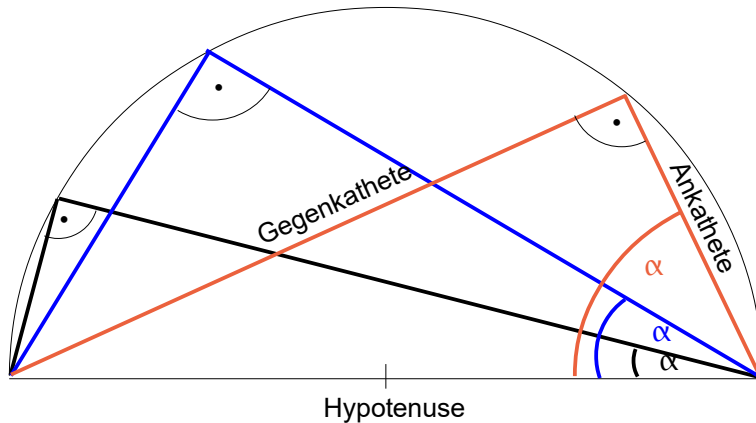


Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Trigonometrie

Winkel und Seiten im rechtwinkligen Dreieck



Satz des Thales:
Alle Winkel über einem Halbkreis sind rechte Winkel

Feststellungen: Mit der Änderung des Winkels ändern sich die Längen von Gegenkathete und Ankathete

- * Mit größer werdendem Winkel wird die Gegenkathete größer, die Ankathete kleiner.
- * Die Gegenkathete ist am größten, wenn der Winkel 90° beträgt.
- * Die Ankathete ist am größten wenn der Winkel 0° beträgt.
- * Die jeweilige Kathete des Dreiecks ist dann gleich der Größe der Hypotenuse, die jeweils andere Kathete ist 0.

Aus den drei Seiten eines Dreiecks lassen sich 6 verschiedene Verhältnisse zwischen den Seiten definieren. Alle 6 Verhältnisse werden in der Trigonometrie benutzt, aber nicht in der gleichen Häufigkeit.

=> Das Verhältnis der Katheten zur Hypotenuse liegt in Abhängigkeit vom Winkel zwischen 0 und 1

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \sin \quad \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \tan \quad \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}} = \sec$$

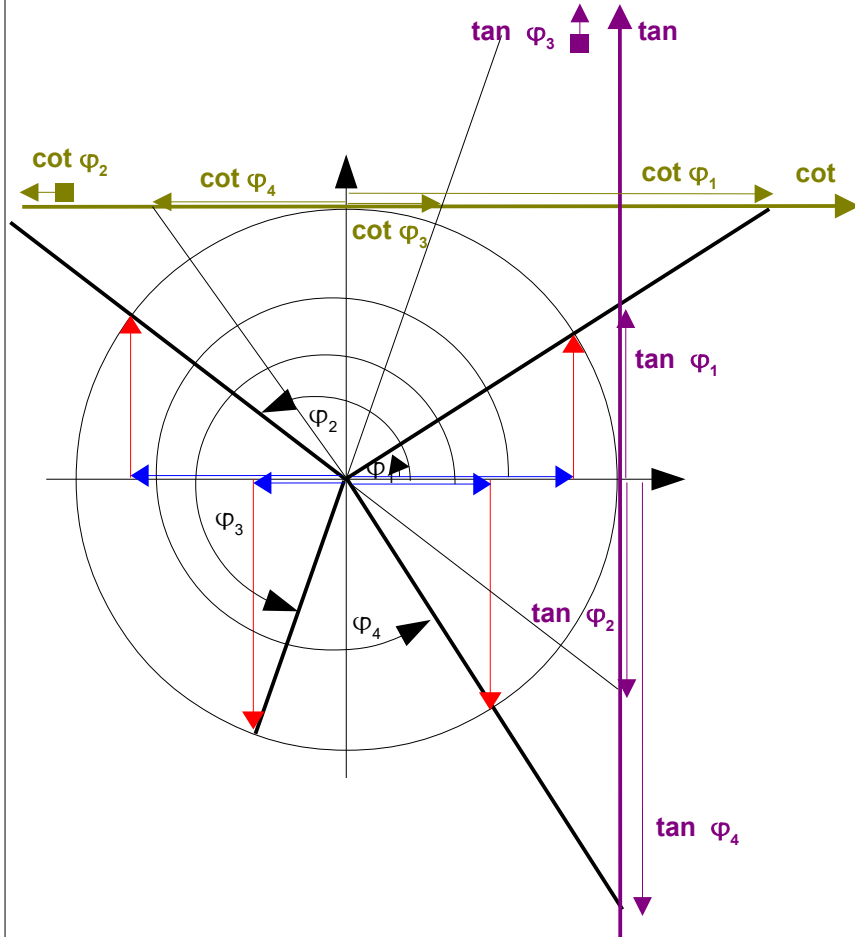
$$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \cos \quad \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \cot \quad \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Gegenkathete}} = \csc$$

Thema **Gesetze und Regeln** **Musterbeispiele**

Trigonometrie

Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

Dazu betrachtet man eine Strecke in einem Koordinatensystem, deren ein Anfangspunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt und deren Länge 1 ist.



Die tangens und cotangens Vorzeichen des Winkels:

	sin	cos	tan	cot
I. Quadrant:	+	+	+	+
II. Quadrant:	+	-	-	-
III. Quadrant:	-	+	-	-
IV. Quadrant:	-	-	+	+

Die sinus-Abschnitte des Winkels sind die Projektionen des Radius auf die y-Achse:
 I. Quadrant: +
 II. Quadrant: +
 III. Quadrant: -
 IV. Quadrant: -

Die cosinus-Abschnitte des Winkels sind die Projektionen des Radius auf die x-Achse:
 I. Quadrant: +
 II. Quadrant: -
 III. Quadrant: -
 IV. Quadrant: +

