dargestellt werden: Linearkombination des Richtungsvektor der Geradengleichung mit den Richtungsvektoren der Ebene und dem Normalenvektor der Ebene

$$s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

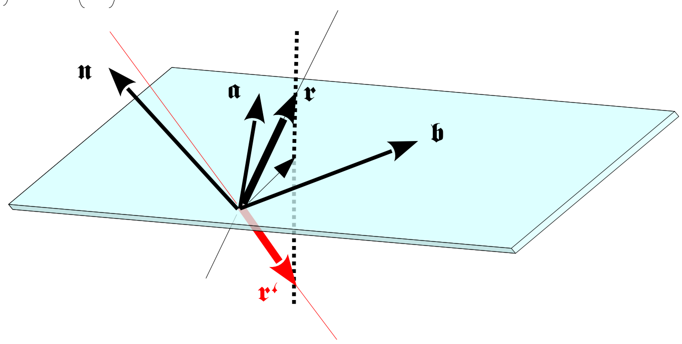
Lösung des Gleichungssystems: $s = 0 \,;\, t = -2/3 \,;\, k = 1/3$

Interpretation des Ergebnisses:

Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ der bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die angegebene Komponentendarstellung hat

hat bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

die Komponentendarstellung $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$



Bezüglich dieser neuen Basis hat der gespiegelte Richtungsvektor die gleichen Komponenten für die beiden Richtungsvektoren der Ebene, aber das entgegengesetzte Vorzeichen für die Komponente des Normalenvektors.

$$s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Neuer Richtungsvektor: $0 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor entspricht dem Richtungsvektor aus 8.1.

Als Stützvektor der Geraden wird der Schnittpunkt der ursprünglichen Geraden mit der Ebene benutzt.

2. Ebene in Koordinatenform gegeben

Es ist allgemein bekannt, wie man von zwei Richtungsvektoren einer Ebene zum Normalenvektor der Ebene kommt. Wenn aber die Ebenengleichung in Koordinatenform gegeben ist, benötigt man zwei Richtungsvektoren, die linear unabhängig sind (nicht parallel) und beide senkrecht zum Normalenvektor stehen. Der übliche Rechenweg ist sehr aufwendig über die Bestimmung von 3 Punkten und die daraus erstellte Parametergleichung. Das geht auch mit weniger Aufwand. Dazu soll wieder die obige Ebene in Koordinatenform benutzt werden und die gleiche Gerade.

Ebenengleichung: $2x_1 + 5x_2 - x_3 - 49 = 0$ $\quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(aus der Aufgabenstellung 12.12.1. vorhergehende Seite)

Der Normalenvektor der Ebene : $n \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gesucht sind zwei Vektoren, die senkrecht zu diesem Vektor sind und nicht parallel. Dazu setzt man eine Komponente Null, vertauscht die beiden anderen Komponenten und wechselt bei einer Komponente das Vorzeichen.

1. Richtungsvektor : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2. Richtungsvektor : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Diese beiden Vektoren sind nicht parallel und senkrecht zum Vektor n.

Bleibt noch die Aufgabe einen Punkt zu bestimmen: $2x_1 + 5x_2 - x_3 - 45 = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ erfüllt die Ebenengleichung.

Damit ergibt sich folgende Parameterdarstellung der Ebene $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Die Darstellung des Richtungsvektors der Geraden in der Basis der Richtungsvektoren und des Normalenvektors

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad s = 4/3 \;\; ; t = -2/3 \;\; ; \; k = 1/3$$

Der gespiegelte Richtungsvektor mit umgekehrtem Vorzeichen von k:

$$4/3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 2/3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - 1/3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -7/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Da es sich um einen Richtungsvektor handelt, kann seine Länge verändert werden. Multiplikation mit 3 erzeugt folgenden Vektor: $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor der gespiegelten Geraden.

12.12.3. Spiegelung eines Richtungsvektors an einer Ebene mit Spiegelungsmatrizen

Spiegelung eines Vektors v an einer Ursprungsebene: Ursprungsebene $x \circ n = 0$

Zunächst Berechnung des Fußpunktes über das Lot l : $F = v + t\,n$

Fußpunkt ist auch Ebenenpunkt

$$(v + t\,n) \circ n = 0$$

$$v \circ n + t\,n \circ n = 0$$

$$t = -\frac{v \circ n}{n^2}$$

t in Geradengleichung einsetzen :

$$F = v - \frac{v \circ n}{n^2}\,n$$

Berechnen des gespiegelten Vektors

$$v' = v + 2\,(F - v)$$

$$v' = v + 2\left(v - \frac{v \circ n}{n^2}\,n - v\right)$$

$$v' = v - 2\,\frac{v \circ n}{n^2}\,n$$

$$\boxed{v' = \left(E - \frac{2}{n^2}\,(n \bullet n^T)\right) v}$$

Musterbeispiel

(aus der Aufgabenstellung 12.12.1.)

zu spiegelnde Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ebene, an der gespiegelt wird

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 = 49$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad n = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad d = 49 \qquad n^2 = 30$$

$$P' = -\frac{2}{n^2}(n \cdot n^T)(P - A) + P \qquad v' = -\frac{2}{n^2}(n \cdot n^T)\, v + v$$

$$\frac{1}{n^2}(n \cdot n^T) = \begin{pmatrix} 2/15 & 1/3 & -1/15 \\ 1/3 & 5/6 & -1/6 \\ -1/15 & -1/6 & 1/30 \end{pmatrix}$$

$$P' = -2 \begin{pmatrix} 2/15 & 1/3 & -1/15 \\ 1/3 & 5/6 & -1/6 \\ -1/15 & -1/6 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad v' = -2 \begin{pmatrix} 2/15 & 1/3 & -1/15 \\ 1/3 & 5/6 & -1/6 \\ -1/15 & -1/6 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P' = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad v' = \begin{pmatrix} -1\,1/3 \\ -3\,1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2\,1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Spiegelpunkt P'

multipliziert mit 3 : $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$

Geradengleichung: $g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$

Untersuchung der Spiegelungsmatrix

$$A_S = \begin{pmatrix} 2/15 & 1/3 & -1/15 \\ 1/3 & 5/6 & -1/6 \\ -1/15 & -1/6 & 1/30 \end{pmatrix}$$

Eine Spiegelungsmatrix ist immer eine *symmetrische Matrix* .
Für solche Matrizen gilt die Beziehung : $A^T = A$

Vertauscht man Zeilen und Spalten, bzw. spiegelt die Matrix an der Hauptdiagonalen, entsteht die gleiche Matrix.

$$\begin{pmatrix} 2/15 & 1/3 & -1/15 \\ 1/3 & 5/6 & -1/6 \\ -1/15 & -1/6 & 1/30 \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale der Matrix

wenn man aus der Matrix den Faktor 1/n² ausklammert, dann ergibt sich folgendes Matrix:

$$\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 4 & 10 & -2 \\ 10 & 25 & -5 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante dieser Matrix ist 0. Damit ist ein Gleichungssystem mit dieser Matrix nicht eindeutig lösbar, sondern hätte eine Parameterlösung.

Es soll zunächst das *homogene Gleichungssystem* betrachtet werden, bei dem die rechte Seite 0 ist.

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & -2 \\ 10 & 25 & -5 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Gaußsche Algorithmus liefert folgendes Ergebnis: $\begin{pmatrix} 1 & 2{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ liefert zwei Nullzeilen, was dazu führt, dass man zwei Variable beliebig wählen kann.

$v_2 = t$; $v_3 = s$ führt zu $v_1 = -2{,}5\,t + 0{,}5\,s$, oder in Vektorschreibweise: $t\begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Geometrisch handelt es sich bei der Lösungsmenge um eine Ebene, die durch den Ursprung geht, da sie keinen Stützvektor besitzt. Um die Ebene genauer zu beschreiben, wandelt man die Parametergleichung in eine Normalengleichung:

Normalenvektor n: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ Dieser Vektor ist senkrecht zu beiden Richtungsvektoren.

Zur Vermeidung von Dezimalzahlen multipliziert man ihn mit 2 : $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Was zu folgender Ebenengleichung führt : $2x_1 + 5x_1 - x_3 = 0$

Die Ebene, an der gespiegelt wurde lautet : $2x_1 + 5x_2 - x_3 = 49$

Die Lösung des Gleichungssystems beschreibt die Spiegelungsebene, aber in den Ursprung verschoben.

Die Ebene und die Gerade besitzen einen Schnittpunkt. $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $2x_1 + 5x_2 - x_3 = 49$

12.12.4. Spezialfall Spiegelung einer Geraden an einer Koordinatenebene

Die Aufgabenstellung wurde bereits in 12.4 mit den elementaren Methoden der Vektorrechnung behandelt. Hier soll das Thema noch einmal aufgegriffen werden unter Benutzung der Spiegelungsmatrizen. Die Formeln für die Spieglung eines Punktes und eines Richtungsvektors an einer Ebene sind die folgenden:

$$\boxed{P' = A + \left(E - 2\frac{(n \bullet n^T)}{n^2}\right)(P-A)} \qquad \boxed{v' = \left(E - \frac{2}{n^2}(n \bullet n^T)\right) v}$$

Für eine Spiegelung an der $x_1 - x_2$ – Koordinatenebene ist $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

und damit $n \bullet n^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $2 \bullet n \bullet n^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $E - 2 \bullet n \bullet n^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Musterbeispiel

(aus Kapitel 12.4)

Geradengleichung: $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

12.12.5. Spezialfall Spiegelung einer Geraden an einer Koordinatenachse

Die Aufgabenstellung wurde bereits in 12.5 mit den elementaren Methoden der Vektorrechnung behandelt. Hier soll das Thema noch einmal aufgegriffen werden unter Benutzung der Spiegelungsmatrizen. Die Formeln für die Spieglung eines Punktes und eines Richtungsvektors an einer Geraden sind die folgenden:

$$\boxed{P' = A + \left(\frac{2}{r^2}(r \bullet r^T) - E\right)(P - A)} \qquad \boxed{v' = \left(\frac{2}{r^2}(r \bullet r^T) - E\right) v}$$

Für eine Spiegelung an der x_3 – Koordinatenachse ist $r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

und damit $r \bullet r^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $2 \bullet r \bullet r^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $2 \bullet r \bullet r^T - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Musterbeispiel

(aus Kapitel 12.5)

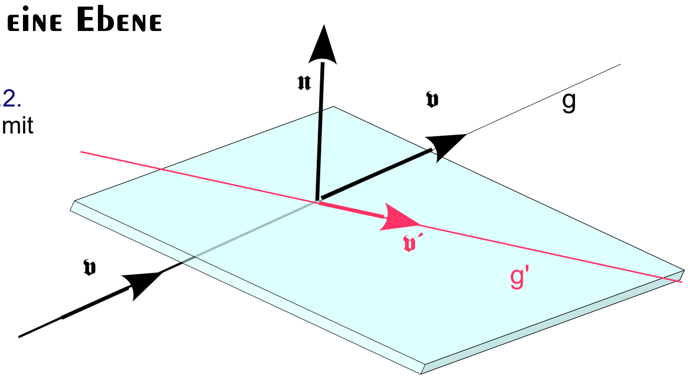
Geradengleichung: $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Spiegeln an der x_3 – Achse .

$$P' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad v' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g_1' : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

12.13. Projektion einer Geraden auf eine Ebene

Die gleiche Aufgabestellung wurde bereits in Kapitel 8.2. behandelt. Hier soll die Aufgabenstellung noch einmal mit den Spiegelungsmatrizen behandelt werden.



