

Bruchterme		Seite 1
Aufgabe	Lösung	Erläuterung
Bruchterme	<p>Der Quotient von Termen wird meistens als Bruch geschrieben, z. B.: <math>(x - 1):(5 - 3x) = \frac{x - 1}{5 - 3x}</math>  <b>Als Brüche geschriebene Quotienten von Termen heißen „Bruchterme“.</b></p> <p>Kommen Variablen im Nenner vor, so kann es bei bestimmten Einsetzungen passieren, dass der Nenner null wird. Da die Division durch null aber nicht definiert ist, muss dies unbedingt ausgeschlossen werden. Zum Beispiel darfst du in den Term ❶ nicht die 3 einsetzen, sonst aber alle rationalen Zahlen.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <math display="block">\frac{7}{3 - x}</math>           Term ❶         </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <math display="block">\frac{14x}{6x - 2x^2}</math>           Term ❷         </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <math display="block">\frac{6y}{x(y - 1)}</math>           Term ❸         </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <math display="block">\frac{y - 1}{3x^2}</math>           Term ❹         </div> </div> <p>Bei Bruchtermen mit einer Variablen(z.B. die Terme ❶ und ❷) bilden alle erlaubten Einsetzungen zusammen eine Teilmenge der Menge <math>\mathbb{Q}</math> der rationalen Zahlen:</p>	
Definitionsmenge	<p><b>Die Definitionsmenge D eines Bruchterms ist die Menge aller Zahlen, für die der Nenner nicht null wird.</b></p> <p>Für die Definitionsmenge D von Term ❶ gilt: <math>D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}</math>; gelesen „Q ohne 3“</p>	
Erweitern Kürzen	<p>Multiplizierst du Zähler und Nenner von Term ❶ mit <math>2x</math>, so erhältst du Term ❷. Du hast Term ❶ mit <math>2x</math> „erweitert“. Dividierst du Zähler und Nenner von Term ❷ durch <math>2x</math>, so erhältst du Term ❶. Du hast Term ❷ durch <math>2x</math> „gekürzt“.</p> <p><b>Einen Bruchterm kannst du erweitern, indem du Zähler und Nenner mit demselben Term multiplizierst. Einen Bruchterm kannst du kürzen, indem du Zähler und Nenner durch den selben Term dividierst.</b></p>	
Gleichwertigkeit von Bruchtermen	<p>Term ❶ ist durch Kürzen aus Term ❷ hervorgegangen. Umgekehrt ist Term ❷ durch Erweitern aus Term ❶ hervorgegangen. Term ❶ hat die Definitionsmenge <math>D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}</math>, Term ❷ hat die Definitionsmenge <math>D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 3\}</math>.          Setzt du irgendeine von 0 und von 3 verschiedene Zahl in Term ❶ und in Term ❷ ein, so ergibt sich immer dieselbe Zahl. Auf ihrer gemeinsamen Definitionsmenge <math>D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 3\}</math> sind die beiden Terme „gleichwertig“.</p> <p><b>Durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgegangene Bruchterme sind auf ihrer gemeinsamen Definitionsmenge gleichwertig.</b></p> <p>Zwischen zwei gleichwertige Bruchterme kannst du das Gleichheitszeichen setzen, wenn du dabei die für die Einsetzung einschränkenden Bedingungen angibst, z. B. <math>\frac{7}{3 - x} = \frac{14x}{6x - 2x^2}</math>          (für <math>x \neq 0</math>; <math>x \neq 3</math>)</p>	
Gemeinsamer Nenner Hauptnenner	<p>Term ❸ und Term ❹ kannst du nicht direkt addieren oder subtrahieren, da sie verschiedene Nenner haben. Erweiterst du aber Term ❸ mit „<math>3x</math>“ und Term ❹ mit „<math>y - 1</math>“, so haben die erweiterten Terme denselben Nenner, nämlich „<math>3x^2(y - 1)</math>“. Das ist der Hauptnenner von Term ❸ und Term ❹.</p> <p><b>Multiplizierst du alle Faktoren des einen Nenners mit allen Faktoren des anderen Nenners, so erhältst du einen „gemeinsamen Nenner“ der beiden Bruchterme. Sind dabei beide Nenner so weit wie möglich faktorisiert und berücksichtigt die Faktoren, die in beiden Nennern vorkommen, nur einmal, so erhältst du den „Hauptnenner“. Bei Potenzen mit gleicher Basis ist dabei diejenige mit dem größten Exponenten zu berücksichtigen.</b></p> <p>Sind die Terme ❸ und ❹ auf ihren Hauptnenner erweitert, so kannst du sie addieren:</p> $\frac{6y}{x(y-1)} + \frac{y-1}{3x^2} = \frac{6y \cdot 3x}{x(y-1) \cdot 3x} + \frac{(y-1) \cdot (y-1)}{3x^2(y-1)} = \frac{18xy}{3x^2(y-1)} + \frac{(y-1)^2}{3x^2(y-1)} = \frac{18xy + (y-1)^2}{3x^2(y-1)} \quad (\text{für } x \neq 0; y \neq 1)$	
Addieren Subtrahieren	<p><b>Bruchterme mit gleichen Nennern kannst du addieren oder subtrahieren, indem du die Zähler addierst oder subtrahierst und den Nenner beibehältst. Bruchterme mit verschiedenen Nennern werden vorher auf ihren Hauptnenner erweitert.</b></p> <p>Beim Multiplizieren und Dividieren von Bruchtermen kannst du genauso vorgehen wie bei Brüchen. Wichtig dabei ist, so früh wie möglich zu kürzen und zum Schluss alle für die Einsetzungen einschränkenden Bedingungen anzugeben. Für das Produkt von Term ❸ und ❹ gilt demnach:</p> $\frac{6y}{x(y-1)} \cdot \frac{y-1}{3x^2} = \frac{6y \cdot (y-1)}{x(y-1) \cdot 3x^2} = \frac{6y}{x^3} \quad (\text{für } x \neq 0; y \neq 1)$	
Multiplizieren Dividieren	<p><b>Bruchterme kannst du multiplizieren, indem du Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizierst. Durch einen Bruchterm kannst du dividieren, indem du mit seinem Kehrtterm multiplizierst. Den Kehrtterm erhältst du durch Vertauschen von Zähler und Nenner.</b></p>	

