

Aufgabe	Lösung	Erläuterung
---------	--------	-------------

Legst du ein Kapital von 1000 € zu einem Zinssatz von 4% an, so bekommst du dafür nach einem Jahr 40 € Zinsen. Leihst du dir ein Kapital von 1000 € zu einem Zinssatz von 4%, so musst du dafür nach einem Jahr 40 € Zinsen zahlen.

$$\underbrace{\text{Zinssatz } p\%}_{4\%} \text{ von } \underbrace{\text{Kapital } K}_{1000\text{ €}} = \underbrace{\text{Jahreszins } Z}_{40\text{ €}}$$

Kapital
Jahreszinsen
Zinssatz

Das Kapital K ist der verliehene oder ausgeliehene Geldbetrag.
Die Jahreszinsen Z sind die Leihgebühr für ein Jahr.
Der Zinssatz p% legt fest, wie viel Prozent des Kapitals die Jahreszinsen betragen.

Vergleich:
Prozentrechnung/
Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist ein Anwendungsgebiet der Prozentrechnung. Dem Kapital K entspricht der Grundwert G. Den Jahreszinsen Z entspricht der Prozentwert P. Dem Zinssatz p% entspricht der Prozentsatz p%.

Vergleich der Formeln

Prozentrechnung	Berechnung des Prozentwerts: $P = \frac{p}{100} \cdot G$	Berechnung des Prozentsatzes: $p = 100 \cdot \frac{P}{G}$	Berechnung des Grundwerts: $G = \frac{100}{p} \cdot P$
Zinsrechnung	Berechnung der Jahreszinsen: $Z = \frac{p}{100} \cdot K$	Berechnung des Zinssatzes: $p = 100 \cdot \frac{Z}{K}$	Berechnung des Kapitals: $K = \frac{100}{p} \cdot Z$

Der Zinssatz p% legt fest, wie viel Prozent des Kapitals die Jahreszinsen betragen. Natürlich kann ein Kapital aber auch über einen kürzeren oder längeren Zeitraum als ein Jahr ausgeliehen werden. Entsprechend sind dann an Zinsen weniger oder mehr als die Jahreszinsen zu zahlen.

Laufzeit

Die Zeit, während der ein Kapital ausgeliehen oder verliehen wird, heißt "Laufzeit". Im Geldwesen gilt: Ein Monat zählt 30 Tage. Ein Jahr zählt 360 Tage.

Zahlst du einen zu einem Zinssatz von 4% aufgenommenen Kredit von 1 000 € bereits nach neun Monaten zurück, so werden nicht die vollen Jahreszinsen von 40 € fällig, sondern nur Z davon, also 30 €. Entsprechend fallen bei einer Laufzeit von z. B. 137 Tagen nur $\frac{137}{360}$ der Jahreszinsen an.

Monatszinsen
Tageszinsen

Bei einer Laufzeit von m Monaten bzw. t Tagen werden $\frac{m}{12}$ bzw. $\frac{t}{360}$ der Jahreszinsen fällig.
Sind Z die Jahreszinsen, Z_m die Zinsen für m Monate und Z_t die Zinsen für t Tage, so gilt:
 $Z_m = \frac{m}{12} \cdot Z$ und $Z_t = \frac{t}{360} \cdot Z$

Anfangskapital
Endkapital
Zinsfaktor

Legst du 1000 € zu einem Zinssatz von 4% für ein Jahr an, dann erhältst du nach diesem Jahr 40 € Zinsen. Deine Spareinlage ist also auf 1040€ angewachsen: $(1 + \frac{4}{100}) 1000\text{ €} = 1,04 \cdot 1000\text{ €} = 1040\text{ €}$.

Wird ein Anfangskapital K zu einem Zinssatz von p% angelegt, dann beträgt das Endkapital nach einem Jahr $(1 + \frac{p}{100}) K$. Die Zahl " $1 + \frac{p}{100}$ " heißt "Zinsfaktor".

Werden 1 000 € zu einem Zinssatz von 4% über 8 Jahre angelegt, so ist das Kapital nach dem ersten Jahr auf $1,04 \cdot 1\,000\text{ €}$ angewachsen, nach dem zweiten Jahr auf $1,04 \cdot (1,04 \cdot 1\,000\text{ €}) = 1,04^2 \cdot 1\,000\text{ €}$, usw. Nach 8 Jahren ist das Anfangskapital von 1000 € auf das Endkapital von $1,04^8 \cdot 1000\text{ €} = 1368,57\text{ €}$ angewachsen.