	Projektion des Stützvektors	Projektion des Richtungsvektors
Projektion einer Geraden auf eine Ebene:		
Ebenengleichung mit Stützvektor und Ursprung :	$(x - A) \circ n = 0$	$x \circ n = 0$
Projektion eines Punktes/Richtung auf eine Ebene:	P	v
Zunächst Berechnung der Lotgerade l :	$l:\ x = P + t\,n$	$l:\ x = v + t\,n$
Fußpunkt ist auch Geradenpunkt (n ist senkrecht zu E)	$(P + t\,n - A) \circ n = 0$ $(P - A) \circ n + t\,n^2 = 0$ $t = -\frac{(P-A)\circ n}{n^2}$	$(v + t\,n) \circ n = 0$ $v \circ n + t\,n^2 = 0$ $t = -\frac{v \circ n}{n^2}$
Berechnen des Lotfußpunktes :	$l:\ F = P - \frac{(P-A)\circ n}{n^2}\ n$	$l:\ v' = v - \frac{v \circ n}{n^2}\ n$

$$F = + \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{n^2}\ (n \bullet n^T) \begin{pmatrix} P_1 - A_1 \\ P_2 - A_2 \\ P_3 - A_3 \end{pmatrix}$$

$$= A + P - A - \frac{1}{n^2}\ (n \bullet n^T)\,(P - A)$$

$$F = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1 - A_1 \\ P_2 - A_2 \\ P_3 - A_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{n^2}\ (n \bullet n^T) \begin{pmatrix} P_1 - A_1 \\ P_2 - A_2 \\ P_3 - A_3 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \left(E - \frac{1}{n^2}\ (n \bullet n^T) \right) \begin{pmatrix} P_1 - A_1 \\ P_2 - A_2 \\ P_3 - A_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} F = P - \frac{1}{n^2}\ (n \bullet n^T)\,(P - A) \\ F = A + \left(E - \frac{1}{n^2}\ (n \bullet n^T) \right) (P - A) \end{array}}$$

$$= -\,1/n^2\,(v \circ n) \bullet n + v$$

$$= -\frac{1}{n^2}\,(n \bullet n^T) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + v$$

$$= v - \frac{1}{n^2}\ (n \bullet n^T)\ v$$

$$\boxed{v' = \left(E - \frac{1}{n^2}\,(n \bullet n^T) \right) v}$$

Außerdem ist F – P der Abstandsvektor des Punktes P zur Ebene und dessen Betrag der Abstand des Punktes zu Ebene :

$$F - P = -\frac{1}{n^2}\ (n \bullet n^T)\,(P - A)$$

Musterbeispiel

In Kapitel 8.2. wurde folgendes Beispiel behandelt mit einer projizierten Geradengleichung g' : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ -23 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 30 \\ 7 \\ 41 \end{pmatrix}$

zu projizierende Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -24 \\ 26 \\ -19 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 18 \\ 35 \\ 45 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -24 \\ 26 \\ -19 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 18 \\ 35 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Ebene, in die projiziert wird

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad n = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = -\frac{1}{n^2}\,(n \bullet n^T)\,(P - A) + P$$

$$v' = -\frac{1}{n^2}\,(n \bullet n^T)\; v + v$$

$$\frac{1}{n^2}\,(n \bullet n^T) = \begin{pmatrix} 9/59 & -21/59 & -3/59 \\ -21/59 & 49/59 & 7/59 \\ -3/59 & 7/59 & 1/59 \end{pmatrix}$$

$$P' = -\begin{pmatrix} 9/59 & -21/59 & -3/59 \\ -21/59 & 49/59 & 7/59 \\ -3/59 & 7/59 & 1/59 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -25 \\ 26 \\ -21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ 26 \\ -19 \end{pmatrix}$$

$$v' = -\begin{pmatrix} 9/59 & -21/59 & -3/59 \\ -21/59 & 49/59 & 7/59 \\ -3/59 & 7/59 & 1/59 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 35 \\ 45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 35 \\ 45 \end{pmatrix}$$

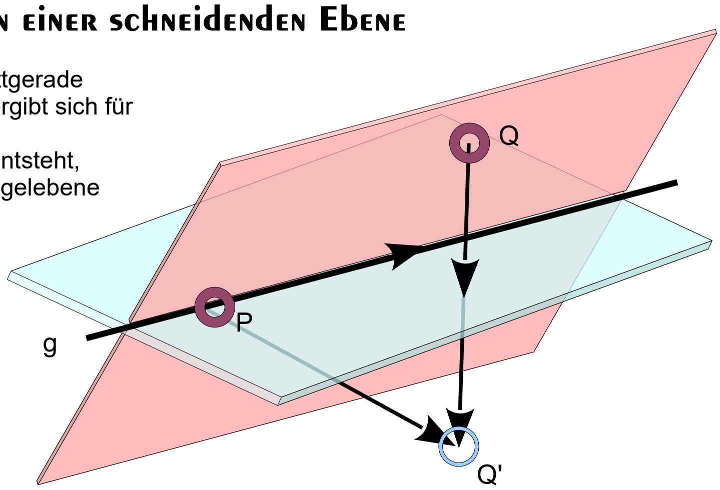
$$P' = \begin{pmatrix} 12 \\ -28 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ 26 \\ -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ -23 \end{pmatrix}$$

$$v' = \begin{pmatrix} 12 \\ -28 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 35 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 7 \\ 41 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ -23 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 30 \\ 7 \\ 41 \end{pmatrix}$$

12.14. Spiegelung einer Ebene an einer schneidenden Ebene

Bei Ebenen die sich schneiden muss die Schnittgerade auch in der gespiegelten Ebene liegen. Damit ergibt sich für die gespiegelte Ebene ein Aufpunkt und ein Richtungsvektor. Der zweite Richtungsvektor entsteht, wenn man einen Punkt der Ebenen an der Spiegelebene spiegelt und einen Richtungsvektor zwischen dem Aufpunkt der Schnittgeraden und des gespiegelten Punktes erzeugt.



Musterbeispiel

Die Ebene E ist an der Ebene H zu spiegeln.

Ebenengleichung E: $7x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0$ Ebenengleichung H: $2x_1 - x_2 - x_3 - 1 = 0$

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ist das Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren. da der Richtungsvektor in beiden Ebenen liegt, muss das Skalarprodukt zu beiden Normalenvektoren 0 sein. Damit ist noch ein Punkt zu finden, der auf beiden Ebenen liegt und damit auch auf der Schnittgeraden.

$$7x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \quad | (-3)$$

$$7x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0$$
$$-6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -3$$

$$7x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 = -3$$

für $x_2 = 1$ und $x_1 = -1$ ist die zweite Gleichung lösbar.
für die erste Gleichung ergibt sich: $-7 - 5 - 3x_3 = 0$
mit der Lösung $x_3 = -4$

daraus ergibt sich ein Aufpunkt (–1/ 1/ 4) und mittels Richtungsvektor folgende Geradengleichung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Als nächstes ist ein Punkt auf E gesucht, der dann an H gespiegelt wird. Dieser Punkt darf nicht auch noch auf g liegen, bzw. darf er kein Punkt von H sein, was das gleiche bedeutet. Für diesen Punkt gibt es zunächst jede Freiheit, er muss nur die Ebenengleichung von E erfüllen. Welcher Spiegelpunkt danach herauskommt, kann man hier noch nicht erkennen, so dass bei einem ungünstig gewählten Punkt durchaus ein unhandlicher Spiegelpunkt herauskommen kann. Am einfachsten lässt sich ein Punkt bestimmen, bei dem eine oder zwei Koordinaten gleich 0 sind. Hier soll der Punkt P_2(0/ 3/ –5) gewählt werden, obwohl in dem speziellen Fall auch der Ursprung (0/0/0) möglich wäre.

Dieser Punkt ist an der Ebene H zu spiegeln.
Orthogonale Gerade zu H, die durch den Punkt P_2 geht:

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimme den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene H:

$$2(2r) - (3 - r) - (-5 - r) = 1$$
$$4r - 3 + r + 5 + r = 1$$
$$6r + 2 = 1$$
$$r = -1/6$$

Dieser Wert für r liefert den Durchstoßpunkt D : $\begin{pmatrix} -1/3 \\ 19/6 \\ -29/6 \end{pmatrix}$

Als Abstandvektor ergibt sich: D – P2 = $\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$

Diesen Vektor zweimal zu P_2 addiert liefert den gespiegelten Punkt P_2' : $\begin{pmatrix} -2/3 \\ 10/3 \\ -14/3 \end{pmatrix}$

Aus dem Aufpunkt der Schnittgerade $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und dem hier berechneten zweiten Punkt P2'

ergibt sich der zweite Richtungsvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2/3 \\ 10/3 \\ -14/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -7/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren können in ihrer Länge verändert werden, so dass als Richtungsvektor der Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ möglich ist. Damit entsteht endgültig als gespiegelte Ebene:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Spiegelung einer Ebene an einer anderen mit Hilfe von Spiegelungsmatrizen

Um eine Ebene an einer anderen Ebene zu spiegeln kann man folgende Überlegung umsetzen: Eine Ebene kann man sich als ein Gebilde aus zwei Geraden vorstellen. Damit muss man aus der Ebene einen Punkt spiegeln und zwei Richtungsvektoren. Dann kann man die Ebene wieder als Ebene in Parameterform zusammensetzen.