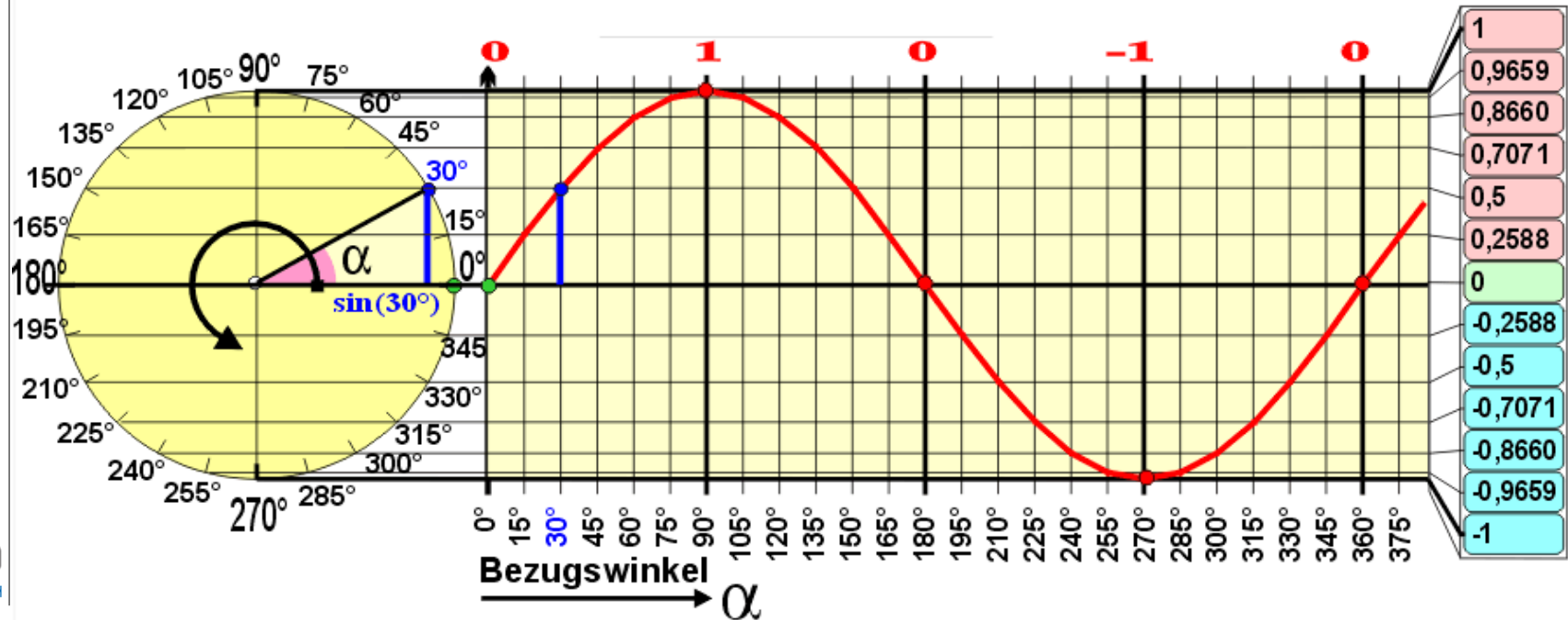
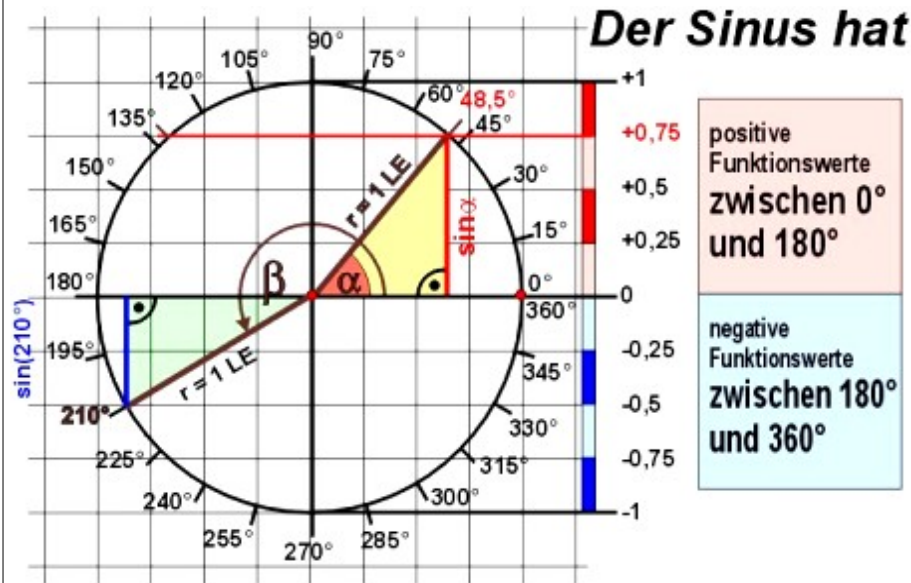
Die tangens-Abschnitte des Winkels sind die Schnittpunkte der Verlängerung des Radius mit der Tangente in $x=1$:
 I. Quadrant: +
 II. Quadrant: -
 III. Quadrant: +
 IV. Quadrant: -

Die cotangens – Abschnitte des Winkels sind die Schnittpunkte der Verlängerung des Radius mit der Co-Tangente in $y=1$:
 I. Quadrant: +
 II. Quadrant: -
 III. Quadrant: +
 IV. Quadrant: -

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Trigonometrie

Der Sinus am Einheitskreis

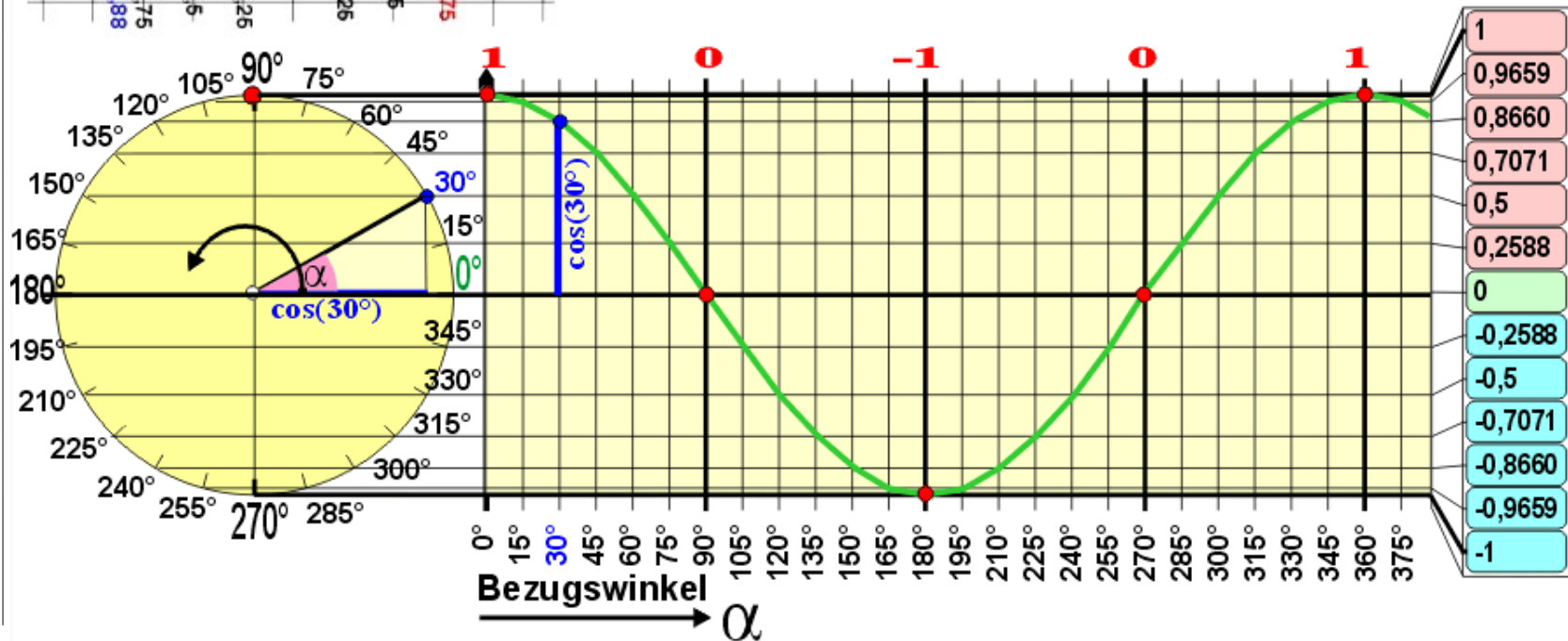
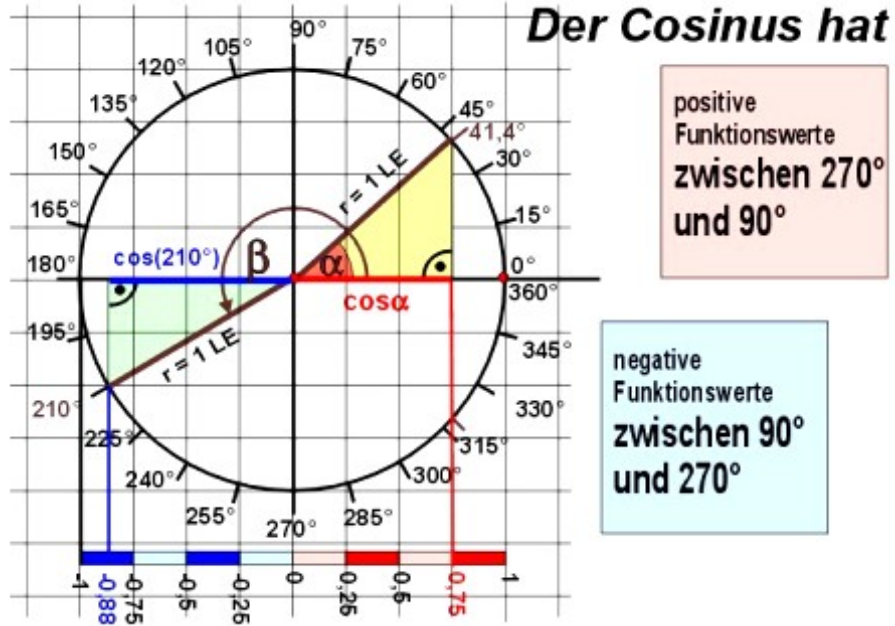