Kapitalwachstum
nach mehreren
Jahren

Wird ein Anfangskapital K zu einem Zinssatz von p% für n Jahre angelegt, dann gilt für das Endkapital K_n nach n Jahren: $K_n = (1 + \frac{p}{100})^n K$

Zinseszinsen

Da ab dem zweiten Jahr nicht nur das Anfangskapital K, sondern auch die jeweiligen Zinsen verzinst werden, spricht man von "Zinseszinsen".

1. Berechne die Jahreszinsen Z

24 000 € werden zu einem Zinssatz von 12% aufgenommen. Wie viel Zinsen sind dafür nach einem Jahr zu zahlen?

A. Dreisatzverfahren

$$100\% \triangleq 24\,000\text{ €}$$

$$1\% \triangleq \frac{24\,000}{100}\text{ €} = 24\text{ €}$$

$$12\% \triangleq 12 \cdot 240\text{ €} = 2\,880\text{ €}$$

B. Einsetzen in die Formel

$$K = 24\,000\text{ €}; \quad p = 12$$

$$Z = \frac{12}{100} \cdot 24\,000\text{ €} = 2\,880\text{ €}$$

C. Taschenrechner

Eingabe: 0,12 24 000
Ausgabe: 2 880

Nach einem Jahr sind 2 880 € Zinseszins zu zahlen.

Sind das Kapital K und der Zinssatz p% gegeben, so kannst du daraus die Jahreszinsen Z berechnen, und zwar nach den Regeln der Prozentrechnung. Dabei entspricht dem Kapital K der Grundwert G, dem Zinssatz p% der Prozentsatz p% und den gesuchten Jahreszinsen Z der Prozentwert P. Für die Lösung mit der Formel (Lösung B) gilt dann:

$$Z = \frac{p}{100} \cdot K$$

2. Berechne den Zinssatz p%

Für einen Kredit von 24 000 € sind nach einem Jahr 2 880 € Zinsen zu zahlen. Welcher Zinssatz ist vereinbart?

A. Dreisatzverfahren

$$24\,000\text{ €} \triangleq 100\%$$

$$1\text{ €} \triangleq \frac{100}{24\,000}\% = \frac{1}{240}\%$$

$$2\,880\text{ €} \triangleq 2\,880 \cdot \frac{1}{240}\% = 12\%$$

B. Einsetzen in die Formel

$$Z = 2\,880\text{ €}; \quad K = 24\,000\text{ €}$$

$$p = 100\% \cdot \frac{2\,880\text{ €}}{24\,000\text{ €}} = 12\%$$

C. Taschenrechner

Eingabe: 288 000 24 000
Ausgabe: 12

Der Zinssatz beträgt 12 %

Sind das Kapital K und die Jahreszinsen Z gegeben, so kannst du daraus den Zinssatz p% berechnen, und zwar mit einem der auf Seite 7 beschriebenen Verfahren. Dabei entspricht dem Kapital K der Grundwert G, den Jahreszinsen Z der Prozentwert P und dem gesuchten Zinssatz p% der Prozentsatz p%. Für die Lösung mit der Formel (Lösung B) gilt dann:

$$p = 100 \cdot \frac{Z}{K}$$

3. Berechne das Kapital K

Für einen Kredit zu einem Zinssatz von 12% sind nach einem Jahr 2 880 € Zinsen zu zahlen. Wie hoch ist der Kredit?

A. Dreisatzverfahren

$$12\% \triangleq 2\,880\text{ €}$$

$$1\% \triangleq \frac{2\,880}{12}\text{ €} = 240\text{ €}$$

$$100\% \triangleq 100 \cdot 240\text{ €} = 24\,000\text{ €}$$

B. Einsetzen in die Formel

$$Z = 2\,880\text{ €}; \quad p = 12$$

$$K = \frac{100}{12} \cdot 2\,880\text{ €} = 24\,000\text{ €}$$

C. Taschenrechner

Eingabe: 288 000 12
Ausgabe: 24 000

Der Kredit beträgt 24 000 €.