Ebenengleichung E: $7x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0$ Ebenengleichung H: $2x_1 - x_2 - x_3 - 1 = 0$

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist eine mögliche Parameterdarstellung der Ebene

Das ist der im obigen Abschnitt bereits berechnete Spiegelpunkt P_2‘ von $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -2/3 \\ 10/3 \\ -14/3 \end{pmatrix}$

Spiegelung des 1. Richtungsvektors : $\begin{pmatrix} 3\ 2/3 \\ -1/3 \\ 6\ 2/3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 20 \end{pmatrix}$ Für s = 1 ; t = 6 ergibt sich aus den oberen beiden Richtungsvektoren der gespiegelten Ebene dieser Richtungsvektor. Damit ist es die gleiche Ebene.

Spiegelung des 2. Richtungsvektors : $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ Dieser Vektor ist mit dem obigen identisch.

12.15. Zusammenfassung von Spiegelungs- und Projektionsmatrizen

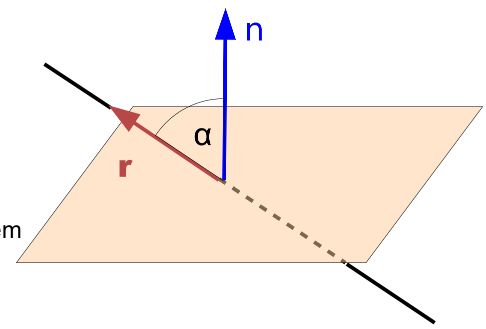
	Gerade	Ebene
Spiegelung eines Punktes an	$P' = A + \left(\frac{2}{r^2}(r \bullet r^T) - E\right)(P - A)$ $P' = P + 2\left(\frac{1}{r^2}(r \bullet r^T) - E\right)(P - A)$ Kapitel 12.3.3.	$P' = A + \left(E - 2\frac{(n \bullet n^T)}{n^2}\right)(P\text{-}A)$ $P' = P - 2\frac{(n \bullet n^T)}{n^2}(P\text{-}A)$ Kapitel 12.10 Lösung 4
einer Richtung an	$v' = \left(\frac{2}{r^2}(r \bullet r^T) - E\right) v$ Kapitel 12.8	Gespiegelter Richtungsvektor an einer Ebene $v' = \left(E - \frac{2}{n^2}(n \bullet n^T)\right) v$ Kapitel 12.12.3
Lotfußpunkt	$F = A + \frac{1}{r^2}(r \bullet r^T)(P - A)$ $F = P + \left(\frac{1}{r^2}(r \bullet r^T) - E\right)(P - A)$ Kapitel 12.9.	$F = A + \left(E - \frac{1}{n^2}(n \bullet n^T)\right)(P - A)$ $F = P - \frac{1}{n^2}(n \bullet n^T)(P - A)$ Kapitel 12.13
		Projizierter Richtungsvektor in die Ebene $v' = \left(E - \frac{1}{n^2}(n \bullet n^T)\right) v$ Kapitel 12.13
Abstand F – P :	$F - P = \left(\frac{1}{r^2}(r \bullet r^T) - E\right)(P - A)$ Kapitel 12.9	$F - P = \frac{1}{n^2}(n \bullet n^T)(P - A)$ Kapitel 12.13

13. Schattenberechnung

13.1. Vektorielle Grundlagen

13.1.1. Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Ausgangspunkt dieser Untersuchungen sind fundierte Kenntnisse zur Geometrie des Skalarproduktes. In der Hauptsache sind Skalarprodukte zwischen den Normalenvektoren von Ebenen und Richtungsvektoren von Geraden zu bestimmen. Hierzu sollen die Winkel zwischen den Vektoren betrachtet werden.



$$\cos \alpha = \frac{n \circ r}{|n| \; |r|}$$

Über diese Formel wird der Winkel zwischen dem Normalenvektor und dem Richtungsvektor berechnet. Aus dem Funktionsbild des cos ist bekannt, wenn dieser Wert > 0 ist, dann liegt der Winkel zwischen 0 und 90^0, wenn der Wert < 0 ist, liegt der Winkel zwischen 90 und 180^0 . Bei diesen Betrachtungen darf nicht mit dem Betrag gerechnet werden, weil dann diese Zusammenhänge verloren gehen.

13.1.2. Die Orientierung des Normalenvektors

In dem rechts angegebenen Beispiel ist der Winkel kleiner als 90^0 und damit das Skalarprodukt positiv. Das heißt aber auch, dass der Normalenvektor und der Richtungsvektor der Geraden auf die gleiche Seite der Ebene zeigen. Auf diese Art und Weise kann man den Normalenvektor ausrichten. Der Normalenvektor einer Ebene ist nicht eindeutig. Nur die Richtung ist eindeutig, die **Länge ist nicht eindeutig** und **die Orientierung ist nicht eindeutig**. Zeigt der Normalenvektor auf die andere Seite der Ebene, ist er anders orientiert, die Richtung ist nach wie vor die gleiche, das Skalarprodukt hat den gleichen Wert, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, der Schnittwinkel ist dann 180^0 – dem Winkel der bei dem positiven Wert sich ergibt.
Geht man davon aus, dass die Richtung der Geraden die Richtung der Lichtstrahlen ist, kann man die Ebene so orientieren, dass der Normalenvektor in den gleichen Halbraum der Ebene zeigt, wie der Richtungsvektor der Geraden oder er zeigt in den entgegengesetzten Halbraum. Um den Normalenvektor eine andere Orientierung zu geben müssen nur vor allen Komponenten die Vorzeichen geändert werden.
(Jede Ebene teilt den dreidimensionalen Raum in zwei Teile. Diese beiden Teile werden Halbräume bezeichnet.)

Jetzt bleibt die Frage, in welche Richtung zeigt der Normalenvektor, den man berechnet hat. Dazu gibt es nur eine Aussage über den Koordinatenursprung. Die allgemeine Form einer Koordinatengleichung lautet:

$$ax + by + cz = d$$

wobei die Werte a,b, c die Komponenten des Normalenvektors sind und x,y,z die Koordinaten eines Ebenenpunktes. Aussagen über die Orientierung gibt der Wert d.
Ist d eine positive Zahl zeigt der Normalenvektor in den Halbraum, in dem der Koordinatenursprung **nicht** ist.
Ist d eine negative Zahl zeigt der Normalenvektor in den Halbraum, in dem der Koordinatenursprung ist.

Der Wert von d ist ein Maß für den Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung. Dividiert man d durch den Betrag des Normalenvektors, erhält man den tatsächlichen Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung.

Für Aufgaben im Zusammenhang mit Schattenberechnungen sind deshalb Skizzen sehr nützlich um zu bestimmen, welche Richtung des Normalenvektors man benötigt.

Bei Schattenberechnungen ergibt sich auch die Frage, welche Ecken und Kanten erzeugen den Schatten und welche Ecken und Kanten werfen ihren Schatten „in den Körper“ und sind deshalb außen nicht als Schatten wahrzunehmen.

Wie verläuft der Schatten, wenn er wieder auf eine schräge Ebene fällt.

16.1.3. Die Parallelprojektion

Parallelprojektion entsteht durch parallele Lichtstrahlen. Physikalisch wird dieser Vorgang durch Benutzung von Sonnenstrahlen erreicht. Für die Vektorrechnung wird ein Vektor benutzt, der die Richtung des Lichts darstellt. Die Schatten erzeugenden Geraden haben dann alle diesen gleichen Richtungsvektor und die Aufpunkte werden durch diejenigen Punkte am Körper bestimmt, von denen der Schatten berechnet werden soll.

Diese Geraden bilden dann einen Schnittpunkt mit der Ebene, auf der der Schatten entstehen soll. Diese Ebene muss nicht notwendig eine Koordinatenebene sein, auf alle Fälle ist dieser Schnittpunkt der auf die Ebene projizierte Schattenpunkt.

Hier soll das Problem zunächst allgemein angegangen werden. Es handelt sich um den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene. Der Einfachheit halber soll die Ebene in Koordinatenform vorliegen, sonst muss sie in diese Koordinatenform überführt werden.

Ebenengleichung in Normalform: $\vec{x} \circ \vec{n} = d$

Geradengleichung in Parameterform: $\vec{x} = \vec{P} + t\,\vec{r}$

Der Punkt $\vec{P}$ ist der Punkt, von dem der Schatten erzeugt werden soll.

$(\vec{P} + t\,\vec{r}) \circ \vec{n} = d$

Den Schnittpunkt erhält man durch Einsetzen der Geradengleichung in die Ebenengleichung an Stelle des Vektors $\vec{x}$:

$\vec{P} \circ \vec{n} + t\,\vec{r} \circ \vec{n} = d$

Ausmultiplizieren der Klammer

$$\boxed{t = \frac{d - \vec{P} \circ \vec{n}}{\vec{r} \circ \vec{n}}}$$

Da Skalarprodukte reelle Zahlen sind, kann man auch durch diese Werte dividieren und damit kann man die Gleichung nach der Variablen t auflösen.

$$\boxed{\vec{P'} = \vec{P} + \frac{d - \vec{P} \circ \vec{n}}{\vec{r} \circ \vec{n}}\,\vec{r}}$$

Dieser Parameterwert t ist genau der Parameterwert, der zum Schattenpunkt P' auf der Geraden führt.

13.1.4. Die Zentralprojektion

Zentralprojektion entsteht durch Lichtstrahlen aus einer punktförmigen Lichtquelle. Physikalisch wird dieser Vorgang durch Benutzung einer Lampe erreicht. Für die Vektorrechnung ist die Position dieser Lampe der eine Punkt L, der auf der Geraden liegt, die zum Schattenpunkt führt. Der andere Punkt P ist der Punkt, dessen Schatten erzeugt werden soll. Damit sind die Richtungsvektoren für alle Punkte verschieden, aber sie werden für alle Punkte aus P – L berechnet. Als Aufpunkt dieser Geraden kann sowohl der Punkt der Lichtquelle als auch der Punkt, dessen Schatten erzeugt werden soll, benutzt werden.