## 1. Ausklammern / Faktorisieren

## 1.1. Klammere den gemeinsamen Faktor aus

- a)  $16x + 8$
- b)  $15y - 27y^2$
- c)  $-4pq - 15p^2$
- d)  $14x^3y^2 + 18xy^3$
- a) auszuklammern: 8  
 $16x + 8$   
 $= 8 \cdot 2x + 8 \cdot 1$   
 $= 8(2x + 1)$
- b) auszuklammern: 3y  
 $15y - 27y^2$   
 $= 3y \cdot 5 - 3y \cdot 9y$   
 $= 3y(5 - 9y)$
- c) auszuklammern: -p  
 $-4pq - 15p^2$   
 $= -p \cdot 4q - p \cdot 15p$   
 $= -p(4q + 15p)$
- d) auszuklammern:  $2xy^2$   
 $14x^3y^2 + 18xy^3$   
 $= 2xy^2 \cdot 7x^2 + 2xy^2 \cdot 9y$   
 $= 2xy^2(7x^2 + 9y)$

Ausklammern/Faktorisieren

Ausklammern oder Faktorisieren bedeutet, eine Summe als Produkt zu schreiben. Gehe so vor:

- Bestimme bei ganzzahligen Koeffizienten ihren größten gemeinsamen Teiler (ggT) und multipliziere diesen mit den Variablen, die in jedem der Summanden vorkommen. Du erhältst den auszuklammerten Term T.
- Schreibe jeden Summanden als Produkt, dessen erster Faktor T ist. Multipliziere T mit der Summe der übrig bleibenden Teilprodukte. Wende also das Distributivgesetz an.

## 1.2. Faktorisieren mit Hilfe Binomischer Formeln

- a)  $x^2 + 10x + 25$
- b)  $9x^2 + 12xy + 4y^2$
- c)  $16x^2 - 8x + 1$
- d)  $9a^2 - 30ab + 25b^2$
- e)  $4x^2 - 49$
- f)  $81p^2 - 16q^2$
- g)  $\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{16}$
- h)  $x^6y^2 - 1$
- a)  $x^2 + 10x + 25$   
 $= x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2$   
 $= (x + 5)^2$
- b)  $9x^2 + 12xy + 4y^2$   
 $= (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2$   
 $= (3x + 2y)^2$
- c)  $16x^2 - 8x + 1$   
 $= (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 1 + 1^2$   
 $= (4x - 1)^2$
- d)  $9a^2 - 30ab + 25b^2$   
 $= (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 5b + (5b)^2$   
 $= (3a - 5b)^2$
- e)  $4x^2 - 49$   
 $= (2x)^2 - 7^2$   
 $= (2x + 7)(2x - 7)$
- f)  $81p^2 - 16q^2$   
 $= (9p)^2 - (4q)^2$   
 $= (9p + 4q)(9p - 4q)$
- g)  $\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{16}$   
 $= \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$   
 $= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}\right)$
- h)  $x^6y^2 - 1$   
 $= (x^3y)^2 - 1^2$   
 $= (x^3y + 1)(x^3y - 1)$

Einen Term kannst du nur dann mit Hilfe einer binomischen Formel faktorisieren, wenn eine der beiden folgenden Voraussetzungen zutrifft:

## 1. Voraussetzung:

Der Term ist eine Summe mit drei Summanden, wobei zwei Summanden als Quadrate ( $a^2$  und  $b^2$ ) und der dritte Summand in der Form  $2ab$  oder  $-2ab$  geschrieben werden können.