Sind die Jahreszinsen Z und der Zinssatz p% gegeben, so kannst du daraus das Kapital K berechnen, und zwar mit einem der auf Seite 8 beschriebenen Verfahren. Dabei entspricht den Jahreszinsen Z der Prozentwert P, dem Zinssatz p% der Prozentsatz p% und dem gesuchten Kapital K der Grundwert G. Für die Lösung mit der Formel (Lösung B) gilt dann:

$$K = \frac{100}{p} \cdot Z$$

4. Zinsen bei kleinen Laufzeiten

24 000 € werden zu einem Zinssatz von 12% aufgenommen.	<p>A. Dreisatzverfahren</p> <p>1. Jahreszins</p> $24\ 000\ € \triangleq 100\%$ $240\ € / \% \triangleq 1$ $240 \cdot 12 \triangleq 12\%$ $2\ 880 = 12\%$	<p>Sind das Kapital K und der Zinssatz p% gegeben, so kannst du daraus die Zinsen für Laufzeiten von unter einem Jahr berechnen. Gehe so vor:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Berechne die Jahreszinsen Z mit einem der in Aufgabe 1 beschriebenen Verfahren. 2. Beträgt die Laufzeit m Monate bzw. t Tage, dann setze Z und m bzw. t in die Formel
a) Wie viel Zinsen sind nach fünf Monaten fällig?	<p>2. Monatszins (= Prozentrechnung)</p> $2\ 880\ € \triangleq 12\ \text{Monate}$ $240\ € \triangleq 1$ $1\ 200\ € \triangleq 5\ \text{Monate}$	$Z_m = \frac{m}{12} \cdot Z \quad Z_t = \frac{t}{360} \cdot Z$ <p>ein und berechne. Du erhältst die Zinsen, die nach m Monaten bzw. t Tagen fällig werden.</p>
	<p>B. Einsetzen in die Formel</p> $K = 24\ 000\ €; \quad p = 12$ $Z = 0,12 \cdot 24\ 000\ € = 2\ 880\ €$ $m = 5; \quad Z = 2\ 880\ €$ $Z_5 = \frac{5}{12} \cdot 2\ 880\ € = 1\ 200\ €$ <p>Nach fünf Monaten sind 1200 € Zinsen zu zahlen.</p>	$Z = \frac{p}{100} \cdot K$ $Z_m = \frac{m}{12} \cdot Z$
b) Wie viel Zinsen sind nach 135 Tagen fällig?	<p>A. Dreisatzverfahren</p> <p>1. Jahreszins (wie oben)</p> <p>2. Tageszins (= Prozentrechnung)</p> $2\ 880\ € \triangleq 360\ \text{Tage}$ $8\ € \triangleq 1$ $1\ 080\ € \triangleq 135\ \text{Tage}$	
	<p>B. Einsetzen in die Formel</p> $K = 24\ 000\ €; \quad p = 12$ $Z = 0,12 \cdot 24\ 000\ € = 2\ 880\ €$ $t = 135; \quad Z = 2\ 880\ €$ $Z_{135} = \frac{135}{360} \cdot 2\ 880\ € = 1\ 080\ €$ <p>Nach 135 Tagen sind 1080 € Zinsen zu zahlen.</p>	

5. Zinssatz bei kleinen Laufzeiten

Ein Kredit von 24000 € wird aufgenommen.

a) Nach fünf Monaten werden 1200 € Zinsen fällig. Welcher Zinssatz ist vereinbart?

A. Dreisatzverfahren

1. Jahreszins (= Prozentrechnung)

$$1\,200\text{ €} \triangleq 5\text{ Monate}$$

$$240\text{ €} \triangleq 1$$

$$2\,880\text{ €} \triangleq 12\text{ Monate}$$

2. Jahreszinssatz

$$24\,000\text{ €} \triangleq 100\%$$

$$1\text{ €} \triangleq \frac{100}{24\,000} \text{ %/€} = \frac{1}{240} \text{ %/€}$$

$$2\,880\text{ €} \triangleq 2\,880 \cdot \frac{1}{240} \text{ %} = 12\%$$

B. Einsetzen in die Formel

$$Z_s = 1\,200\text{ €}$$

$$Z = \frac{12}{5} \cdot 1\,200\text{ €} = 2\,880\text{ €}$$

$$K = 24\,000\text{ €}; Z = 2\,880\text{ €}$$

$$p = 100\% \cdot \frac{2\,880\text{ €}}{24\,000\text{ €}} = 12\%$$

Der Zinssatz beträgt 12%.

b) Nach 135 Tagen werden 1080 € Zinsen fällig. Welcher Zinssatz ist vereinbart?