Der Schattenpunkt ist wieder der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene, auf die der Schatten geworfen wird.

Die Formel der Berechnung ist die gleiche, wie bei der Parallelprojektion mit dem Unterschied, dass der Richtungsvektor r für jede Gerade einzeln aus P – L zu berechnen ist.

13.2. Die Schattenberechnung

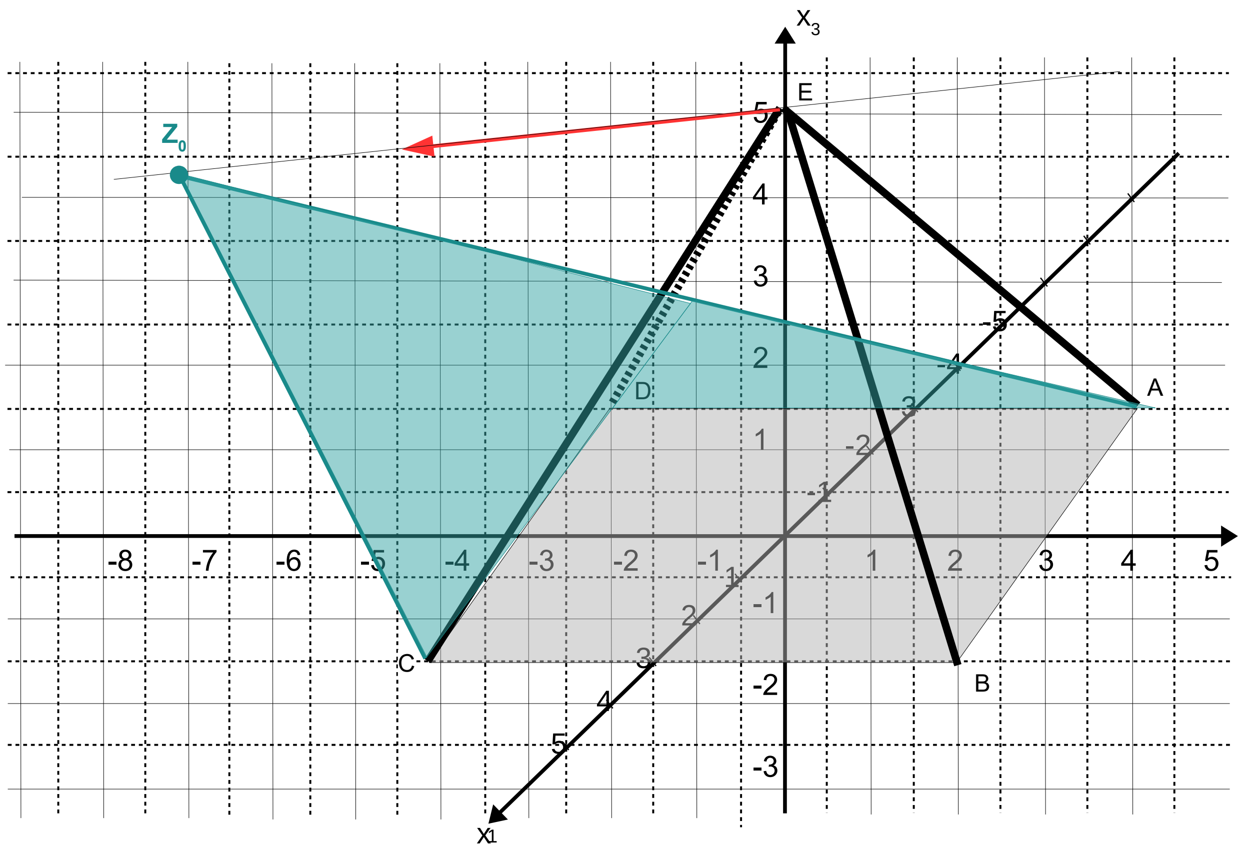
13.2.1. Schatten in der $x_1 - x_2$ Ebene

Zunächst soll das Modell einer einzelnen Pyramide betrachtet werden. Die Ecken der Pyramide haben folgende Werte:
A (–3 | 3 | 0) , B (3 | 3 | 0) , C (3 | –3 | 0) , D (–3 | –3 | 0) , E (0 | 0 | 5)

Die Sonnenstrahlen treffen in Richtung des Vektors $v = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$ auf die Pyramide auf.

Berechne den Schattenpunkt Z_0 der Spitze E und zeichne den Schatten so ein, wie er auf der x_1–x_2–Ebene aussehen würde.

Sonnenstrahlen sind paralleles Licht, so dass der angegebene Vektor der Richtungsvektor aller Lichtstrahlen ist. Für die Geradengleichung sind jeweils unterschiedliche Aufpunkte zu verwenden.



Für den Schattenpunkt des Punktes E ist damit folgende Geradengleichung zu benutzen: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$

Der Schattenpunkt der Pyramidenspitze ist dort, wo diese Gerade die $x_1 - x_2$ Ebene schneidet, also dort, wo $x_3 = 0$ ist. Das liefert die Bedingung zur Berechnung des Schattenpunktes:

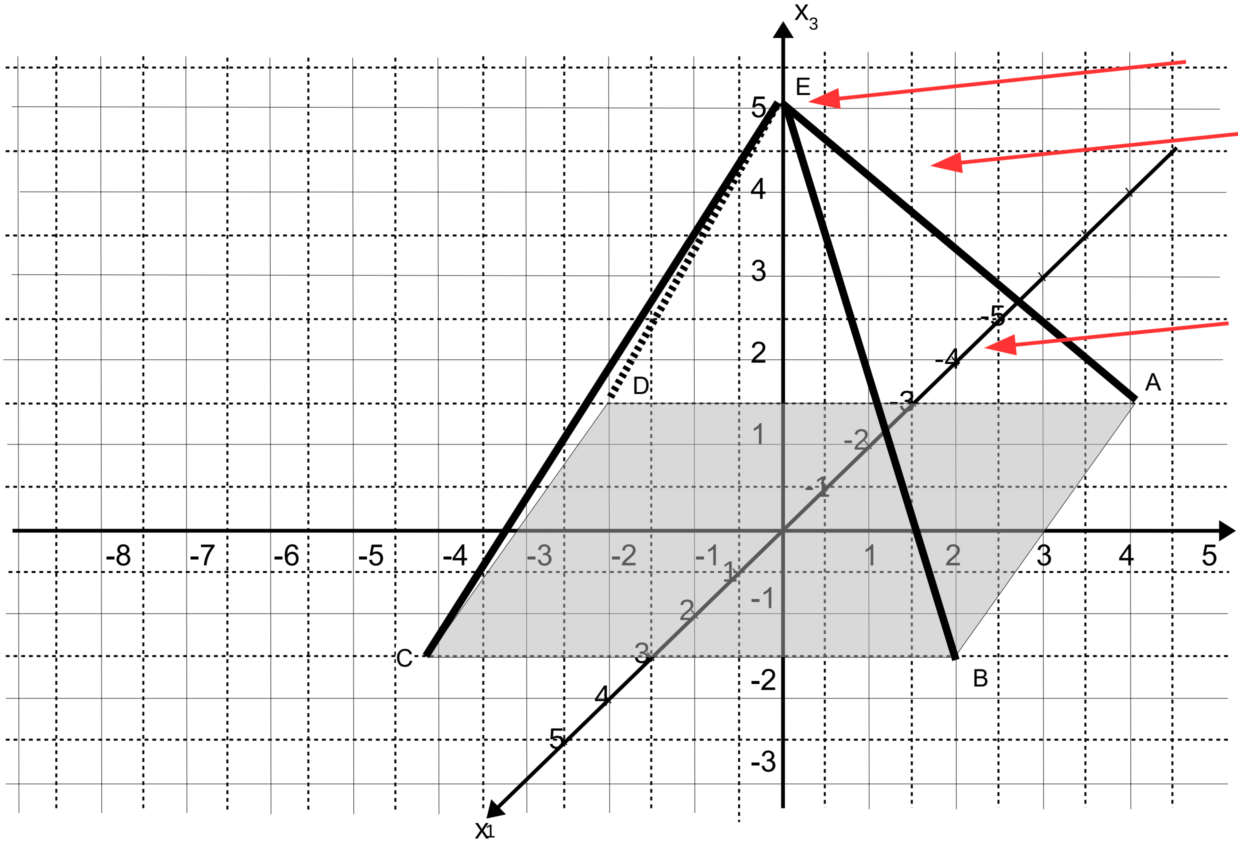
$$x_3 = 0 : \quad 5 - 7t = 0$$

Für $t = \frac{5}{7}$ wird der Durchstoßpunkt durch die x_1–x_2 Ebene erreicht. $Z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{5}{7} \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60/7 \\ -80/7 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -8,6 \\ -11,4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bei der Berechnung des Schattens von Pyramiden ist es ziemlich gleichgültig zu wissen, aus welcher Richtung das Licht kommt. Der Schatten wird durch den Schattenpunkt der Pyramidenspitze und zwei Eckpunkten der Pyramide gebildet.

<u>Frage: Welche Eckpunkte bilden die Ecken des Schattens</u>

13.2.2. Beleuchtete Flächen – die liefern Schatten



Auf Grund der eingezeichneten Richtungspfeile treffen die Strahlen auf alle Fälle auf die Seite ABE. Damit liegt die Seite CDE im Schatten, sie wird von keinen Strahlen erreicht.

Zu klären ist die Frage, treffen sie auf die Seite ADE oder auf die Seite CBE.
Dazu wird von beiden Seiten die Koordinatengleichung bestimmt, da der Normalenvektor benötigt wird.
Um den mühsamen Rechenweg über die Parametergleichung zu ersparen, wird aus den drei Punkten direkt die Koordinatengleichung über ein Gleichungssystem bestimmt. Für die Rechnung selbst wird der GTR zu Hilfe genommen.