## 2. Voraussetzung:

Der Term ist eine Differenz, bei der sowohl Minuend als auch Subtrahend als Quadrate geschrieben werden können.

\* Trifft auf den Term die 1. Voraussetzung zu, dann schreibe die Summe als Quadrat. Wende dabei die erste oder zweite binomische Formel an (Aufgaben a bis d).

\* Trifft auf den Term die 2. Voraussetzung zu, dann schreibe die Differenz als Produkt. Wende dabei die dritte binomische Formel an (Aufgaben e bis h).

## 1. binomische Formel:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

## 2. binomische Formel:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

## 3. binomische Formel:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

## 2. Bestimmen der Definitionsmenge

## 2.1. Bruchterme mit einer Variablen

a)  $\frac{4}{x+3}$

a)  $x+3=0$   
 $\leftrightarrow x=-3$   
 $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$

b)  $\frac{x+2}{x(7-x)}$

b)  $x(7-x)=0$   
 $\leftrightarrow x=0$  oder  $7-x=0$   
 $\leftrightarrow x=0$  oder  $x=7$   
 $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 7\}$

c)  $\frac{5x}{(x-2)(3x+2)}$

c)  $(x-2)(3x+2)=0$   
 $\leftrightarrow x-2=0$  oder  $3x+2=0$   
 $\leftrightarrow x=2$  oder  $x=-\frac{2}{3}$   
 $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{2}{3}; 2\}$

d)  $\frac{2-x^2}{x^3+2x^2}$

d)  $x^3+2x^2=0$   
 $\leftrightarrow x^2(x+2)=0$   
 $\leftrightarrow x^2=0$  oder  $x+2=0$   
 $\leftrightarrow x=0$  oder  $x=-2$   
 $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 0\}$

e)  $\frac{2x+3}{x^2+2x+1}$

e)  $x^3+2x+1=0$   
 $\leftrightarrow (x+1)^2=0$   
 $\leftrightarrow x+1=0$   
 $\leftrightarrow x=-1$   
 $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

f)  $\frac{3x^2}{x^2-1}$

f)  $x^2-1=0$   
 $\leftrightarrow (x+1)(x-1)=0$   
 $\leftrightarrow x+1=0$  oder  $x-1=0$   
 $\leftrightarrow x=-1$  oder  $x=1$   
 $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$

g)  $\frac{17}{(x-1)(x^2-4)}$

g)  $(x-1)(x^2-4)=0$   
 $\leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-2)=0$   
 $\leftrightarrow x-1=0$  oder  $x+2=0$   
oder  $x-2=0$   
 $\leftrightarrow x=1$  oder  $x=-2$   
oder  $x=2$   
 $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 1; 2\}$

Sollst du die Definitionsmenge eines Bruchterms bestimmen, dann gehe so vor:

1. Setze den Nenner gleich null und löse nach der Variablen auf. Dabei ist es zweckmäßig, den Nenner so weit wie möglich zu faktorisieren, denn es gilt:

Ein Produkt ist genau dann null, wenn ein Faktor null ist.

Beim Faktorisieren können dir oft die binomischen Formeln helfen (Aufgaben e bis g).

2. Sind z.B. die Zahlen a und b die einzigen Lösungen der Gleichung von 1., dann besteht die Definitionsmenge D aus allen rationalen Zahlen außer a und b. Notiere so:

$D = \mathbb{Q} \setminus \{a; b\}$ ; gelesen „D ist gleich Q ohne a und b“.

Merke:

\*\* Die Definitionsmenge eines Bruchterms besteht aus allen Zahlen, die du in den Bruchterm einsetzen darfst.

\*\* Die Definitionsmenge eines Bruchterms besteht aus allen rationalen Zahlen außer denen, für die der Nenner null wird.

## 2.2. Bruchterme mit mehreren Variablen

a)  $\frac{x+y}{2x-5y}$

a)  $2x-5y=0$   
 $\leftrightarrow 2x=5y$   
 $\leftrightarrow x=2,5y$   
Bedingung:  $x \neq 2,5y$

b)  $\frac{xy}{(x-1)(y-3)}$

b)  $(x-1)(y-3)=0$   
 $\leftrightarrow x-1=0$  oder  $y-3=0$   
 $\leftrightarrow x=1$  oder  $y=3$   
Bedingungen:  $x \neq 1$  und  $y \neq 3$

c)  $\frac{7x-5y}{2x^2-8xy}$

c)  $2x^2-8xy=0$   
 $\leftrightarrow 2x(x-4y)=0$   
 $\leftrightarrow 2x=0$  oder  $x-4y=0$   
 $\leftrightarrow x=0$  oder  $x=4y$   
Bedingungen:  $x \neq 0$  und  $x \neq 4y$

d)  $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

d)  $x^2-y^2=0$   
 $\leftrightarrow (x+y)(x-y)=0$   
 $\leftrightarrow x+y=0$  oder  $x-y=0$   
 $\leftrightarrow x=-y$  oder  $x=y$   
Bedingungen:  $x \neq -y$  und  $x \neq y$

Sollst du die Definitionsbedingungen für einen Bruchterm angeben, dann bedeutet dies:

Stelle alle Bedingungen dafür zusammen, dass der Nenner nicht null wird. Gehe so vor:

1. Faktorisiere den Nenner so weit wie möglich und setze ihn gleich null. Ist der Nenner ein Produkt, dann setze also jeden Faktor gleich null.