A. Dreisatzverfahren

1. Jahreszins (= Prozentrechnung)

$$1\,080\text{ €} \triangleq 135\text{ Tage}$$

$$8\text{ €} \triangleq 1$$

$$2\,880\text{ €} \triangleq 360\text{ Tage}$$

2. Jahreszinssatz
(wie oben)

B. Einsetzen in die Formel

$$Z_{135} = 1080\text{ €}$$

$$Z = \frac{360}{135} \cdot 1\,080\text{ €} = 2\,880\text{ €}$$

$$K = 24\,000\text{ €}; Z = 2\,880\text{ €}$$

$$p = 100\% \cdot \frac{2\,880\text{ €}}{24\,000\text{ €}} = 12\%$$

Der Zinssatz beträgt 12%.

Sind das Kapital K und die Zinsen für Laufzeiten von unter einem Jahr gegeben, so kannst du daraus den Zinssatz p% berechnen. Gehe so vor:

1. Berechne die Jahreszinsen Z. Sind die Zinsen Z_m für m Monate bzw. Z_t für t Tage bekannt, dann setze Z_m und m bzw. Z_t und t in die Formel

$$Z = \frac{12}{m} \cdot Z_m \quad Z = \frac{360}{t} \cdot Z_t$$

ein und berechne.

2. Berechne den Zinssatz p% mit einem der in Aufgabe 2 beschriebenen Verfahren.

$$Z = \frac{12}{m} \cdot Z_m$$

$$p = 100 \cdot \frac{Z}{K}$$

6. Kapital bei kleinen Laufzeiten

Ein Kredit wird zu einem Zinssatz von 12% aufgenommen.

Sind der Zinssatz $p\%$ und die Zinsen für Laufzeiten von unter einem Jahr gegeben, so kannst du daraus das Kapital K berechnen. Gehe so vor:

1. Berechne die Jahreszinsen Z .
Wie das geht, erfährst du in Aufgabe 5 unter 1.
2. Berechne das Kapital K mit einem der in Aufgabe 3 beschriebenen Verfahren.

a) Nach fünf Monaten werden 1200 € Zinsen fällig.
Wie hoch ist der Kredit?

A. Dreisatzverfahren

1. Jahreszins (= Prozentrechnung)

$$1\,200\text{ €} \triangleq 5\text{ Monate}$$

$$240\text{ €} \triangleq 1$$

$$2\,880\text{ €} \triangleq 12\text{ Monate}$$

2. Kapital

$$2\,880\text{ €} \triangleq 12\%$$

$$240\text{ €/}\% \triangleq 1$$

$$24\,000\text{ €} \triangleq 100\%$$

B: Einsetzen in die Formel

$$Z_5 = \frac{1\,200}{5} \text{ €}$$

$$Z = \frac{1}{5} \cdot 1\,200 \text{ €} = 2\,880 \text{ €}$$

$$Z = \frac{2\,880}{100} \text{ €}; \quad p = 12$$

$$K = \frac{100}{12} \cdot 2\,880 \text{ €} = 24\,000 \text{ €}$$

Der Kredit beträgt 24 000 €.

$$Z = \frac{12}{m} \cdot Z_m$$

$$K = \frac{100}{p} \cdot Z$$

b) Nach 135 Tagen werden 1080 € Zinsen fällig.
Wie hoch ist der Kredit?

A. Dreisatzverfahren

1. Jahreszins (= Prozentrechnung)

$$1\,080\text{ €} \triangleq 135\text{ Tage}$$

$$8\text{ €} \triangleq 1$$

$$2\,880\text{ €} \triangleq 360\text{ Tage}$$

2. Jahreszinssatz
(wie oben)

B: Einsetzen in die Formel

$$Z_{135} = \frac{1\,080}{135} \text{ €}$$

$$Z = \frac{1}{135} \cdot 1\,080 \text{ €} = 2\,880 \text{ €}$$

$$Z = \frac{2\,880}{100} \text{ €}; \quad p = 12$$

$$K = \frac{100}{12} \cdot 2\,880 \text{ €} = 24\,000 \text{ €}$$

Der Kredit beträgt 24 000 €.