A (–3 | 3 | 0) , D (–3 | –3 | 0) , E (0 | 0 | 5)

$ax + by + cz = d$

$$\begin{aligned} -3a + 3b \quad &= d \\ -3a - 3b \quad &= d \\ 5c &= d \end{aligned}$$

Die Ebene geht nicht durch den Ursprung, deshalb ist d ein von 0 verschiedener Wert. Für d kann ein beliebiger Wert vorgegeben werden. Auf Grund der 3. Zeile soll d = 5 gewählt werden. Rechnung zeigt, dass d=15 besser ist

Ebenengleichung:
$-5x + 3z = 15$ $\quad n_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

B (3 | 3 | 0) , C (3 | –3 | 0) , E (0 | 0 | 5)

$ax + by + cz = d$

$$\begin{aligned} 3a + 3b \quad &= d \\ 3a - 3b \quad &= d \\ 5c &= d \end{aligned}$$

Wird gleich mit d = 15 versucht

Ebenengleichung:
$5x + 3z = 15$ $\quad n_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Der Wert für d ist in beiden Ebenengleichungen positiv, also zeigen beide Normalenvektoren vom Ursprung weg, dh. in diesem Fall beide Normalenvektoren zeigen nach außen von der Pyramide.

Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren mit dem Richtungsvektor der Sonnenstrahlen v : $\begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$

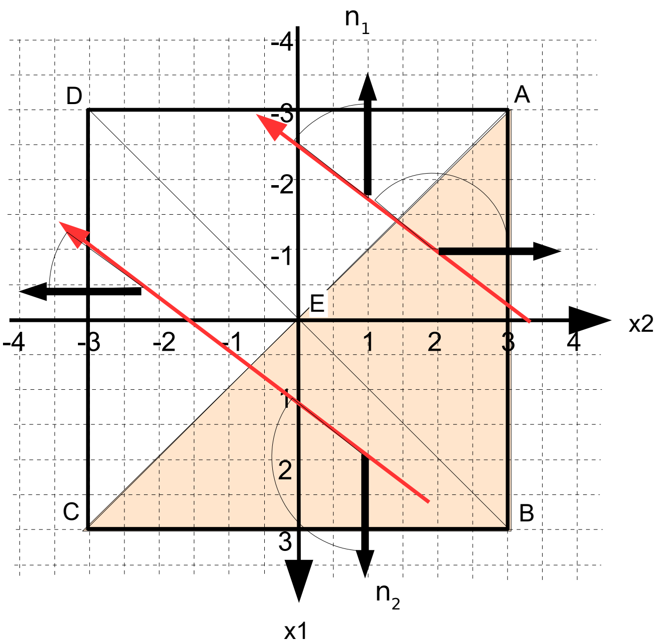
$n_1 \circ v = 60 - 21 = 39$

Skalarprodukt positiv

$n_2 \circ v = -60 - 21 = -81$

Skalarprodukt negativ

Im rechts dargestellten Bild sieht man die Draufsicht der Pyramide. Die roten Vektoren sind die Richtung aus der die Sonnenstrahlen kommen.
Die orange gekennzeichnete Fläche ist die Fläche, auf die das Licht scheint.
Die dicken schwarzen Pfeile sind die nach außen gerichteten Normalenvektoren der vier Ebenen, die die Mantelfläche der Pyramide bilden.
Dabei fällt folgendes auf:



Die Ebenen, auf die das Sonnenlicht fällt haben Normalenvektoren, die mit der Richtung des Lichtvektors einen stumpfen Winkel bilden, damit ein negatives Skalarprodukt erzeugen.

Die Ebenen, auf die das Sonnenlicht **nicht** fällt haben Normalenvektoren, die mit der Richtung des Lichtvektors einen spitzen Winkel bilden, damit ein positives Skalarprodukt erzeugen.

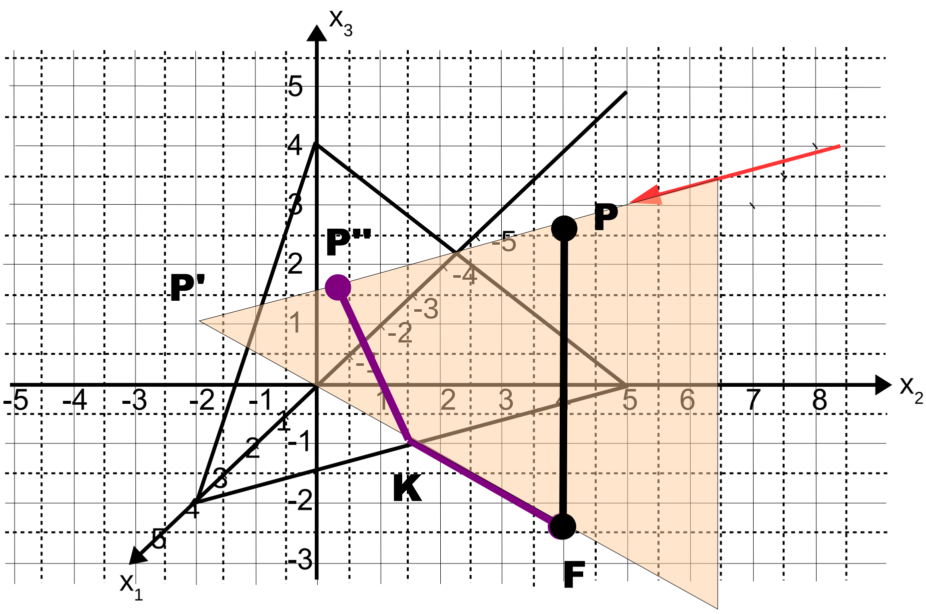
Dieses Kriterium kann man benutzen, wenn man feststellen will, welche Seite von dem Licht beschienen wird.

Das Licht fällt auf die Pyramidenseite ABE und damit erzeugen die Kanten AE und CE die Schattenlinien.

13.2.3. Schatten auf eine beliebige Ebene

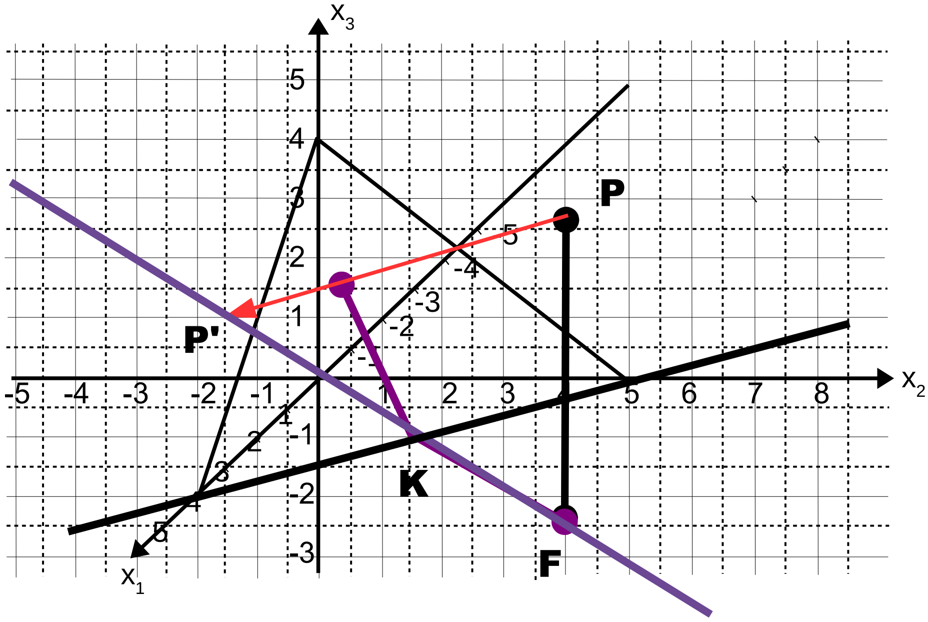
Die Berechnung des Schattenpunktes erfolgt genau so, wie in den letzten beiden Kapitel besprochen.

Das Problem bei dieser Konstellation ist der Knickpunkt K, bei dem der Schatten von der $x_1 - x_2$ Ebene auf die entfernte Ebene wechselt. Für diesen Knickpunkt gibt es zunächst keinen bekannten Punkt auf dem Originalobjekt, der diesen Knickpunkt zuzuordnen ist.



Das Original, von dem der Schatten gebildet wird, liegt auf einer Geraden FP. Es wir nicht nur von einem Punkt der Schatten gebildet, sondern von einer ganzen Kante. Die Schattenlinie der Originalkante liegt mit dem Richtungsvektor des Lichtstrahls in einer Ebene, gleichgültig, wo der Schatten auftrifft. Damit kann man den Knickpunkt der Schattenlinie als Schnittpunkt der Ebene der Schattenlinie mit der Spurgeraden in der $x_1 - x_2$ Ebene bestimmen, oder als Schnittpunkt der Geraden vom Fußpunkt der Schattenkante F zum Schattenpunkt der Spitze P' in der $x_1 - x_2$ Ebene mit der Spurgeraden der Ebene, auf die der Schatten fällt. Der Vorteil besteht darin, dass das zwei Geraden in der $x_1 - x_2$ Ebene sind, deren Vektoren nur aus zwei Komponenten bestehen.