2. Löse jede Gleichung nach einer der Variablen auf. Jede Lösung gibt eine Bedingung dafür an, dass der Nenner null wird. Schließe dies aus.

## 3. Bruchterme kürzen

## 3.1. Potenzen kürzen

a)  $\frac{x^6}{x^2}$

a)  $\frac{x^6}{x^2} = \frac{x^4}{1} = x^4$  (für  $x \neq 0$ )

b)  $\frac{(x+2)^3}{(x+2)^8}$

b)  $\frac{(x+2)^3}{(x+2)^8} = \frac{1}{(x+2)^5}$  (für  $x \neq -2$ )

c)  $\frac{(x-y)^2}{x-y}$

c)  $\frac{(x-y)^2}{x-y} = \frac{x-y}{1} = x-y$  (für  $x \neq y$ )

d)  $\frac{(a-3b)^5}{(a-3b)^6}$

d)  $\frac{(a-3b)^5}{(a-3b)^6} = \frac{1}{a-3b}$  (für  $a \neq 3b$ )

Sind Zähler und Nenner Potenzen mit gleicher Basis, dann kürze so:

1. Ersetze den größeren Exponenten durch die Differenz der beiden Exponenten.
2. Ersetze die Potenz mit dem kleineren Exponenten durch 1.
3. Gib die einschränkenden Bedingungen für die Einsetzung an.

## 3.2. Produkte kürzen

a)  $\frac{48x}{16}$

a)  $\frac{48x}{16} = 3x$

b)  $\frac{-17x}{-34y}$

b)  $\frac{-17x}{-34y} = \frac{x}{2y}$  (für  $y \neq 0$ )

c)  $\frac{-5xy}{3y}$

c)  $\frac{-5xy}{3y} = -\frac{5x}{3} = -\frac{5}{3}x$  (für  $y \neq 0$ )

d)  $\frac{25abc}{-10acd}$

d)  $\frac{25abc}{-10acd} = \frac{5b}{2d}$  (für  $a, c, d \neq 0$ )

e)  $\frac{3x^2y^2}{6xy^3}$

e)  $\frac{3x^2y^2}{6xy^3} = \frac{x}{2y}$  (für  $x \neq 0$  und  $y \neq 0$ )

f)  $\frac{x^2(x+1)}{(x+1)^2(y-1)}$

f)  $\frac{x^2(x+1)}{(x+1)^2(y-1)} = \frac{x^2}{(x+1)(y-1)}$   
(für  $x \neq -1$  und  $y \neq 1$ )

Sind Zähler und Nenner Produkte und besitzen sie gemeinsame Faktoren, dann kannst du so kürzen:

1. Kürze die Zahlenfaktoren. Ergibt sich eine negative Zahl, dann schreibe das Minuszeichen vor den Bruchterm.
2. Streiche die gemeinsamen Faktoren von Zähler und Nenner.
3. Treten als Faktoren Potenzen mit gleicher Basis auf, dann kürze nach Aufgabe 5.
4. Gib zum Schluss die einschränkenden Bedingungen für die Einsetzung an.

## 3.3. Summen faktorisieren und dann kürzen

a)  $\frac{xy+7y}{y}$

a)  $\frac{xy+7y}{y} = \frac{y(x+7)}{y} = x+7$  (für  $y \neq 0$ )

b)  $\frac{8a-12b}{18a-27b}$

b)  $\frac{8a-12b}{18a-27b} = \frac{4(2a-3b)}{9(2a-3b)} = \frac{4}{9}$   
(für  $a \neq \frac{3}{2}b$ )

c)  $\frac{8x^3y+10x^2y^3}{4x+5y^2}$

c)  $\frac{8x^3y+10x^2y^3}{4x+5y^2} = \frac{2x^2y(4x+5y^2)}{4x+5y^2}$   
 $= 2x^2y$  (für  $x \neq \frac{5}{4}y^2$ )

d)  $\frac{x-1}{1-x}$

d)  $\frac{x-1}{1-x} = \frac{x-1}{-(x-1)} = -1$  (für  $x \neq 1$ )

e)  $\frac{p^3-p^2q}{pq-p^2}$

e)  $\frac{p^3-p^2q}{pq-p^2} = \frac{p^2(p-q)}{p(q-p)} = \frac{p^2(p-q)}{-p(p-q)}$   
 $= -p$  (für  $p \neq 0$ ;  $p \neq q$ )

f)  $\frac{x+3}{x^2-9}$

f)  $\frac{x+3}{x^2-9} = \frac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$   
(für  $x \neq -3$ ;  $x \neq 3$ )

g)  $\frac{a^2+2a}{a^2-4}$

g)  $\frac{a^2+2a}{a^2-4} = \frac{a(a+2)}{(a+2)(a-2)} = \frac{a}{a-2}$   
(für  $a \neq -2$ ;  $a \neq 2$ )

h)  $\frac{3x+y}{9x^2+6xy+y^2}$

h)  $\frac{3x+y}{9x^2+6xy+y^2} = \frac{3x+y}{(3x+y)^2}$   
 $= \frac{1}{3x+y}$  (für  $y \neq -3x$ )