7. Bestimmung kleiner Laufzeiten

24 000 € werden zu einem
Zinssatz von 12%
aufgenommen.

a) Nach wie viel Monaten werden
1200 € Zinsen fällig?

A. Dreisatzverfahren

1. Jahreszins

$$24\,000\text{ €} \triangleq 100\%$$

$$1\text{ €} \triangleq \frac{100}{24\,000} \text{ %/€} = \frac{1}{240} \text{ %/€}$$

$$2\,880\text{ €} \triangleq 2\,880 \cdot \frac{1}{240} \text{ %} = 12\%$$

2. Monatszins (= Prozentrechnung)

$$2\,880\text{ €} \triangleq 12\text{ Monate}$$

$$1\text{ €} \triangleq \frac{12}{2\,880} \text{ Monate / €} = \frac{1}{240} \text{ Monate / €}$$

$$1\,200\text{ €} \triangleq \frac{1\,200}{240} \text{ Monate} = 5\text{ Monate}$$

B: Einsetzen in die Formel

$$K = 24\,000\text{ €}; \quad p = 12$$

$$Z = 0,12 \cdot 24\,000\text{ €} = 2\,880\text{ €}$$

$$Z_m = 1\,200\text{ €}; \quad Z = 2\,880\text{ €}$$

$$m = \frac{12 \cdot 1\,200}{2\,880} = 5$$

Nach fünf Monaten werden
1 200 € Zinsen fällig.

b) Nach wie viel Tagen werden
1 080 € Zinsen fällig?

A. Dreisatzverfahren

1. Jahreszins
(wie oben)

2. Tageszins (= Prozentrechnung)

$$2\,880\text{ €} \triangleq 360\text{ Tage}$$

$$1 \triangleq \frac{360}{2\,880} \text{ Tage/€} = 8\text{ Tage/€}$$

$$1\,080\text{ €} \triangleq 135\text{ Tage}$$

Nach 135 Tagen werden
1 080 € Zinsen fällig.

B: Einsetzen in die Formel

$$K = 24\,000\text{ €}; \quad p = 12$$

$$Z = 0,12 \cdot 24\,000\text{ €} = 2\,880\text{ €}$$

$$Z_t = 1\,080\text{ €}; \quad Z = 2\,880\text{ €}$$

$$t = \frac{360 \cdot 1\,080}{2\,880} = 135$$

Nach 135 Tagen werden 1080 €
Zinsen fällig.

Sind das Kapital K, der Zinssatz p% und die Zinsen für eine Laufzeit von unter einem Jahr gegeben, so kannst du daraus die Laufzeit in Monaten (m) oder Tagen (t) berechnen. Gehe so vor:

1. Berechne die Jahreszinsen Z mit einem der in Aufgabe 1 beschriebenen Verfahren.

2. Kennst du die Zinsen Z_m für m Monate bzw. Z_t für t Tage, dann setze Z und Z_m bzw. Z_t in die Formel

$$m = 12 \cdot \frac{Z_m}{Z} \quad t = 360 \cdot \frac{Z_t}{Z}$$

ein und berechne. Mit m erhältst du die Laufzeit in Monaten, mit t die Laufzeit in Tagen.

8. Bestimmung Zinsfaktor

Welche Zinsfaktoren gehören zu den folgenden Zinssätzen?

- a) 20%
b) 12%
c) 7%
d) 3,5%
e) 2,25%

$$\begin{aligned} & \frac{20}{100} \\ \text{a) } & 1 + \frac{20}{100} = 1 + 0,2 = 1,2 \\ \text{b) } & 1 + \frac{100}{7} = 1 + 0,12 = 1,12 \\ \text{c) } & 1 + \frac{100}{3,5} = 1 + 0,07 = 1,07 \\ \text{d) } & 1 + \frac{100}{2,25} = 1 + 0,035 = 1,035 \\ \text{e) } & 1 + \frac{100}{1,05} = 1 + 0,0225 = 1,0225 \\ \text{f) } & 1 + \frac{100}{100} = 1 + 0,0105 = 1,0105 \end{aligned}$$

Kennst du den Zinssatz $p\%$ und sollst du den Zinsfaktor ermitteln, dann gehe so vor:

- Bilde die Summe $1 + \frac{p}{100}$.
- Schreibe die Summe als Dezimalzahl, denn normalerweise wird der Zinsfaktor in Dezimalschreibweise angegeben.