© Dipl.-Math.
Armin Richter

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Trigonometrie

Der Cosinus am Einheitskreis

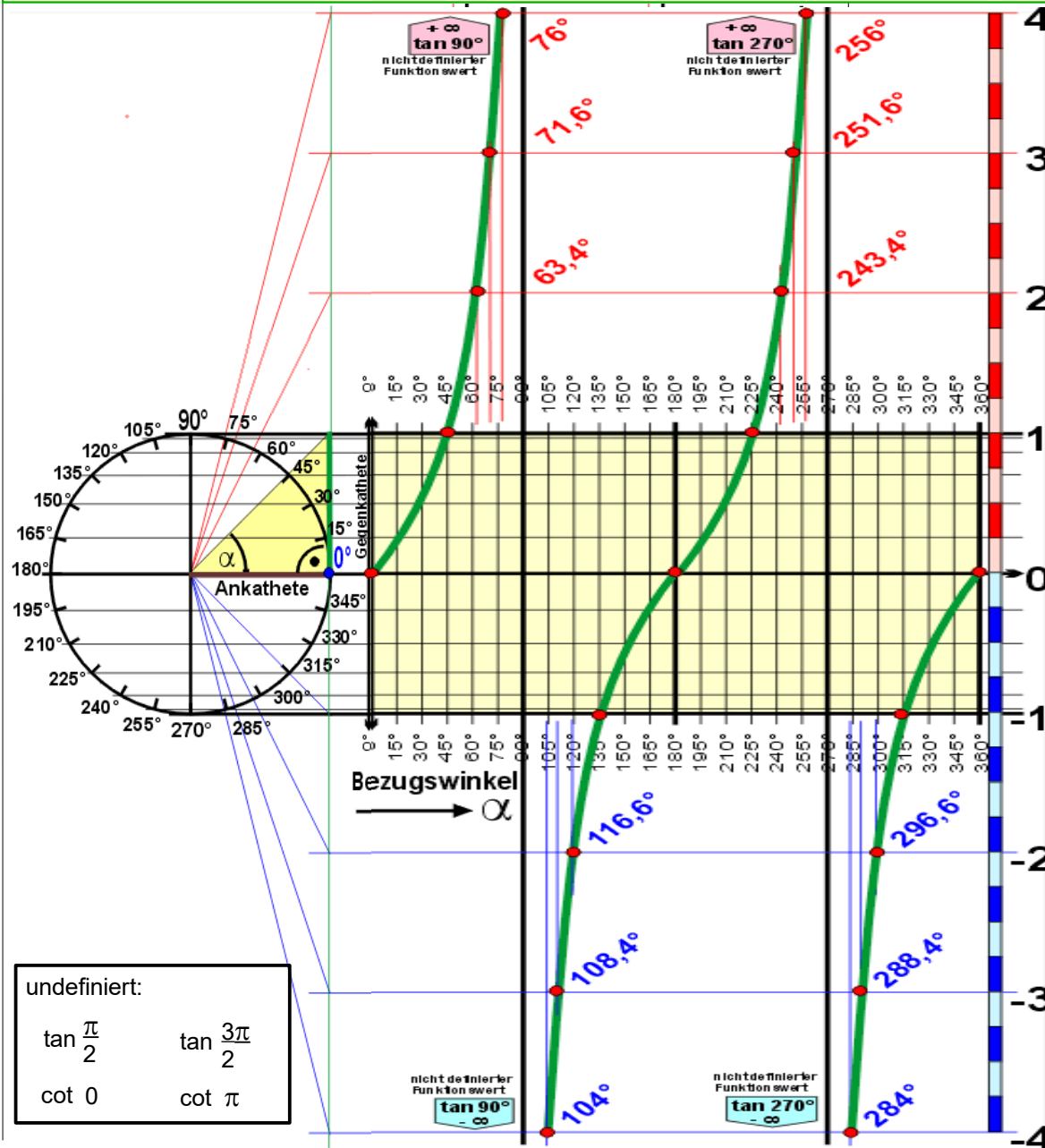


© Dipl.-Math.
Armin Richter

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Trigonometrie

Der Tangens am Einheitskreis



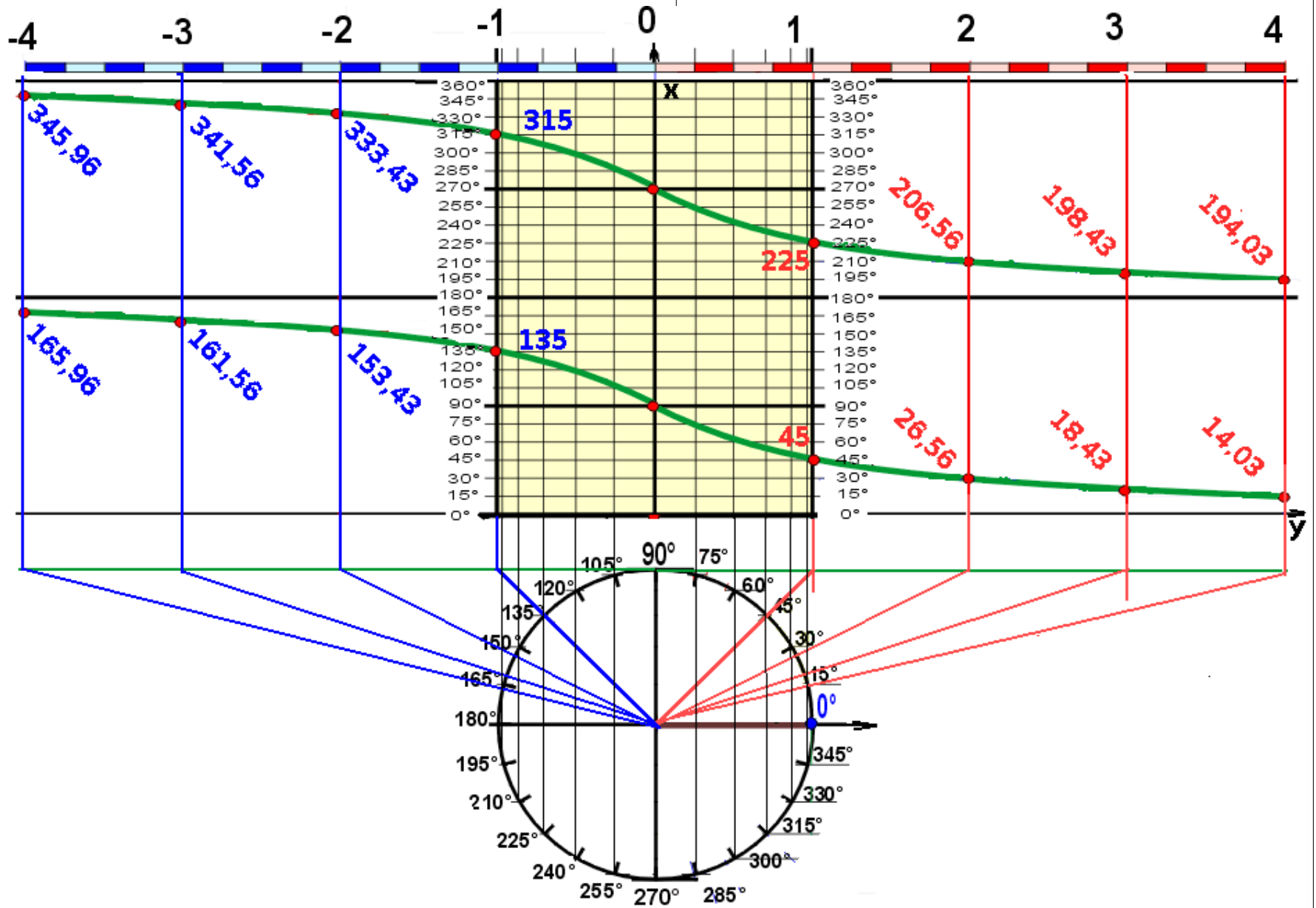
undefiniert:
 $\tan \frac{\pi}{2}$ $\tan \frac{3\pi}{2}$
 $\cot 0$ $\cot \pi$