Sind Zähler und/oder Nenner Summen oder Differenzen, dann kannst du den Bruchterm nur dann kürzen, wenn sich Zähler und/oder Nenner so faktorisieren lassen, dass sich Produkte mit gleichen Faktoren ergeben. Gehe so vor:

1. Prüfe, ob du Zähler und Nenner so faktorisieren kannst, dass sich gleiche Faktoren ergeben. Dabei kann es zweckmäßig sein, die Zahl  $-1$  auszuklammern (Aufgaben d und e) oder eine binomische Formel anzuwenden (Aufgaben f bis h).
2. Hast du Zähler und Nenner faktorisiert, dann hast du sie in Produkte umgewandelt. Verfahre jetzt nach Aufgabe 6.

#### 4. Hauptnenner bilden

##### 4.1. Erweitere den Bruch um den angegebenen Faktor

<p>a) <math>\frac{2-x^2}{x+3}</math> mit 4</p> <p>b) <math>\frac{ab}{a+3b}</math> mit a</p> <p>c) <math>\frac{4x}{3-xy}</math> mit <math>2xy^2</math></p>	<p>a) <math>\frac{(2-x^2) \cdot 4}{(x+3) \cdot 4} = \frac{8-4x}{4x+12}</math> (für <math>x \neq -3</math>)</p> <p>b) <math>\frac{ab \cdot a}{(a+3b) \cdot a} = \frac{a^2b}{a^2+3ab}</math> (für <math>a \neq 0</math>; <math>a \neq -3b</math>)</p> <p>c) <math>\frac{4x \cdot 2xy^2}{(3-xy) \cdot 2xy^2} = \frac{8x^2y^2}{6xy^2-2x^2y^3}</math> (für <math>x \neq \frac{3}{y}</math>; <math>x \neq 0</math>; <math>y \neq 0</math>)</p>	
---	--	--

Sollst du einen Bruchterm mit einem Term T erweitern, dann gehe so vor:

1. Multipliziere Zähler und Nenner mit T und vereinfache.
2. Gib zum Schluss die einschränkenden Bedingungen für die Einsetzung an.

##### 4.2. Erweitere den Bruch auf den vorgegebenen Nenner N

<p>a) <math>\frac{x-y}{2x}</math> ; N = 8xy</p> <p>b) <math>\frac{4a}{5bc}</math> ; N = <math>10a^2b^3c^2</math></p> <p>c) <math>\frac{p-q}{4p-3q}</math> ; N = <math>3pq - 4p^2</math></p> <p>d) <math>\frac{8x}{2x-3y}</math> ; N = <math>6x^2y - 9xy^2</math></p>	<p>a) <math>N_1 = 2x</math>; N = 8xy; T = 4y <math>\frac{(x-y) \cdot 4y}{2x \cdot 4y} = \frac{4xy - 4y^2}{8xy}</math> (für <math>x, y \neq 0</math>)</p> <p>b) <math>N_1 = 5bc</math>; N = <math>10a^2b^3c^2</math>; T = <math>2a^2b^2c</math> <math>\frac{4a \cdot 2a^2b^2c}{5bc \cdot 2a^2b^2c} = \frac{8a^3b^2c}{10a^2b^3c^2}</math> (für <math>a, b, c \neq 0</math>)</p> <p>c) <math>N_1 = 4p - 3q</math>; N = <math>3pq^2 - 4p^2</math> <math>= -p(4p - 3q)</math>; T = <math>-p</math> <math>\frac{(p-q) \cdot (-p)}{(4p-3q) \cdot (-p)} = \frac{pq - p^2}{3pq - 4p^2}</math> (für <math>p \neq 0</math>; <math>p \neq \frac{3}{4}</math>)</p> <p>d) <math>N_1 = 2x - 3y</math>; N = <math>6x^2y - 9xy^2</math> <math>= 3xy(2x - 3y)</math>; T = 3xy <math>\frac{8x \cdot 3xy}{(2x-3y) \cdot 3xy} = \frac{24x^2y}{6x^2y - 9xy^2}</math> (für <math>x, y \neq 0</math>; <math>x \neq \frac{3}{2}y</math>)</p>	
--	---	--

Sollst du einen Bruchterm mit dem Nenner  $N_1$  auf einen Bruchterm mit dem Nenner N erweitern, dann gehe so vor:

1. Prüfe, ob die beiden Nenner vollständig faktorisiert sind, sonst erledige dies.
2. Bilde den Quotienten  $N : N_1$  und kürze ihn vollständig:  $T = \frac{N}{N_1}$  (vollständig gekürzt).
3. Erweitere den gegebenen Bruchterm mit T, wie dies in der vorherigen beschrieben ist.