9. Endkapital nach einem Jahr

Ein Kapital K wird ein Jahr für $p\%$ angelegt. Auf welchen Betrag ist es nach diesem Jahr angewachsen?

- a) $K = 15\,000\text{ €}$; $p = 17\%$
b) $K = 8\,500\text{ €}$; $p = 8\%$
c) $K = 5\,600\text{ €}$; $p = 4,5\%$
d) $K = 4\,000\text{ €}$; $p = 2,75\%$

$$\begin{aligned} \text{a) } & K = 15\,000\text{ €}; \quad q = 1,17 \\ & K_1 = 1,17 \cdot 15\,000\text{ €} \\ & \quad = 17\,550\text{ €} \\ \text{b) } & K = 8\,500\text{ €}; \quad q = 1,08 \\ & K_1 = 1,08 \cdot 8\,500\text{ €} \\ & \quad = 9\,180\text{ €} \\ \text{c) } & K = 5\,600\text{ €}; \quad q = 1,045 \\ & K_1 = 1,045 \cdot 5\,600\text{ €} \\ & \quad = 5\,852\text{ €} \\ \text{e) } & K = 4\,000\text{ €}; \quad q = 1,0275 \\ & K_1 = 1,0275 \cdot 4\,000\text{ €} \\ & \quad = 4\,110\text{ €} \end{aligned}$$

Sind das Anfangskapital K und der Zinssatz $p\%$ gegeben, so kannst du daraus das Endkapital K_n berechnen, auf das K nach einem Jahr angewachsen ist. Gehe so vor:

- Berechne den Zinsfaktor q (siehe Aufgabe 8).
- Multipliziere den Zinsfaktor q mit dem Anfangskapital K . Du erhältst das Endkapital K_1 .

10. Endkapital nach mehreren Jahren

Ein Kapital wird über mehrere Jahre zu einem festen Zinssatz angelegt. Auf welchen Betrag ist es nach dieser Zeit mit Zinsen und Zinseszinsen angewachsen?

- a) 16000 DM zu 5% auf 4 Jahre
b) 20000 DM zu 10% auf 6 Jahre

a) 1. Lösung:
 $K = 16\,000\text{ €}; \quad q = 1,05; \quad n = 4$
 $K_1 = 1,05 \cdot 16\,000\text{ €} = 16\,800\text{ €}$
 $K_2 = 1,05 \cdot 16\,800\text{ €} = 17\,640\text{ €}$
 $K_3 = 1,05 \cdot 17\,640\text{ €} = 18\,522\text{ €}$
 $K_4 = 1,05 \cdot 18\,522\text{ €}$
 $\quad = 19\,448,10\text{ €}$

2. Lösung:
 $K = 16\,000\text{ €}; \quad q = 1,05; \quad n = 4$
 $K_4 = 1,05^4 \cdot 16\,000\text{ €}$
 $\quad = 19\,448,10\text{ €}$
 Das Endkapital nach 4 Jahren beträgt 19448,10 €.

b) 1. Lösung:
 $K = 20\,000\text{ €}; \quad q = 1,1; \quad n = 6$
 $K_1 = 1,1 \cdot 20\,000\text{ €} = 22\,000\text{ €}$
 $K_2 = 1,1 \cdot 22\,000\text{ €} = 24\,200\text{ €}$
 $K_3 = 1,1 \cdot 24\,200\text{ €} = 26\,620\text{ €}$
 $K_4 = 1,1 \cdot 26\,620\text{ €} = 29\,282\text{ €}$
 $K_5 = 1,1 \cdot 29\,282\text{ €} = 32\,210,20\text{ €}$
 $K_6 = 1,1 \cdot 32\,210,20\text{ €}$
 $\quad = 35\,431,22\text{ €}$

2. Lösung:
 $K = 20\,000\text{ €}; \quad q = 1,1; \quad n = 6$
 $K_6 = 1,1^6 \cdot 20\,000\text{ €}$
 $\quad = 35\,431,22\text{ €}$
 Das Endkapital nach 6 Jahren beträgt 35431,22 €.