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Trigonometrie

● Der Cotangens am Einheitskreis



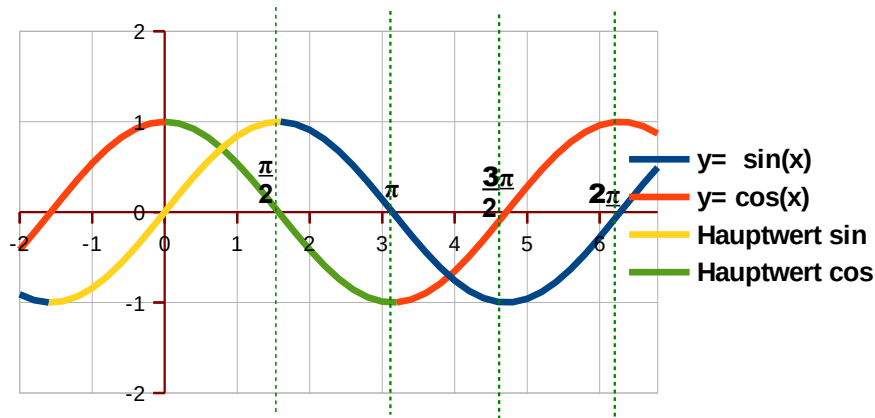
© Dipl.-Math.
Armin Richter



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Trigonometrie

sin und cos Funktion



	y = sin(x)	y = cos(x)
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$-1 \leq y \leq 1$	$-1 \leq y \leq 1$
Nullstelle	$x = k \cdot \pi$	$x = \pi/2 + k \cdot \pi$
Extrema	$x = \pi/2 + 2k \cdot \pi$ Maximum $x = 3\pi/2 + 2k \cdot \pi$ Minimum	$x = 2k \cdot \pi$ Maximum $x = \pi + 2k \cdot \pi$ Minimum
Wendepunkte	$x = k \cdot \pi$	$x = \pi/2 + k \cdot \pi$
Periode	2π	2π
Gemeinsame Punkte	$(\pi/4 + k \cdot \pi, \frac{1}{2} \sqrt{2})$	
Monotonie	$-\pi/2 + 2k \cdot \pi \leq x \leq \pi/2 + 2k \cdot \pi$ monoton wachsend $\pi/2 + 2k \cdot \pi \leq x \leq 3\pi/2 + 2k \cdot \pi$ monoton fallend	$\pi + 2k \cdot \pi \leq x \leq 2\pi + 2k \cdot \pi$ monoton wachsend $2k \cdot \pi \leq x \leq \pi + 2k \cdot \pi$ monoton fallend
Besonderheiten		

Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha) + \sin(\beta) &= 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos(\alpha) + \cos(\beta) &= 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin(\alpha) - \sin(\beta) &= 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos(\alpha) - \cos(\beta) &= -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \cdot \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cdot \cos(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2 \cdot \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2 \cdot \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha) + \sin(\alpha) &= \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ + \alpha) \\ &= \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ - \alpha) \\ \cos(\alpha) - \sin(\alpha) &= \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + \alpha) \\ &= \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

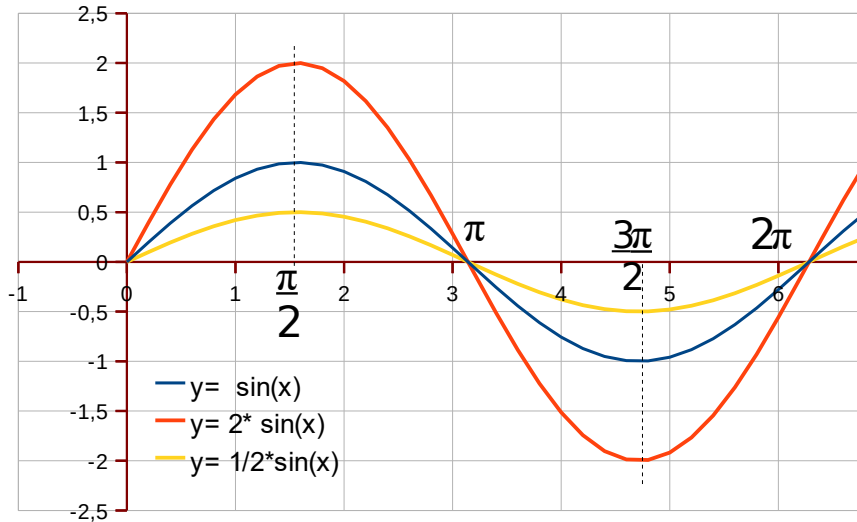
Produktformeln

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) &= \sin^2(\alpha) - \sin^2(\beta) = \cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha) \\ \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\beta) = \cos^2(\beta) - \sin^2(\alpha) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Trigonometrie

★ Amplitutenänderung $A \cdot \sin(x)$



Umrechnung Vielfache eines Winkels in Ausgangswinkel

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= 2 \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(3\alpha) &= 3 \cdot \sin(\alpha) - 4 \cdot \sin^3(\alpha) \\ \sin(4\alpha) &= 8 \cdot \sin(\alpha)\cos^3(\alpha) - 4 \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(5\alpha) &= 16 \cdot \sin^5(\alpha) - 20 \cdot \sin^3(\alpha) + 5 \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2 \cdot \sin^2(\alpha) = 2 \cdot \cos^2(\alpha) - 1 \\ \cos(3\alpha) &= 4 \cdot \cos^3(\alpha) - 3 \cdot \cos(\alpha) \\ \cos(4\alpha) &= 8 \cdot \cos^4(\alpha) - 8 \cdot \cos^2(\alpha) + 1 \\ \cos(5\alpha) &= 16 \cdot \cos^5(\alpha) - 20 \cdot \cos^3(\alpha) + 5 \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Umrechnung des halben Winkels in Ausgangswinkel

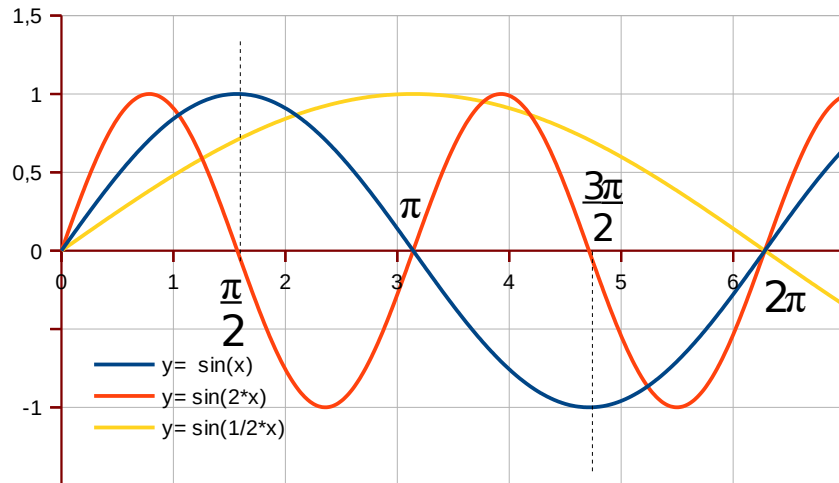
$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin(\alpha)} - \sqrt{1 - \sin(\alpha)})$$