##### 4.3. Bestimme den Hauptnenner

<p>a) <math>\frac{1}{x}</math> und <math>\frac{3}{4x}</math></p> <p>b) <math>\frac{y}{16x}</math> und <math>\frac{3y^2}{20x}</math></p> <p>c) <math>\frac{1}{2x^2}</math> und <math>\frac{2}{3x^3}</math></p> <p>d) <math>\frac{7}{x^2y}</math> und <math>\frac{8}{xy^2}</math></p> <p>e) <math>\frac{1}{x+y}</math>; <math>\frac{x}{y-1}</math> und <math>\frac{y}{x-1}</math></p> <p>f) <math>\frac{7}{5x^2+10xy}</math> und <math>\frac{x}{4xy+8y^2}</math></p> <p>g) <math>\frac{a}{a+b}</math> und <math>\frac{b}{a-b}</math></p> <p>h) <math>\frac{p}{p^2-pq}</math>; <math>\frac{2q}{p^2-q^2}</math> und <math>\frac{q}{p+q}</math></p> <p>i) <math>\frac{1}{x^2-y^2}</math> und <math>\frac{1}{x^2+2xy+y^2}</math></p>	<p>a) <math>N_1 = x</math> ; <math>N_2 = 4x</math> HN = 4x</p> <p>b) <math>N_1 = 16x</math> ; <math>N_2 = 20x</math> HN = 80x</p> <p>c) <math>N_1 = 2x^2</math> ; <math>N_2 = 3x^3</math> HN = <math>6x^3</math></p> <p>d) <math>N_1 = x^2y</math> ; <math>N_2 = xy^2</math> HN = <math>x^2y^2</math></p> <p>e) <math>N_1 = x+y</math>; <math>N_2 = y-1</math>; <math>N_3 = x-1</math> HN = <math>(x+y)(y-1)(x-1)</math></p> <p>f) <math>N_1 = 5x^2 + 10xy = 5x(x+2y)</math> <math>N_2 = 4xy + 8y^2 = 4y(x+2y)</math> HN = <math>20xy(x+2y)</math></p> <p>g) <math>N_1 = a+b</math>; <math>N_2 = a-b</math> HN = <math>(a+b)(a-b) = a^2 - b^2</math></p> <p>h) <math>N_1 = p^2 - pq = p(p-q)</math> <math>N_2 = p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)</math> <math>N_3 = p+q</math> HN = <math>p(p-q)(p+q) = p(p^2 - q^2)</math></p> <p>i) <math>N_1 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)</math> <math>N_2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2</math> HN = <math>(x+y)^2(x-y)</math></p>	
--	---	--

Sollst du den Hauptnenner HN mehrerer Bruchterme mit den Nennern  $N_1, N_2, N_3$  usw. bestimmen, dann gehe so vor:

1. Prüfe, ob alle Nenner vollständig faktorisiert sind, sonst erledige dies.
2. Bestimme das kgV der auftretenden Zahlenfaktoren ziere es mit den übrigen Faktoren von  $N_1$ .
3. Multipliziere das Produkt von 2. mit denjenigen Faktoren von  $N_2, N_3$ , usw. die noch nicht berücksichtigt sind.

Merke:

Der Hauptnenner ist das Produkt aus dem kgV der Zahlenfaktoren und allen übrigen Faktoren. Dabei werden Faktoren, die in mehreren Nennern auftreten, nur einmal berücksichtigt. Von Potenzen mit gleicher Basis enthält der Hauptnenner diejenige mit dem größten Exponenten.

## 5. Berechnung

## 5.1. Addieren und Subtrahieren mit gleichen Nennern

a)  $\frac{7}{3x} + \frac{2}{3x}$

a)  $\frac{7}{3x} + \frac{2}{3x} = \frac{7+2}{3x} = \frac{9}{3x} = \frac{3}{x}$  (für  $x \neq 0$ )

b)  $\frac{a-b}{c} + \frac{a+b}{c}$

b)  $\frac{a-b}{c} + \frac{a+b}{c} = \frac{a-b+a+b}{c} = \frac{2a}{c}$   
(für  $c \neq 0$ )

c)  $\frac{1}{y-1} - \frac{y}{y-1}$

c)  $\frac{1}{y-1} + \frac{y}{y-1} = \frac{1-y}{y-1} + \frac{-(y-1)}{y-1} = -1$   
(für  $y \neq 1$ )

d)  $\frac{5x^3 - x^2y}{2x-y} - \frac{2x^2y - x^3}{2x-y}$

d)  $\frac{5x^3 - x^2y}{2x-y} - \frac{2x^2y - x^3}{2x-y}$   
$$\frac{5x^3 - x^2y - (2x^2y - x^3)}{2x-y}$$
$$\frac{5x^3 - x^2y - 2x^2y + x^3}{2x-y} = \frac{6x^3 - 3x^2y}{2x-y}$$
$$= \frac{3x^2(2x-y)}{2x-y} = 3x^2 \quad (\text{für } y \neq 2x)$$

e)  $\frac{x}{x^2-y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}$

e)  $\frac{x}{x^2-y^2} - \frac{y}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{x^2-y^2}$   
$$\frac{x-y}{(x+y)(x-y)} = \frac{1}{x+y} \quad (\text{für } x \neq -y)$$