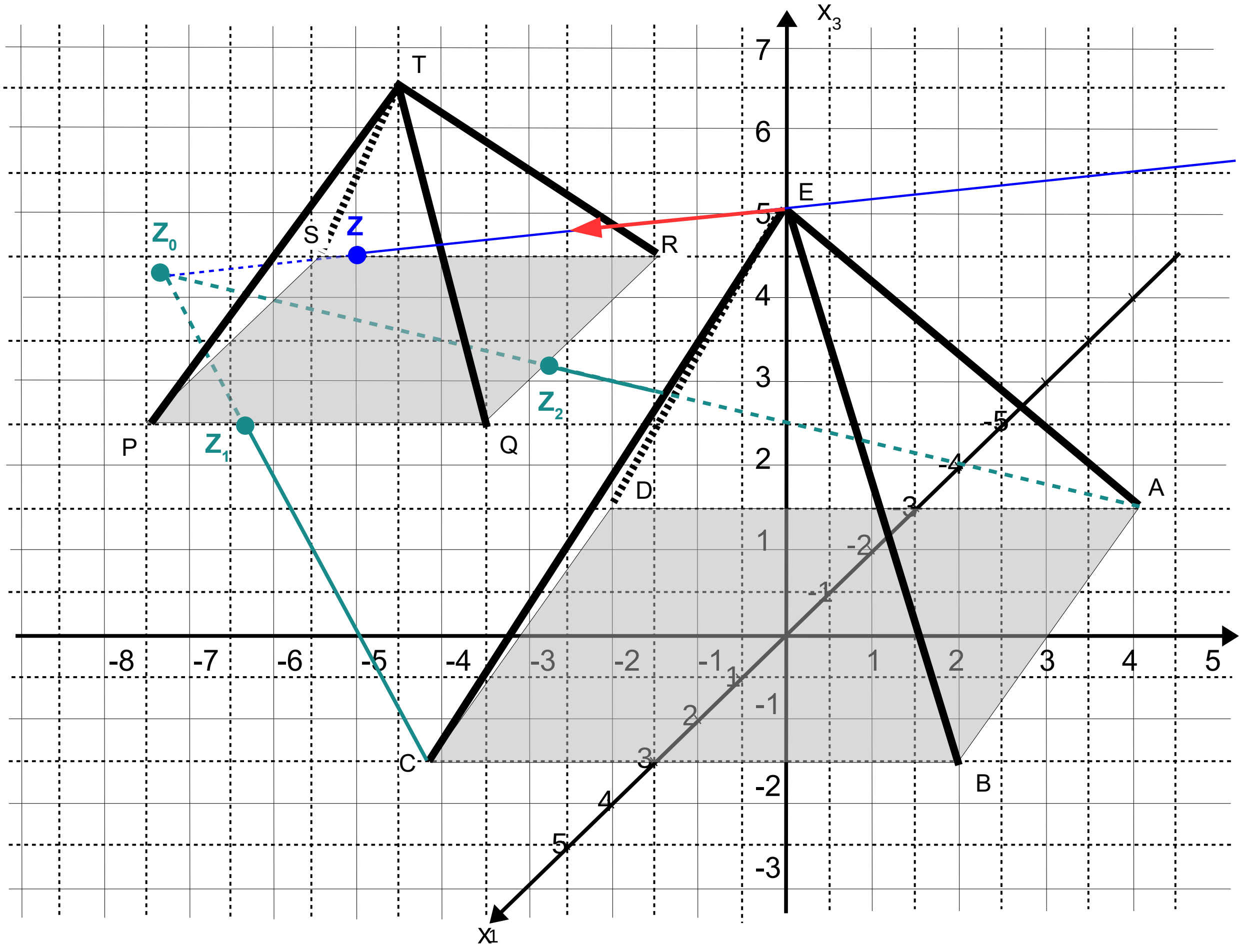
P' , K und F sind Punkte in der $x_1 - x_2$ Ebene



13.2.4. Schatten auf nebenstehenden Körper – Fußpunkte

Neben dieser Pyramide steht noch ein zweite, auf die der Schatten fällt, und nicht mehr vollständig in die x_1-x_2 Ebene.

P (–5 | -10 | 0) , Q (-5 | -6 | 0) , R (-9 | –6 | 0) , S (–9 | –10 | 0) , T (-7 | -8 | 3)



Ausgangspunkt der Berechnung ist der Schattenwurf ohne die zweite Pyramide.

Der Schatten der Spitze E trifft auf die x_1–x_2 Ebene im Punkt Z_0.

Die Verbindungslinie des Eckpunktes A zum Punkt Z_0 liefert die eine Begrenzung des Schattens

Die Verbindungslinie des Eckpunktes C zum Punkt Z_0 liefert die zweite Begrenzung des Schattens.

Auf diesem Weg der Schattenlinien steht jetzt die Pyramide 2. Damit endet zunächst die Schattenlinie an der Pyramidenkante und setzt sich irgendwie auf dem Pyramidenflächen fort. Die Punkte Z_1 und Z_2 stellen die Endpunkte der Schattenlinien an den Pyramidenkanten dar.

Umgesetzt in die Sprache der Vektorrechnung ist es der Schnittpunkt der Geraden AZ_0 mit der Geraden RQ, sowie der Schnittpunkt der Geraden CZ_0 mit der Geraden PQ. Alle diese Geraden verlaufen in der x_1 – x_2 Ebene und haben eine x_3 Koordinate von 0.

A (–3 | 3 | 0) , C (3 | –3 | 0) , Z_0 (-8,6 | -11,4 | 0) P (–5 | -10 | 0) , Q (-5 | -6 | 0) , R (-9 | –6 | 0)

g_{AZ0} : $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5,6 \\ -14,4 \end{pmatrix}$

g_{RQ} : $x = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-3 - 5{,}6\,t = -5 - 4s$
$3 - 14{,}4\,t = -6$

t=0.625 ; s=0.375

$Z_2 = (-6.5,\ -6)$

g_{CZ0} : $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11,6 \\ -8,4 \end{pmatrix}$

g_{PQ} : $x = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$3 - 11{,}6\,t = -5$
$-3 - 8{,}4\,t = -6 - 4s$

t=0.6897 ; s= 0.6983

$Z_1 = (-5, -8.8)$

13.2.5. Schattenpunkt auf einem nebenstehenden Körper

Schattenpunkt der Pyramidenspitze auf der zweiten Pyramide.

Von Seiten der Vektorrechnung ist das keine Problem. Es handelt sich dabei um den Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene. Das Problem liegt bei der Ebene, die durchstoßen wird.
Liegt der Durchstoßpunkt in der Ebene PQT oder in der Ebene QRT. Diese Entscheidung ist auch aus der Zeichnung schwer zu bestimmen. Tatsache ist, die Gerade hat Schnittpunkte mit beiden Ebene, aber welcher ist der Schattenpunkt.
Weiterhin ist klar, dass der Schattenpunkt in einem der Dreieck PQT oder QRT liegen muss.
Wenn es im Dreieck QRT einen Schattenpunkt gibt, dann kann es im Dreieck PQT keinen Schatten geben, da diese Seite dann hinter QRT liegt.

Es werden für beide Ebenen Parametergleichungen erstellt und als Aufpunkt bei beiden Ebenen der Punkt T verwendet.

P (–5 | -10 | 0) , Q (-5 | -6 | 0) , R (-9 | –6 | 0) , T (-7 | -8 | 3)

Ebene 1: x = T + t (Q – T) + s (P – T) $x = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ebene 2: x = T + t (Q – T) + s (R – T) $x = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Gerade des Lichtstrahls $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt Gerade – Ebene 1

$-12\,r = -7 + 2t + 2s$
$-16\,r = -8 + 2t - 2s$
$5 - 7r = 3 - 3t - 3s$

r = ½ ; t = ¼ ; s = ¼

Schattenpunkt der Pyramidenspitze Z $\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt Gerade – Ebene 2

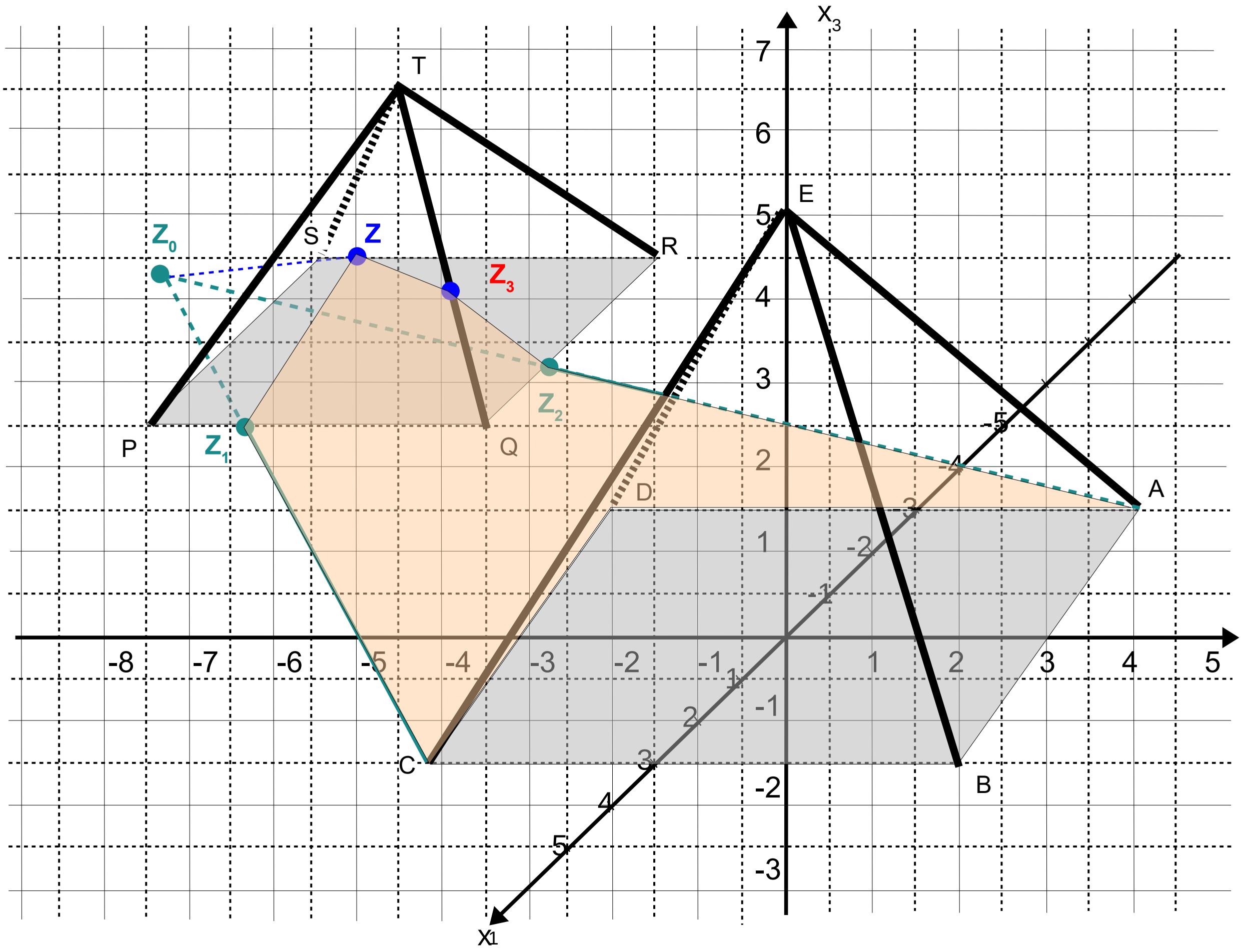
$-12\,r = -7 + 2t - 2s$
$-16\,r = -8 + 2t + 2s$
$5 - 7r = 3 - 3t - 3s$

r = 14/31 ; s = −25/124 ; t = 73/124

Das kann nicht der gesuchte Schattenpunkt sein, da der Parameter von s negativ ist. Da der Schattenpunkt in dem Dreieck QRT liegen muss, müssen die Koeffizienten der Richtungsvektoren positiv sein.