$0 \leq \alpha \leq \pi/2$ für die zweite Formel

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin(\alpha)} + \sqrt{1 - \sin(\alpha)})$$

$0 \leq \alpha \leq \pi/2$ für die zweite Formel

★ Periodenänderung $\sin(a \cdot x)$



Potenzen von Winkelfunktionen

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) &= \frac{1}{2} (1 - \cos(2\alpha)) \\ \sin^3(\alpha) &= \frac{1}{4} (3 \cdot \sin(\alpha) - \sin(3\alpha)) \\ \sin^4(\alpha) &= \frac{1}{8} (\cos(4\alpha) - 4 \cdot \cos(\alpha) + 3) \\ \sin^5(\alpha) &= \frac{1}{16} (\sin(5\alpha) - 5 \cdot \sin(3\alpha) + 10 \cdot \sin(\alpha)) \\ \sin^6(\alpha) &= \frac{1}{32} (10 - 15 \cdot \cos(2\alpha) + 6 \cdot \cos(4\alpha) - \cos(6\alpha)) \end{aligned}$$

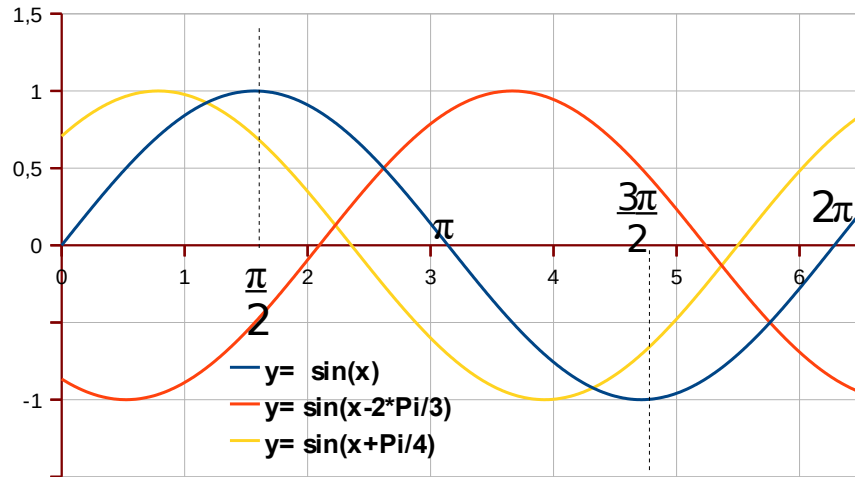
$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha) &= \frac{1}{2} (1 + \cos(2\alpha)) \\ \cos^3(\alpha) &= \frac{1}{4} (3 \cdot \cos(\alpha) + \cos(3\alpha)) \\ \cos^4(\alpha) &= \frac{1}{8} (\cos(4\alpha) + 4 \cdot \cos(2\alpha) + 3) \\ \cos^5(\alpha) &= \frac{1}{16} (\cos(5\alpha) + 5 \cdot \cos(3\alpha) + 10 \cdot \cos(\alpha)) \\ \cos^6(\alpha) &= \frac{1}{32} (\cos(6\alpha) + 6 \cdot \cos(4\alpha) + 15 \cdot \cos(2\alpha) + 10) \end{aligned}$$

© Dipl.-Math.
Armin Richter

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Trigonometrie

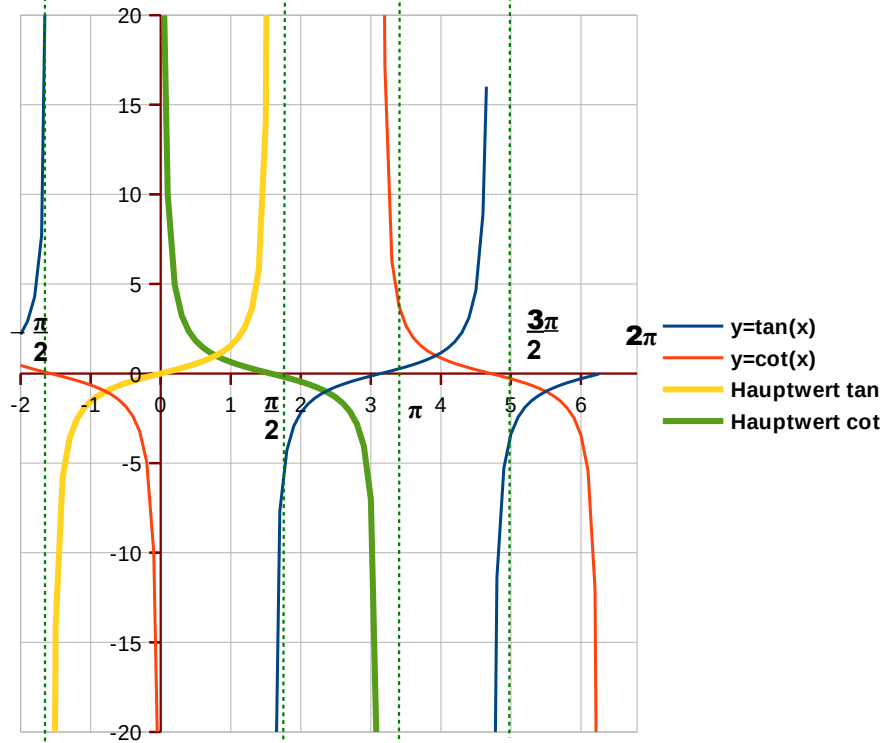
★ Phasenverschiebung $\sin(x-x_0)$



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Trigonometrie

tan und cot Funktion



	y = tan(x)	y = cot(x)
Definitionsbereich	$-\pi/2 + k\pi < x < \pi/2 + k\pi$	$k\pi < x < \pi + k\pi$
Wertebereich	$-\infty < y < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$
Nullstelle	$x = k\pi$	$x = \pi/2 + k\pi$
Extrema		
Wendepunkte	$x = k\pi$	$x = \pi/2 + k\pi$
Polstellen	$x = \pi/2 + k\pi$	$x = k\pi$
Periode	π	π
Gemeinsame Punkte	$(\pi/4 + k\pi, 1)$	
Monotonie	$-\pi/2 + k\pi < x < \pi/2 + k\pi$ monoton wachsend	$k\pi < x < \pi + k\pi$ monoton fallend
Besonderheiten		

Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)} & \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)} \\ \cot(\alpha + \beta) &= \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta) - 1}{\cot(\alpha) + \cot(\beta)} & \cot(\alpha - \beta) &= \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta) + 1}{\cot(\alpha) - \cot(\beta)} \\ \tan(\alpha) + \tan(\beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} & \tan(\alpha) - \tan(\beta) &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} \\ \cot(\alpha) + \cot(\beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)} & \cot(\alpha) - \cot(\beta) &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)} \\ \frac{1 + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)} &= \tan(45^\circ + \alpha) & \frac{1 + \cot(\alpha)}{1 - \cot(\alpha)} &= \cot(45^\circ + \alpha) \end{aligned}$$

Produktformeln

$$\begin{aligned} \tan(\alpha)\tan(\beta) &= \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{\cot(\alpha) + \cot(\beta)} = -\frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{\cot(\alpha) - \cot(\beta)} \\ \cot(\alpha)\cot(\beta) &= \frac{\cot(\alpha) + \cot(\beta)}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)} = -\frac{\cot(\alpha) - \cot(\beta)}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)} \\ \tan(\alpha)\cot(\beta) &= \frac{\tan(\alpha) + \cot(\beta)}{\cot(\alpha) + \tan(\beta)} = -\frac{\tan(\alpha) - \cot(\beta)}{\cot(\alpha) - \tan(\beta)} \\ \cot(\alpha)\tan(\beta) &= \frac{\cot(\alpha) + \tan(\beta)}{\tan(\alpha) + \cot(\beta)} = -\frac{\cot(\alpha) - \tan(\beta)}{\tan(\alpha) - \cot(\beta)} \end{aligned}$$