Haben die Bruchterme **gleiche** Nenner, dann kannst du sie so addieren oder subtrahieren:

1. Addiere oder subtrahiere die Zähler. Du erhältst so den Zähler der Summe oder Differenz. Der Nenner ist der gegebene Nenner.
2. Vereinfache und faktorisiere Zähler und Nenner, wenn dies möglich ist. Kürze vollständig.
3. Gib zum Schluss die einschränkenden Bedingungen für die Einsetzung an.

## 5.2. Addieren und Subtrahieren mit unterschiedlichen Nennern

a)  $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x^2} + \frac{3}{4x^3}$

a)  $N_1 = x; N_2 = 3x^2; N_3 = 4x^3;$   
 $HN = 12x^3$   
 $T_1 = 12x^2; T_2 = 4x; T_3 = 3$   
$$\frac{1 \cdot 12x^2}{x \cdot 12x^2} + \frac{2 \cdot 4x}{3x^2 \cdot 4x} + \frac{3 \cdot 3}{4x^3 \cdot 3}$$
$$= \frac{12x^2 + 8x + 9}{12x^3} \quad (\text{für } x \neq 0)$$

b)  $\frac{8}{x^2y} - \frac{7}{xy^2}$

b)  $N_1 = x^2y; N_2 = xy^2; HN = x^2y^2$   
 $T_1 = y; T_2 = x$   
$$\frac{8 \cdot y}{x^2y \cdot y} - \frac{7 \cdot x}{xy^2 \cdot x} = \frac{8y - 7x}{x^2y^2}$$
  
(für  $x \neq 0; y \neq 0$ )

c)  $\frac{x+1}{6x^2-3x} + \frac{1}{14x-7}$

c)  $N_1 = 6x^2 - 3x = 3x(2x-1);$   
 $N_2 = 14x - 7 = 7(2x-1);$   
 $HN = 21x(2x-1); T_1 = 7; T_2 = 3x$   
$$\frac{(x+1) \cdot 7}{3x(2x-1) \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3x}{7(2x-1) \cdot 3x}$$
$$= \frac{7x+7+3x}{21x(2x-1)} = \frac{10x+7}{21x(2x-1)}$$
  
(für  $x \neq 0$  und  $x \neq \frac{1}{2}$ )

d)  $\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} - \frac{2}{z^2-1}$

d)  $N_1 = z-1; N_2 = z+1;$   
 $N_3 = z^2 - 1 = (z+1)(z-1);$   
 $HN = (z+1)(z-1)$   
 $T_1 = z+1; T_2 = z-1$   
$$\frac{1 \cdot (z+1)}{(z-1)(z+1)} - \frac{1 \cdot (z-1)}{(z+1)(z-1)}$$
$$\frac{2}{(z+1)(z-1)} = \frac{(z+1)-(z-1)-2}{(z+1)(z-1)}$$
$$\frac{0}{(z+1)(z-1)} = 0 \quad (\text{für } z \neq -1; 1)$$

Haben die Bruchterme **verschiedene** Nenner, dann kannst du sie so addieren oder subtrahieren:

1. Prüfe, ob die Nenner so weit wie möglich faktorisiert sind, sonst erledige dies.
2. Bestimme den Hauptnenner (HN). Wie das geht, erfährst du in Aufgabe 10.
3. Erweitere die Bruchterme auf ihren Hauptnenner. Wie das geht, erfährst du in Aufgabe 9.
4. Verfahre jetzt weiter wie in Aufgabe 11.

Merke:

\*\* Bruchterme mit gleichen Nennern kannst du addieren oder subtrahieren, indem du die Zähler addierst oder subtrahierst und den Nenner beibehältst.

\*\* Bruchterme mit verschiedenen Nennern kannst du addieren oder subtrahieren, indem du sie zuvor auf einen gemeinsamen Nenner erweiterst. Dabei ist der einfachste gemeinsame Nenner der Hauptnenner.