Sind das Anfangskapital K und der Zinssatz $p\%$ gegeben, so kannst du daraus das Endkapital K_n berechnen, auf das das Anfangskapital K nach n Jahren angewachsen ist. Wir zeigen dir dazu zwei Lösungsmöglichkeiten:

- Lösung
 - Berechne den Zinsfaktor q (siehe Aufgabe 8).
 - Berechne K_1 : $K_1 = q \cdot K$
 - Berechne K_2 : $K_2 = q \cdot K_1$
 - Berechne K_3 : $K_3 = q \cdot K_2$
 - Verfahre entsprechend weiter, bis du zu K_n kommst. $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$ ist das Endkapital nach 1, 2, 3, ..., n Jahren.

- Lösung
 - Berechne den Zinsfaktor q (siehe Aufgabe 9).
 - Setze K , q und n in die Formel

$$K^n = q^n \cdot K$$
 ein und berechne.

11. Rechenschema für gemischte Zinsrechnung

Eine häufige Aufgabenstellung ist das mehrjährige Anlegen von Kapital, wobei für einige Jahre der Zinssatz angegeben ist, für andere Jahre der Zinsbetrag oder das Endkapital. Es sollen die Zinsen, die Zinssätze oder das Anfangskapital berechnet werden. Es ist einleuchtend, dass für jedes Jahr andere Rechnungen notwendig sind.

n	Anfangskapital K_{n-1}	Zinssatz p	Zinsfaktor q	Zinsen Z	Endkapital K_n
1					
2					
3					

2005: Aufgabe P 7

Ulrike legt bei ihrer Bank einen Betrag von 8 000,00 € für drei Jahre an. Zinsen werden mitverzinst.

- Bis zum Ende der drei Jahre wächst ihr Guthaben um insgesamt 8,73 % an.
- Im ersten Jahr beträgt der Zinssatz 2,0 %.
- Im zweiten Jahr werden 204,00 € Zinsen gutgeschrieben.

Wie hoch ist der Zinssatz im dritten Jahr?

Zunächst werden alle gegebenen Werte in die Tabelle eingetragen

n	Anfangskapital K_{n-1}	Zinssatz p	Zinsfaktor q	Zinsen Z	Endkapital K_n
1	8 000,00 €	2,0 %		160,00€	8 160,00 € (2)
2	8160,00€ (3)	2,5 % (4)		204,00 €	8364,00€ (5)
3	8364,00€ (6)	3,99% (8)		334,40€ (7)	8,73 % = 8698,40€ (1)

- (1) Der Endbetrag kann berechnet werden
- (2) Die Zinsen und der Endbetrag des 1. Jahres kann berechnet werden.
- (3) Der Endbetrag des 1. Jahrs ist der Anfangsbetrag des 2. Jahres
- (4) Der Zinssatz des 2. Jahres kann berechnet werden.
- (5) Der Endbetrag des 2. Jahres kann berechnet werden
- (6) Der Endbetrag des 2. Jahres ist der Anfangsbetrag des 3. Jahres
- (7) Die Zinsen des 3. Jahres können berechnet werden.
- (8) Der Zinssatz des 3. Jahres kann berechnet werden

12. Rechenschema bei Ratenzahlungen

Bei Ratenzahlungen wird das Rechenschema in eine Spalte „Rate“ erweitert, die man geschickterweise zwischen Anfangskapital und Zinssatz einfügt.

n	Anfangskapital K_{n-1}	Rate R	Zinssatz p	Zinsfaktor q	Zinsen Z	Endkapital K_n
1						
2						
3						

2006 Aufgabe P 7

Markus zahlt dreimal hintereinander jeweils zu Jahresanfang 1 500,00 € auf ein Konto ein. Die Zinsbedingungen sind:

- Zinssatz 2,25 %
- Zinsen werden mitverzinst

- a) Wie hoch ist das Guthaben von Markus am Ende der drei Jahre?
- b) Bettina möchte dieses Guthaben bei gleichen Zinsbedingungen bereits nach zwei Jahren erreichen. Welche gleiche Rate muss sie jeweils zu Jahresanfang einzahlen?

a) Zunächst werden alle gegebenen Werte in die Tabelle eingetragen

n	Anfangskapital K_{n-1}	Rate R	Zinssatz p	Zinsfaktor q	Zinsen Z	Endkapital K_n
1		1 500,00	2,25 %	1,0225 (1)		1533,75€ (1)
2	1533,75€ (2)	1 500,00	2,25 %	1,0225 (1)		3033,75€ (3)
3	3033,75€ (4)	1 500,00	2,25 %	1,0225 (1)		4705,55 € (5)