Umrechnung Vielfache eines Winkels in Ausgangswinkel

$$\begin{aligned} \tan(2\alpha) &= \frac{2*\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} & \cot(2\alpha) &= \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2*\cot(\alpha)} \\ \tan(3\alpha) &= \frac{3*\tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1 - 3*\tan^2(\alpha)} & \cot(3\alpha) &= \frac{\cot^3(\alpha) - 3*\cot(\alpha)}{3*\tan^2(\alpha) - 1} \\ \tan(4\alpha) &= \frac{4*\tan(\alpha) - 4*\tan^3(\alpha)}{1 - 6*\tan^2(\alpha) + \tan^4(\alpha)} & \cot(4\alpha) &= \frac{\cot^4(\alpha) - 6*\cot^2(\alpha) + 1}{4*\tan^3(\alpha) - 4*\cot(\alpha)} \end{aligned}$$

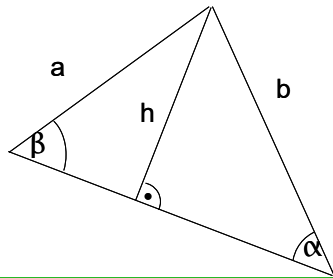
Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele																																														
Trigonometrie	★ Spezielle Werte der Winkelfunktionen	Umrechnung des halben Winkels in Ausgangswinkel $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}} = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$ $\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{1 - \cos(\alpha)}} = \frac{\sin(\alpha)}{1 - \cos(\alpha)} = \frac{1 + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$																																														
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th>sin</th> <th>cos</th> <th>tan</th> <th>cot</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0°</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>∞</td> </tr> <tr> <td>30° = π/6</td> <td>1/2</td> <td>1/2 √3</td> <td>1/3 √3</td> <td>√3</td> </tr> <tr> <td>45° = π/4</td> <td>1/2 √2</td> <td>1/2 √2</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>60° = π/3</td> <td>1/2 √3</td> <td>1/2</td> <td>√3</td> <td>1/3 √3</td> </tr> <tr> <td>90° = π/2</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>∞</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>			sin	cos	tan	cot	0°	0	1	0	∞	30° = π/6	1/2	1/2 √3	1/3 √3	√3	45° = π/4	1/2 √2	1/2 √2	1	1	60° = π/3	1/2 √3	1/2	√3	1/3 √3	90° = π/2	1	0	∞	0																
			sin	cos	tan	cot																																										
	0°		0	1	0	∞																																										
	30° = π/6		1/2	1/2 √3	1/3 √3	√3																																										
	45° = π/4		1/2 √2	1/2 √2	1	1																																										
	60° = π/3		1/2 √3	1/2	√3	1/3 √3																																										
	90° = π/2		1	0	∞	0																																										
	★ Komplementwinkelbeziehungen																																															
	$\sin x = \cos(\pi/2 - x) \qquad \cos x = \sin(\pi/2 - x)$																																															
★ Umrechnung trigonometrischer Funktionen																																																
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th>sin(α)</th> <th>cos(α)</th> <th>tan(α)</th> <th>cot(α)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>sin(α)</td> <td>sin(α)</td> <td>$\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$</td> <td>$\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}$</td> <td>$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2(\alpha)}}$</td> </tr> <tr> <td>cos(α)</td> <td>$\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$</td> <td>cos(α)</td> <td>$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}$</td> <td>$\frac{\cot(\alpha)}{\sqrt{1 + \cot^2(\alpha)}}$</td> </tr> <tr> <td>tan(α)</td> <td>$\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}}$</td> <td>$\frac{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$</td> <td>tan(α)</td> <td>$\frac{1}{\cot(\alpha)}$</td> </tr> <tr> <td>cot(α)</td> <td>$\frac{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}}{\sin(\alpha)}$</td> <td>$\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}$</td> <td>$\frac{1}{\tan(\alpha)}$</td> <td>cot(α)</td> </tr> </tbody> </table>		sin(α)	cos(α)	tan(α)	cot(α)	sin(α)	sin(α)	$\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$	$\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2(\alpha)}}$	cos(α)	$\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$	cos(α)	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}$	$\frac{\cot(\alpha)}{\sqrt{1 + \cot^2(\alpha)}}$	tan(α)	$\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$	tan(α)	$\frac{1}{\cot(\alpha)}$	cot(α)	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}}{\sin(\alpha)}$	$\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}$	$\frac{1}{\tan(\alpha)}$	cot(α)																							
	sin(α)	cos(α)	tan(α)	cot(α)																																												
sin(α)	sin(α)	$\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$	$\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2(\alpha)}}$																																												
cos(α)	$\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$	cos(α)	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}$	$\frac{\cot(\alpha)}{\sqrt{1 + \cot^2(\alpha)}}$																																												
tan(α)	$\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$	tan(α)	$\frac{1}{\cot(\alpha)}$																																												
cot(α)	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}}{\sin(\alpha)}$	$\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}$	$\frac{1}{\tan(\alpha)}$	cot(α)																																												
★ Quadrantenrelationen der trigonometrischen Funktionen																																																
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th>90 - α</th> <th>90 + α</th> <th>180 - α</th> <th>180 + α</th> <th>270 - α</th> <th>270 + α</th> <th>360 - α</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>sin(α)</td> <td>cos(α)</td> <td>cos(α)</td> <td>sin(α)</td> <td>- sin(α)</td> <td>- cos(α)</td> <td>- cos(α)</td> <td>- sin(α)</td> </tr> <tr> <td>cos(α)</td> <td>sin(α)</td> <td>- sin(α)</td> <td>- cos(α)</td> <td>- cos(α)</td> <td>- sin(α)</td> <td>sin(α)</td> <td>cos(α)</td> </tr> <tr> <td>tan(α)</td> <td>cot(α)</td> <td>- cot(α)</td> <td>- tan(α)</td> <td>tan(α)</td> <td>cot(α)</td> <td>- cot(α)</td> <td>- tan(α)</td> </tr> <tr> <td>cot(α)</td> <td>tan(α)</td> <td>- tan(α)</td> <td>- cot(α)</td> <td>cot(α)</td> <td>tan(α)</td> <td>- tan(α)</td> <td>- cot(α)</td> </tr> <tr> <td></td> <td>I.</td> <td>II. Quadrant</td> <td>III. Quadrant</td> <td>IV. Quadrant</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		90 - α	90 + α	180 - α	180 + α	270 - α	270 + α	360 - α	sin(α)	cos(α)	cos(α)	sin(α)	- sin(α)	- cos(α)	- cos(α)	- sin(α)	cos(α)	sin(α)	- sin(α)	- cos(α)	- cos(α)	- sin(α)	sin(α)	cos(α)	tan(α)	cot(α)	- cot(α)	- tan(α)	tan(α)	cot(α)	- cot(α)	- tan(α)	cot(α)	tan(α)	- tan(α)	- cot(α)	cot(α)	tan(α)	- tan(α)	- cot(α)		I.	II. Quadrant	III. Quadrant	IV. Quadrant			
	90 - α	90 + α	180 - α	180 + α	270 - α	270 + α	360 - α																																									
sin(α)	cos(α)	cos(α)	sin(α)	- sin(α)	- cos(α)	- cos(α)	- sin(α)																																									
cos(α)	sin(α)	- sin(α)	- cos(α)	- cos(α)	- sin(α)	sin(α)	cos(α)																																									
tan(α)	cot(α)	- cot(α)	- tan(α)	tan(α)	cot(α)	- cot(α)	- tan(α)																																									
cot(α)	tan(α)	- tan(α)	- cot(α)	cot(α)	tan(α)	- tan(α)	- cot(α)																																									
	I.	II. Quadrant	III. Quadrant	IV. Quadrant																																												