Da der Schattenpunkt der Pyramidenspitze auf der PQT Ebene liegt, kann die Schattenlinie von Z auch direkt mit Z_1 verbunden werden. Mit Z_2 geht das nicht, da dort noch die Knickkante der Pyramide dazwischen ist.
Es muss die Schattenlinie bis zu dieser Knickkante ermittelt werden, dann kann diese mit Z_2 verbunden werden.

13.2.6. Schatten auf nebenstehenden Körper – Schattenlinie über Knickkante



Gesucht ist der Punkt Z_3, der die Verbindung der Schattenlinie zwischen Z und Z_2 herstellt.

Überlegung:

Die Pyramidenkante AE liefert mit der Richtung der Sonnenstrahlen eine Ebene, in der sich die Schattenlinie befindet.
Der Schnittpunkt dieser Ebene mit der Kante QT liefert den Schnittpunkt.

Ebene der Schattenlinie: $x = A + t\,(E - A) + s\ v$ A (–3 | 3 | 0) , E (0 | 0 | 5) $v = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Gerade QT : $x = T + t\ (Q - T)$ Q (-5 | -6 | 0) , T (-7 | -8 | 3)

$$x = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt Gerade – Ebene

$$\begin{aligned} -7 + 2r &= -3 + 3t - 12s \\ -8 + 2r &= 3 - 3t - 16s \\ 3 - 3r &= 0 + 5t - 7s \end{aligned}$$

r = 0.6037 ; s = 0.4494 ; t = 0.8670

Z_3 (−5.7926, −6.7926, 1.1889)

13.3. Schattenberechnung mit Projektionsmatrizen

Schattenberechnung eines Punktes auf eine Ebene sind auch Projektionen auf diese Ebene, aber nicht in senkrechter Richtung von n , sondern in vorgegebener Richtung v des Lichtstrahls. Letztendlich bedeutet Schattenberechnung die Bestimmung eines Durchstoßpunktes einer Geraden durch eine Ebene.

13.3.1. Projektionsmatrizen für nicht orthogonale Projektion

Allgemeine Ebene und Gerade

Projektion eines Punktes P auf eine Ebene: $(x - A) \circ n = 0$

Zunächst Berechnung der Lotgerade l : $l: \; x = P + t\,v$

Fußpunkt ist auch Geradenpunkt (v ist nicht senkrecht zu E)

$$(P + t\,v - A) \circ n = 0$$

$$(P - A) \circ n + t\,(v^T \circ n) = 0$$

$$t = -\frac{(P - A) \circ n}{v^T \circ n}$$

Berechnen des Schnittpunktes :

$$l: \; F = P - \frac{(P - A) \circ n}{v^T \circ n}\, v$$

$$F = A + P - A - \frac{(P - A) \circ n}{v^T \circ n}\, v$$

$$F = A + 1/(v^T \circ n) \;\; ((P - A) \circ n) \cdot v$$

$$F = A + \frac{1}{v^T \circ n}\,\left((P\text{-}A)_1\, n_1 + (P\text{-}A)_2\, n_2 + (P\text{-}A)_3\, n_3 \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = A + \frac{1}{v^T \circ n} \begin{pmatrix} (P\text{-}A)_1\, n_1 v_1 + (P\text{-}A)_2\, n_2 v_1 + (P\text{-}A)_3\, n_3 v_1 \\ (P\text{-}A)_1\, n_1 v_2 + (P\text{-}A)_2\, n_2 v_2 + (P\text{-}A)_3\, n_3 v_2 \\ (P\text{-}A)_1\, n_1 v_3 + (P\text{-}A)_2\, n_2 v_3 + (P\text{-}A)_3\, n_3 v_3 \end{pmatrix}$$

$$= A + \frac{1}{v^T \circ n} \begin{pmatrix} n_1 v_1 & n_2 v_1 & n_3 v_1 \\ n_1 v_2 & n_2 v_2 & n_3 v_2 \\ n_1 v_3 & n_2 v_3 & n_3 v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (P\text{-}A)_1 \\ (P\text{-}A)_2 \\ (P\text{-}A)_3 \end{pmatrix} = A + \frac{1}{v^T \circ n} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (P\text{-}A)_1 \\ (P\text{-}A)_2 \\ (P\text{-}A)_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{F = A + \left(E - \frac{v \bullet n^T}{v^T \circ n} \right) (P - A)}$$

Die Berechnung im Zähler $v \bullet n^T$ darf nicht vertauscht werden, $n \bullet v^T$ liefert nicht die benötigte Matrix. Der Zähler ist kein Skalarprodukt, sondern eine Matrizenmultiplikation. Der Nenner ist ein Skalarprodukt und damit eine reelle Zahl, durch die dividiert werden darf.

Das ist gleichzeitig die Formel für den Berechnung eines Schnittpunktes von Gerade und Ebene.

13.3.2. Schattenpunkt in der $x_1 - x_2$ – Ebene

In der Literatur findet man unter anderem die einfacheren Lösungen, z.B ein Schattenpunkt auf der $x_1 - x_2$ – Ebene. Die hier angegebene Formel liefert für diesen Spezialfall auch die dort angegebene Formel:

$x_1 - x_2$ – Ebene in Richtung v : $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ $n^T = (\, 0 \;\; 0 \;\; 1 \,)$ $v^T \circ n = v_3$

$$\left(E - \frac{(v \bullet n^T)}{v^T \circ n} \right) P = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{v_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix} \right) P = \frac{1}{v_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & -v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P$$

(Beispiel aus 13.2.1. ; Berechnung von Z_0)

$$P' = \frac{1}{v_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & -v_1\\ 0 & 1 & -v_2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} P$$

Richtung des Lichtstrahls $v = \begin{pmatrix}-12\\-16\\-7\end{pmatrix}$

Pyramidenspitze E, die in die $x_1 - x_2$ – Ebene abgebildet wird. $\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$

$$P' = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 0 & 12\\ 0 & 1 & 16\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-60/7\\-80/7\\0\end{pmatrix} = \mathbf{Z_0}}$$

(vergleiche Ergebnis mit Kapitel 13.2.1.)

13.3.3. Schattenpunkt auf einer Kante

(Beispiel aus Kapitel 13.2.4.)

Die Pyramidenkante AE liefert mit der Richtung der Sonnenstrahlen eine Ebene, in der sich die Schattenlinie befindet.Der Schnittpunkt dieser Ebene mit der Kante RQ liefert den Schnittpunkt.

$Z_1 = (-5,\ -8.8,\ 0)$
$Z_2 = (-6.5,\ -6,\ 0)$

A (–3 | 3 | 0) , E (0 | 0 | 5)

Richtung des Lichteinfalls : $h = \begin{pmatrix}-12\\-16\\-7\end{pmatrix}$ Ebene der Schattenlinie: $x = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-12\\-16\\-7\end{pmatrix}$ $n = \begin{pmatrix}101\\-39\\-84\end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$

Q (-5 | -6 | 0) , R (-9 | -6 | 0)

Gerade RQ : $x = \begin{pmatrix}-9\\-6\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix}-9\\-6\\0\end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ $v^T \circ n = 404$

Da man weder den Punkt kennt, der auf den Kantenpunkt abgebildet wird, noch den Punkt, der dann auf der Kante getroffen wird, interpretiert man die Aufgabenstellung anders:
Das Licht fällt in Richtung der Geraden RQ und trifft auf die Ebene AE , h . Gesucht ist der Schattenpunkt eines Punktes von RQ auf der Ebene AE, h. Damit kann man von der Geraden RQ einen beliebigen Punkt nehmen, alle Punkte werden auf den gleichen Punkt auf der Ebene abgebildet. (Durchstoßpunkt = Schattenpunkt.)

$$\frac{(v \bullet n^T)}{v^T \circ n} = \begin{pmatrix}1 & -39/101 & -84/101\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad E - \frac{(v \bullet n^T)}{v^T \circ n} = \begin{pmatrix}0 & 39/101 & 84/101\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left(E - \frac{(v \bullet n^T)}{v^T \circ n}\right)(P - A) = \begin{pmatrix}-3\,{}^{48}/_{101}\\ -9\\ 1\end{pmatrix} \qquad A + \left(E - \frac{(v \bullet n^T)}{v^T \circ n}\right)(P - A) = \boxed{\begin{pmatrix}-5{,}4752\\-6\\0\end{pmatrix} = \mathbf{Z_2}}$$

Die Pyramidenkante CE liefert mit der Richtung der Sonnenstrahlen eine Ebene, in der sich die Schattenlinie befindet.Der Schnittpunkt dieser Ebene mit der Kante QP liefert den Schnittpunkt.

E (0 | 0 | 5) , C (3 | –3 | 0)

Ebene der Schattenlinie: $x = \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-3\\-5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-12\\-16\\-7\end{pmatrix}$ $n = \begin{pmatrix}-59\\81\\-84\end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$

P (–5 | -10 | 0) , Q (-5 | -6 | 0) Gerade QP : $x = \begin{pmatrix}-5\\-6\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix}-5\\-6\\0\end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}$ $v^T \circ n = -324$

$$\frac{(v \bullet n^T)}{v^T \circ n} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -{}^{59}/_{81} & 1 & -1\,{}^{1}/_{27}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad E - \frac{(v \bullet n^T)}{v^T \circ n} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ {}^{59}/_{81} & 0 & 1\,{}^{1}/_{27}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(E - \frac{(v \bullet n^T)}{v^T \circ n}\right)(P - A) = \begin{pmatrix}-8\\ -5\,{}^{67}/_{81}\\ 0\end{pmatrix} \qquad A + \left(E - \frac{(v \bullet n^T)}{v^T \circ n}\right)(P - A) = \boxed{\begin{pmatrix}-5\\-8{,}8271\\0\end{pmatrix} = \mathbf{Z_1}}$$

13.3.4. Schattenpunkt auf eine Fläche (Beispiel aus 13.2.5.)

Gerade des Lichtstrahls $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$

Ebene 1: QPT

$x \circ n = d \qquad x \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 15$

Schattenpunkt auf der Ebene : $\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

$n = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad n^T \circ v = 50$

$$\frac{(n \bullet v^T)}{n \circ v} = \begin{pmatrix} 18/25 & 0 & 12/25 \\ 24/25 & 0 & 16/25 \\ 21/50 & 0 & 7/25 \end{pmatrix} \qquad E - \frac{(n \bullet v^T)}{n \circ v} = \begin{pmatrix} 7/25 & 0 & -12/25 \\ -24/25 & 1 & -16/25 \\ -21/50 & 0 & 18/25 \end{pmatrix}$$

$$\left(E - \frac{(n \bullet v^T)}{n \circ v}\right)(P - A) = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 1\tfrac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad A + \left(E - \frac{(n \bullet v^T)}{n \circ v}\right)(P - A) = \boxed{\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \mathbf{Z}}$$

Das ist der Schattenpunkt auf der Ebene.