- (1) Die Zinsfaktoren und der Endbetrag des 1. Jahres kann berechnet werden.
 (2) Der Endbetrag des 1. Jahres ist der Anfangsbetrag des 2. Jahres.
 (3) Mit dem Anfangsbetrag und der Rate im 2. Jahr kann der Endbetrag des 2. Jahres berechnet werden.
 (4) Der Endbetrag des 2. Jahres ist der Anfangsbetrag des 3. Jahres
 (5) Mit dem Anfangsbetrag und der Rate im 3. Jahr kann der Endbetrag des 3. Jahres berechnet werden.

b) Die jährliche Rate ist auch gleichzeitig das Anfangskapital, das einzuzahlen ist. Damit ist weder die Rate noch das Anfangskapital bekannt. Zinsbedingungen sollen gleich bleiben und das Endkapital ist festgelegt.

n	Anfangskapital K_{n-1}	Rate R	Zinssatz p	Zinsfaktor q	Zinsen Z	Endkapital K_n
1		x	2,25 %	1,0225		1,0225 x (1)
2	1,0225 x (1)	x	2,25 %	1,0225		4705,55 €
3						

(1) Endkapital im 1. Jahr ist Anfangskapital mal Zinsfaktor. Das ist auch das Anfangskapital im 2. Jahr

$$(2) \text{ Endkapital im 2. Jahr} = (\text{Anfangskapital im 2. Jahr} + \text{Rate}) \cdot \text{Zinsfaktor}$$

$$4705,55 = (1,0225 x + x) \cdot 1,0225 = 2,0225 x \cdot 1,0225$$

$$4705,55 = 2,068 x$$

$$2275,41 \text{ €} = x$$

13. Rechenschema bei Darlehenszahlungen

Das Thema Darlehen geistert immer wieder durch die Realschulprüfungen. Bisher wurde noch keine Darlehensaufgabe in der Prüfung gestellt. Die Darlehensberechnung ähnelt sehr der Ratenzahlung, aber mit einigen Zusätzen.

Grundsätzlich geht man bei einer Darlehensrückzahlung von folgenden Bedingungen aus:

1. Die jährliche Rückzahlungsrate ist konstant
2. Von der Rate werden zunächst die Zinsen für den noch bestehenden Darlehensbetrag abgezogen
3. Der Restbetrag dient die Tilgung der vorhandenen Restschuld.

Auch eine solche Aufgabe lässt sich mit dem Rechenschema bewältigen, es ist eine weitere Spalte „Tilgung“ einzufügen.

n	Anfangskapital K_{n-1}	Rate R	Zinssatz p	Zinsfaktor q	Zinsen Z	Tilgung T	Endkapital K_n
1							
2							
3							

Ein Kredit in Höhe von 120 000€ soll in 6 Jahren zurückgezahlt werden.
Die Annuitätentilgung beträgt 26750,37€ und der Zinssatz liegt bei 9%

Jahr	Restschuld (zu Beginn des Jahres)	Rate konstant	Zinssatz	Zinsen für Restschuld	Tilgung Rate – Zinsen	Restschuld (am Ende des Jahres) Restschuld – Tilgung
1	120000,00	26750,37	0,04	10800,00	15950,37	104049,63
2	104049,63	26750,37	0,04	9364,47	17385,91	86663,72
3	86663,72	26750,37	0,04	7799,73	18950,64	67713,08
4	67713,08	26750,37	0,04	6094,18	20656,20	47056,88
5	47056,88	26750,37	0,04	4235,12	22515,25	24541,63
6	24541,63	26750,37	0,04	2208,75	24541,63	0

Annuität ist ein Begriff aus dem Bankensektor und entspricht der Rückzahlungsrate.

Rechnung für das 1. Jahr:

Zuerst müssen die Zinsen beglichen werden:

$$120\,000,00 \cdot 9\% \text{ Zinsen} = 10\,800,00$$

Von dem Rückzahlungsbetrag werden die Zinsen abgezogen:

$$26\,750,37 - 10\,800,00 = 15\,950,37$$

Der verbleibende Betrag ist die Rückzahlung mit der sich die zukünftige Schuld verringert.

$$120\,000,00 - 15\,950,37 = 104\,049,63$$

Rechnung für das 2. Jahr:

Zuerst müssen die Zinsen beglichen werden:

$$104\,049,63 \cdot 9\% \text{ Zinsen} = 9\,364,47$$

usw.