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Trigonometrie

★ Der Sinussatz (eine mögliche Herleitung)

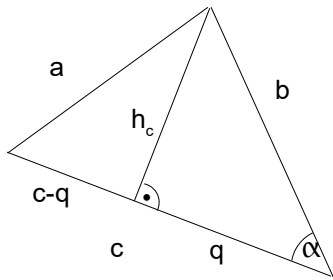


$$\sin(\alpha) = \frac{h}{b} \quad \sin(\beta) = \frac{h}{a}$$

$$h = b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta)$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{a}{b} \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

★ Der Kosinussatz



$$a^2 = (c-q)^2 + h_c^2 \quad \text{Pythagoras}$$

$$h_c = b \cdot \sin(\alpha) \quad \text{Definition Sinus}$$

$$q = b \cdot \cos(\alpha) \quad \text{Definition Kosinus}$$

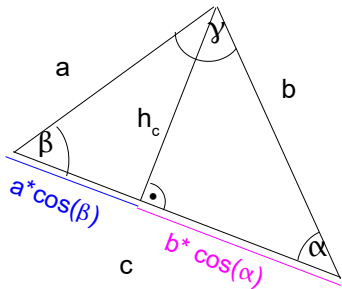
$$a^2 = c^2 - 2 \cdot c \cdot q + q^2 + h_c^2$$

$$= c^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos(\alpha) + b^2 \cos^2(\alpha) + b^2 \sin^2(\alpha)$$

$$= c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos(\alpha)$$

★ Der Projektionssatz

$$c = a \cdot \cos(\beta) + b \cdot \cos(\alpha)$$



Die Höhenformel

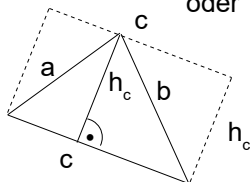
$$h_c = b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta)$$

$$a \cdot \sin(\beta) = c \cdot \frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \quad \text{da aus } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \text{ folgt } a = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$$

$$b \cdot \sin(\alpha) = \frac{a \cdot b}{c} \sin(\gamma) \quad \text{oder } \sin(\alpha) = \frac{a}{c} \sin(\gamma)$$

Der Flächeninhalt

$$A = \frac{1}{2} h_c \cdot c = a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$$



Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Trigonometrie	<p>Altgradteilung Symbol: °</p> <p>Unter einem (Alt)Grad versteht man den 90ten Teil eines rechten Winkels. Eine Winkelminute ist der 60te Teil eines Grades, ein Winkelsekunde ist der 60te Teil einer Winkelminute.</p> <p style="color: red;">Eine Vollkreis entspricht einem Winkel von 360°</p> <p>Unterteilung: $1^\circ = 60'$ (Alt)Minuten $1' = 60''$ (Alt)Sekunden</p>	
	<p>Neugradteilung Symbol: ‰</p> <p>Ein Neugrad ist der 100te Teil eines rechten Winkels. Eine Neugradminute ist der 100te Teil eines Neugrades, eine Neugradsekunde ist der 100te Teil einer Neugradminute</p> <p style="color: red;">Eine Vollkreis entspricht einem Winkel von 400‰</p> <p>Unterteilung: $1^\text{‰} = 100^\text{c}$ (Neu)Minuten $1^\text{c} = 100^\text{cc}$ (Neu)Sekunden</p>	
	<p>Bogenmaß Symbol: arc, arcus, \frown</p> <p>Ein Kreis mit dem Radius von einer Längeneinheit heißt Einheitskreis. Der zu einem Bogen von einer Längeneinheit gehörende Mittelpunktswinkel wird Radiant genannt. Die Maßzahl eines in Radianten gemessenen Winkels wird Bogenmaß genannt. Das Bogenmaß hat keine Maßeinheit.</p> <p style="color: red;">Eine Vollkreis entspricht einem Bogenmaß von 2π. (Umfang des Einheitskreises)</p>	

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Trigonometrie

★ Umrechnungstabelle 0,00° bis 1,00° in Minuten und Sekunden

0, °	'	"	0, °	'	"	0, °	'	"	0, °	'	"
0,01	0'	36"	0,26	15'	36"	0,51	30'	36"	0,76	45'	36"
0,02	1'	12"	0,27	16'	12"	0,52	31'	12"	0,77	46'	12"
0,03	1'	48"	0,28	16'	48"	0,53	31'	48"	0,78	46'	48"
0,04	2'	24"	0,29	17'	24"	0,54	32'	24"	0,79	47'	24"
0,05	3'	0"	0,30	18'	0"	0,55	33'	0"	0,80	48'	0"
0,06	3'	36"	0,31	18'	36"	0,56	33'	36"	0,81	48'	36"
0,07	4'	12"	0,32	19'	12"	0,57	34'	12"	0,82	49'	12"
0,08	4'	48"	0,33	19'	48"	0,58	34'	48"	0,83	49'	48"
0,09	5'	24"	0,34	20'	24"	0,59	35'	24"	0,84	50'	24"
0,10	6'	0"	0,35	21'	0"	0,60	36'	0"	0,85	51'	0"
0,11	6'	36"	0,36	21'	36"	0,61	36'	36"	0,86	51'	36"
0,12	7'	12"	0,37	22'	12"	0,62	37'	12"	0,87	52'	12"
0,13	7'	48"	0,38	22'	48"	0,63	37'	48"	0,88	52'	48"
0,14	8'	24"	0,39	23'	24"	0,64	38'	24"	0,89	53'	24"
0,15	9'	0"	0,40	24'	0"	0,65	39'	0"	0,90	54'	0"
0,16	9'	36"	0,41	24'	36"	0,66	39'	36"	0,91	54'	36"
0,17	10'	12"	0,42	25'	12"	0,67	40'	12"	0,92	55'	12"
0,18	10'	48"	0,43	25'	48"	0,68	40'	48"	0,93	55'	48"
0,19	11'	24"	0,44	26'	24"	0,69	41'	24"	0,94	56'	24"
0,20	12'	0"	0,45	27'	0"	0,70	42'	0"	0,95	57'	0"
0,21	12'	36"	0,46	27'	36"	0,71	42'	36"	0,96	57'	36"
0,22	13'	12"	0,47	28'	12"	0,72	43'	12"	0,97	58'	12"
0,23	13'	48"	0,48	28'	48"	0,73	43'	48"	0,98	58'	48"

Beispiel: $17,3142^\circ =$

$$\begin{array}{r}
 17, \quad = 17^\circ \\
 0,31 \quad = \quad 18' 36'' \\
 0,004 \quad = \quad 14,4'' \\
 \hline
 0,0002 \quad = \quad 0,72'' \\
 \hline
 17^\circ 18' 51,12''
 \end{array}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	3,60"	7,20"	10,80"	14,40"	18,00"	21,60"	25,20"	28,80"	32,40"
0,000	0,36"	0,72"	1,08"	1,44"	1,80"	2,16"	2,52"	2,88"	3,24"

© Dipl.-Math.
Armin Richter

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Trigonometrie

★ Umrechnungstabelle Minuten und Sekunden in 0,00° bis 1,00°

Minutentabelle

	0, °		0, °
1	0,0167	31	0,5167
2	0,0333	32	0,5333
3	0,0500	33	0,5500
4	0,0667	34	0,5667
5	0,0833	35	0,5833
6	0,1000	36	0,6000
7	0,1167	37	0,6167
8	0,1333	38	0,6333
9	0,1500	39	0,6500
10	0,1667	40	0,6667
11	0,1833	41	0,6833
12	0,2000	42	0,7000
13	0,2167	43	0,7167
14	0,2333	44	0,7333
15	0,2500	45	0,7500
16	0,2667	46	0,7667
17	0,2833	47	0,7833
18	0,3000	48	0,8000
19	0,3167	49	0,8167
20	0,3333	50	0,8333
21	0,3500	51	0,8500
22	0,3667	52	0,8667
23	0,3833	53	0,8833
24	0,4000	54	0,9000
25	0,4167	55	0,9167
26	0,4333	56	0,9333
27	0,4500	57	0,9500
28	0,4667	58	0,9667
29	0,4833	59	0,9833
30	0,5000	60	1,0000