13.3.5. Schattenfußpunkte auf einer Kante (Aufgabe aus Kapitel 13.2.6.)

Eine Stange wirft einen Schatten auf eine Kante, z.B. eine Kante eines nebenstehenden Körpers oder der Schnittkante einer Fläche mit einer Koordinatenfläche. Das Problem dabei ist, man kennt nicht den Schattenpunkt auf der Kante und man kennt auch nicht den Punkt, der diesen Schattenpunkt erzeugt. Deshalb muss man aus der Stange, die den Schatten wirft und der Richtung des Lichts eine Ebene erzeugen. Von dieser Ebene ist dann der Schnittpunkt mit der Kante zu bestimmen.

Die Pyramidenkante AE liefert mit der Richtung der Sonnenstrahlen eine Ebene, in der sich die Schattenlinie befindet. Der Schnittpunkt dieser Ebene mit der Kante QT liefert den Schnittpunkt.

A (–3 | 3 | 0) , E (0 | 0 | 5)

Q (-5 | -6 | 0) , T (-7 | -8 | 3)

Richtung des Lichteinfalls : $h = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$

Ebene der Schattenlinie: $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$

Gerade QT : $x = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$n = \begin{pmatrix} 101 \\ -39 \\ -84 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad n^T \circ v = 376$

Da man weder den Punkt kennt, der auf den Kantenpunkt abgebildet wird, noch den Punkt, der dann auf der Kante getroffen wird, interpretiert man die Aufgabenstellung anders:
Das Licht fällt in Richtung der Geraden QT und trifft auf die Ebene AE , h . Gesucht ist der Schattenpunkt eines Punktes von QT auf der Ebene AE, h. Damit kann man von der Geraden QT einen beliebigen Punkt nehmen, alle Punkte werden auf den gleichen Punkt auf der Ebene abgebildet. (Durchstoßpunkt = Schattenpunkt.)

$$\frac{(v \bullet n^T)}{n^T \circ v} = \begin{pmatrix} 101/188 & -39/188 & -21/47 \\ 101/188 & -39/188 & -21/47 \\ -303/376 & 117/376 & 63/94 \end{pmatrix} \qquad E - \frac{(v \bullet n^T)}{n^T \circ v} = \begin{pmatrix} 87/188 & 39/188 & 21/47 \\ -101/188 & 1\ 39/188 & 21/47 \\ 303/376 & -117/376 & 31/94 \end{pmatrix}$$

$$\left(E - \frac{(v \bullet n^T)}{n^T \circ v}\right)(P - A) = \begin{pmatrix} -2\ {}^{149}/_{188} \\ -9\ {}^{149}/_{188} \\ 1\ {}^{71}/_{376} \end{pmatrix} \qquad A + \left(E - \frac{(v \bullet n^T)}{n^T \circ v}\right)(P - A) = \boxed{\begin{pmatrix} -5{,}79255 \\ -6{,}79255 \\ 1{,}18882 \end{pmatrix} = \mathbf{Z_3}}$$

13.4. Schnittgerade zweier Ebenen

So wie es möglich ist, mit den angepassten Spiegelungsmatrizen den Durchstoßpunkt von Ebene und Gerade zu bestimmen, sollte es möglich sein, auch die Schnittgerade von zwei Ebenen zu bestimmen. Dazu werden je eine Ebenengleichung in Parameterform und eine in Normalenform betrachtet.

$$x = A + r\,a_1 + q\,a_2 \qquad\qquad x = B + t\,b_1 + s\,b_2$$

$$(x - A) \circ n_1 = 0$$

$$(B + t\,b_1 + s\,b_2 - A) \circ n_1 = 0$$

$$t = -\frac{(B-A) \circ n_1 + s\ b_2 \circ n_1}{b_1 \circ n_1}$$

$$x = B - \frac{(B-A) \circ n_1 + s\ b_2 \circ n_1}{b_1 \circ n_1}\ b_1 + s\,b_2$$

$$x = B - \frac{(B-A) \circ n_1}{b_1 \circ n_1}\ b_1 - s\,\frac{b_2 \circ n_1}{b_1 \circ n_1}\ b_1 + s\,b_2$$

$$x = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{b_1 \circ n_1} \begin{pmatrix} (B\text{-}A)_1\, n_{11}b_{11} + (B\text{-}A)_2\, n_{12}b_{11} + (B\text{-}A)_3\, n_{13}b_{11} \\ (B\text{-}A)_1\, n_{11}b_{12} + (B\text{-}A)_2\, n_{12}b_{12} + (B\text{-}A)_3\, n_{12}b_{12} \\ (B\text{-}A)_1\, n_{11}b_{13} + (B\text{-}A)_2\, n_{12}b_{13} + (B\text{-}A)_3\, n_{13}b_{13} \end{pmatrix} - s\,\frac{1}{b_1 \circ n_1} \begin{pmatrix} b_{21}\, n_{11}b_{11} + b_{22}\, n_{12}b_{11} + b_{23}\, n_{13}b_{11} \\ b_{21}\, n_{11}b_{12} + b_{22}\, n_{12}b_{12} + b_{23}\, n_{12}b_{12} \\ b_{21}\, n_{11}b_{13} + b_{22}\, n_{12}b_{13} + b_{23}\, n_{13}b_{13} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{b_1 \circ n_1} \begin{pmatrix} n_{11}b_{11} & n_{12}b_{11} & n_{13}b_{11} \\ n_{11}b_{12} & n_{12}b_{12} & n_{13}b_{12} \\ n_{11}b_{13} & n_{12}b_{13} & n_{13}b_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (B\text{-}A)_1 \\ (B\text{-}A)_2 \\ (B\text{-}A)_3 \end{pmatrix} - s\,\frac{1}{b_1 \circ n_1} \begin{pmatrix} n_{11}b_{11} & n_{12}b_{11} & n_{13}b_{11} \\ n_{11}b_{12} & n_{12}b_{12} & n_{13}b_{12} \\ n_{11}b_{13} & n_{12}b_{13} & n_{13}b_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{b_1 \circ n_1} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (B\text{-}A)_1 \\ (B\text{-}A)_2 \\ (B\text{-}A)_3 \end{pmatrix} - s\,\frac{1}{b_1 \circ n_1} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} - \left(\frac{b_1\ n_1^T}{b_1^T \circ n_1} \right) (B - A) - s \left(\frac{b_1\ n_1^T}{b_1^T \circ n_1} \right) b_2 + b_2$$

$$x = B + A - A + \left(\frac{b_1\ n_1^T}{b_1^T \circ n_1} \right) (B - A) - s \left(\frac{b_1\ n_1^T}{b_1^T \circ n_1} \right) b_2 + b_2$$

$$\boxed{x = \underbrace{A + \left(E - \left(\frac{b_1\ n_1^T}{b_1^T \circ n_1} \right) \right) (B - A)}_{\text{Stützvektor Schnittgerade}} + s\,\underbrace{\left(E - \left(\frac{b_1\ n_1^T}{b_1^T \circ n_1} \right) \right) b_2}_{\text{Richtungsvektor Schnittgerade}}}$$

Musterbeispiel

In Kapitel 11.1.2. wurde die Schnittgerade von folgenden beiden Ebenen berechnet.

$$E_1: \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}\right] = 0 \qquad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

und dabei folgende Schnittgerade ermittelt : $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} \quad B - A = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} \; b_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \quad n_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$x = A + \left(E - \left(\frac{b_1\, n_1^T}{b_1^T \circ n_1}\right)\right)(B - A) + s\left(E - \left(\frac{b_1\, n_1^T}{b_1^T \circ n_1}\right)\right) b_2$$

$$\frac{b_1\, n_1^T}{b_1^T \circ n_1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0,1 & 0,2 & 0,2\\0,4 & 0,8 & 0,8\end{pmatrix} \qquad E - \frac{b_1\, n_1^T}{b_1^T \circ n_1} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0,1 & -0,8 & 0,2\\0,4 & 0,8 & -0,2\end{pmatrix}$$

$$\left(E - \frac{b_1\, n_1^T}{b_1^T \circ n_1}\right)(B - A) = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad \left(E - \frac{b_1\, n_1^T}{b_1^T \circ n_1}\right)(B - A) + A = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$$

Dieser Stützvektor entsteht in der obigen Geraden für r = 2 und ist damit ein Stützvektor der gleichen Geraden.

$$\left(E - \frac{b_1\, n_1^T}{b_1^T \circ n_1}\right) b_2 = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Dieser Richtungsvektor ist der entgegengesetzte Richtungsvektor der obigen Geraden und damit ein Richtungsvektor der gleichen Geraden.

=> Die angegebene Formel berechnet die Schnittgerade zweier Ebenen.

13.5. Zusammenfassung Schnittpunkt und Schnittgerade von Ebenen

Schnittpunkt Gerade – Ebene

$$\boxed{\begin{aligned} F &= P - \left(\frac{v \bullet n^T}{v^T \circ n}\right)(P - A) \\ F &= A + \left(E - \frac{v \bullet n^T}{v^T \circ n}\right)(P - A) \end{aligned}}$$

Schnittgerade Ebene – Ebene

$$x = \underbrace{A + \left(E - \left(\frac{b_1\ n_1^T}{b_1^T \circ n_1}\right)\right)(B - A)}_{\text{Stützvektor Schnittgerade}} + s \underbrace{\left(E - \left(\frac{b_1\ n_1^T}{b_1^T \circ n_1}\right)\right) b_2}_{\text{Richtungsvektor Schnittgerade}}$$