Sekundentabelle

	0, °		0, °
1	0,000278	31	0,008611
2	0,000556	32	0,008889
3	0,000833	33	0,009167
4	0,001111	34	0,009444
5	0,001389	35	0,009722
6	0,001667	36	0,010000
7	0,001944	37	0,010278
8	0,002222	38	0,010556
9	0,002500	39	0,010833
10	0,002778	40	0,011111
11	0,003056	41	0,011389
12	0,003333	42	0,011667
13	0,003611	43	0,011944
14	0,003889	44	0,012222
15	0,004167	45	0,012500
16	0,004444	46	0,012778
17	0,004722	47	0,013056
18	0,005000	48	0,013333
19	0,005278	49	0,013611
20	0,005556	50	0,013889
21	0,005833	51	0,014167
22	0,006111	52	0,014444
23	0,006389	53	0,014722
24	0,006667	54	0,015000
25	0,006944	55	0,015278
26	0,007222	56	0,015556
27	0,007500	57	0,015833
28	0,007778	58	0,016111
29	0,008056	59	0,016389
30	0,008333	60	0,016667

Beispiel: $17^\circ 23' 51'' =$
 $17^\circ = 17,$
 $23' = 0,3833$
 $51'' = 0,0141$

 $17,3974^\circ$

© Dipl.-Math.
Armin Richter



Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Trigonometrie

★ Umrechnungstabelle 1° bis 360° in Bogenmaß

°	arc	°	arc	°	arc	°	arc
1	0,0174533	31	0,5410521	61	1,0646508	91	1,5882496
2	0,0349066	32	0,5585054	62	1,0821041	92	1,6057029
3	0,0523599	33	0,5759587	63	1,0995574	93	1,6231562
4	0,0698132	34	0,5934119	64	1,1170107	94	1,6406095
5	0,0872665	35	0,6108652	65	1,1344640	95	1,6580628
6	0,1047198	36	0,6283185	66	1,1519173	96	1,6755161
7	0,1221730	37	0,6457718	67	1,1693706	97	1,6929694
8	0,1396263	38	0,6632251	68	1,1868239	98	1,7104227
9	0,1570796	39	0,6806784	69	1,2042772	99	1,7278760
10	0,1745329	40	0,6981317	70	1,2217305	100	1,7453293
11	0,1919862	41	0,7155850	71	1,2391838	105	1,8325957
12	0,2094395	42	0,7330383	72	1,2566371	110	1,9198622
13	0,2268928	43	0,7504916	73	1,2740904	115	2,0071286
14	0,2443461	44	0,7679449	74	1,2915436	120	2,0943951
15	0,2617994	45	0,7853982	75	1,3089969	125	2,1816616
16	0,2792527	46	0,8028515	76	1,3264502	130	2,2689280
17	0,2967060	47	0,8203047	77	1,3439035	135	2,3561945
18	0,3141593	48	0,8377580	78	1,3613568	140	2,4434610
19	0,3316126	49	0,8552113	79	1,3788101	145	2,5307274
20	0,3490659	50	0,8726646	80	1,3962634	150	2,6179939
21	0,3665191	51	0,8901179	81	1,4137167	155	2,7052603
22	0,3839724	52	0,9075712	82	1,4311700	160	2,7925268
23	0,4014257	53	0,9250245	83	1,4486233	165	2,8797933
24	0,4188790	54	0,9424778	84	1,4660766	170	2,9670597
25	0,4363323	55	0,9599311	85	1,4835299	175	3,0543262
26	0,4537856	56	0,9773844	86	1,5009832	180	3,1415927
27	0,4712389	57	0,9948377	87	1,5184364	200	3,4906585
28	0,4886922	58	1,0122910	88	1,5358897	270	4,7123890
29	0,5061455	59	1,0297443	89	1,5533430	275	4,7996554
30	0,5235988	60	1,0471976	90	1,5707963	360	6,2831853

Beispiel: $\text{arc } 17,3142^\circ =$

$$\begin{array}{r} 17, \quad = 0,2967060 \\ 0,31 \quad = 0,005410521 \\ \hline 0,0042 = 0,00073303 \\ \hline 0,3021898 \end{array}$$

Rückrechnung: Beispiel: $\text{arc} = 0,3021898$

$$\begin{array}{r} 0,2967060 \quad = 17^\circ \quad \text{Rest } 0,0054838 = 0,54838 * 10^{-2} \\ 0,5410521 * 10^{-2} = 0,31 \quad \text{Rest } 0,000073279 = 0,73279 * 10^{-4} \\ \hline 0,7155850 * 10^{-4} = 0,0041 \quad \text{Rest } 0,0000017205 = 1,7205 * 10^{-6} \\ \hline 17,3141^\circ \end{array}$$

Beispiel: $\text{arc } 247^\circ = \text{arc} (200^\circ + 47^\circ)$

$$\begin{array}{r} 200^\circ \quad = 3,4906585 \\ 47^\circ \quad = 0,8203047 \\ \hline 4,3109632 \end{array}$$

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 9

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Trigonometrie

★ Umrechnungstabelle Bogenmaß in 1° bis 360°

arc	°	arc	°	arc	°	arc	°
0,1	5,7296	1,6	91,6732	3,2	183,3465	4,8	275,0197
0,2	11,4592	1,7	97,4028	3,3	189,0761	4,9	280,7493
0,3	17,1887	1,8	103,1324	3,4	194,8057	5	286,4789
0,4	22,9183	1,9	108,8620	3,5	200,5352	5,1	292,2085
0,5	28,6479	2	114,5916	3,6	206,2648	5,2	297,9381
0,6	34,3775	2,1	120,3211	3,7	211,9944	5,3	303,6676
0,7	40,1070	2,2	126,0507	3,8	217,7240	5,4	309,3972
0,8	45,8366	2,3	131,7803	3,9	223,4535	5,5	315,1268
0,9	51,5662	2,4	137,5099	4	229,1831	5,6	320,8564
1	57,2958	2,5	143,2394	4,1	234,9127	5,7	326,5859
1,1	63,0254	2,6	148,9690	4,2	240,6423	5,8	332,3155
1,2	68,7549	2,7	154,6986	4,3	246,3719	5,9	338,0451
1,3	74,4845	2,8	160,4282	4,4	252,1014	6	343,7747
1,4	80,2141	2,9	166,1578	4,5	257,8310	6,1	349,5043
1,5	85,9437	3	171,8873	4,6	263,5606	6,2	355,2338
		3,1	177,6169	4,7	269,2902	6,3	360,9634

Beispiel: arc = 0,325814

0,3	=	17,1887		
0,02	=	1,14592	$0,2 \cdot 10^{-1}$	= 11,4592 $\cdot 10^{-1}$ = 1,14592
0,005	=	0,286479	$0,5 \cdot 10^{-2}$	= 28,6479 $\cdot 10^{-2}$ = 0,286479
0,0008	=	0,0458366	$0,8 \cdot 10^{-3}$	= 45,8366 $\cdot 10^{-3}$ = 0,0458366
0,00001	=	0,0005729	$0,1 \cdot 10^{-4}$	= 5,7296 $\cdot 10^{-4}$ = 0,0005729
0,000004	=	<u>0,0002292</u>	$0,4 \cdot 10^{-5}$	= 22,9183 $\cdot 10^{-5}$ = 0,000229183
		18,6677377°		