## Aufgabe

## Lösung

## Erläuterung

## 5.3. Multiplizieren von Bruchtermen

a)  $\frac{3x}{2y} \cdot \frac{3}{5y}$

b)  $3a \cdot \frac{4b}{9a}$

c)  $\frac{4x^3}{25y^2} \cdot \frac{35y}{16x^2}$

d)  $\frac{x+1}{4y} \cdot \frac{1}{2x-1}$

e)  $\frac{3x^2+3x}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1}$

f)  $\frac{7p^2-7pq}{30p+60q} \cdot \frac{9p^2+18pq}{14pq^2-14q^3}$

g)  $\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x}{x^2-1}$

h)  $\frac{a+b}{ab^2-2b^2} \cdot \frac{a^2b-4b}{a^2+2ab+b^2}$

a)  $\frac{3x \cdot 3}{2y \cdot 5y} = \frac{9x}{10y^2}$  (für  $y \neq 0$ )

b)  $\frac{3a \cdot 4b}{9a} = \frac{4b}{3}$  (für  $a \neq 0$ )

c)  $\frac{4x^2 \cdot 35y}{25y^2 \cdot 16x^2} = \frac{x \cdot 7}{5y \cdot 4} = \frac{7x}{20y}$   
(für  $x \neq 0$ ;  $y \neq 0$ )

d)  $\frac{(x+1) \cdot 1}{4y \cdot (2x-1)} = \frac{x+1}{4y(2x-1)}$   
(für  $y \neq 0$ ;  $x \neq \frac{1}{2}$ )

e)  $\frac{3x(x+1) \cdot 1}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{3x \cdot 1}{x-1} = \frac{3x}{x-1}$   
(für  $x \neq -1$ ;  $x \neq 1$ )

f)  $\frac{7p(p-q) \cdot 9p(p+2q)}{30(p+2q) \cdot 14q^2(p-q)} = \frac{p \cdot 3p}{10 \cdot 2q^2}$   
 $= \frac{3p^2}{20q^2}$  (für  $q \neq 0$ ;  $p \neq q$ ;  $-2q$ )

g)  $\frac{(x+1) \cdot x}{(x-1) \cdot (x+1)(x-1)} = \frac{x}{(x-1) \cdot (x-1)}$   
 $= \frac{x}{(x-1)^2}$  (für  $x \neq -1$ ;  $x \neq 1$ )

h)  $\frac{(a+b) \cdot b(a^2-4)}{b^2(a-2)(a+b^2)}$   
 $= \frac{(a+b) \cdot b(a+2)(a-2)}{b^2(a-2) \cdot (a+b)^2} = \frac{a+2}{b(a+b)}$   
(für  $b \neq 0$ ;  $a \neq 2$ ;  $a \neq -b$ )

Sollst du Bruchterme multiplizieren, dann gehe so vor:

1. Prüfe, ob alle Zähler und Nenner so weit wie möglich faktorisiert sind, sonst erledige dies.
2. Multipliziere Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner und schreibe die Produkte auf **einen** Bruchstrich.
3. Prüfe, ob sich der Bruchterm kürzen lässt. Wenn ja, dann kürze vollständig.
4. Ordne die Zähler- und Nennerprodukte und gib zum Schluss die einschränkenden Bedingungen für die Einsetzung an.

Merke:

Zwei Bruchterme kannst du multiplizieren, indem du Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizierst.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (b, d \neq 0)$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad (c \neq 0)$$

## 5.4. Dividieren von Bruchtermen

a)  $\frac{6x}{7y} : \frac{3x}{14}$

b)  $8ab^2 : \frac{2b^3}{3a}$

c)  $\frac{48x^3y}{5(x-1)} : 36xy^2$

d)  $\frac{8a^2b^4}{45cd^3} : \frac{bc^2}{30a^2d^3}$

e)  $\frac{2(x-1)}{3y} : \frac{3(x-1)}{2y}$

f)  $\frac{4x+4y}{3y-6} : \frac{x^2+xy}{y-2}$

g)  $\frac{2p^2-18}{3(p^2+2pq+q^2)} : \frac{p+3}{p+q}$

a)  $\frac{6x}{7y} \cdot \frac{14}{3x} = \frac{6x \cdot 14}{7y \cdot 3x} = \frac{4}{y}$  (für  $x, y \neq 0$ )

b)  $8ab^2 : \frac{2b^3}{3a} = \frac{8ab^2 \cdot 3a}{2b^3} = \frac{12a^2}{b}$   
(für  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$ )

c)  $\frac{48x^3y}{5(x-1)} \cdot \frac{1}{36xy^2} = \frac{48x^3y}{5(x-1) \cdot 36xy^2}$   
 $= \frac{4x^2}{15(x-1)y}$  (für  $x \neq 0$  und  $y \neq 0$ )

d)  $\frac{8a^2b^4}{45cd^3} \cdot \frac{30a^2d^3}{bc^2} = \frac{8a^2b^4 \cdot 30a^2d^3}{45cd^3 \cdot bc^2}$   
 $= \frac{16a^4b^3}{3c^3}$  (für  $a; b; c; d \neq 0$ )

e)  $\frac{2(x-1)}{3y} \cdot \frac{2y}{3(x-1)} = \frac{2(x-1) \cdot 2y}{3y \cdot 3(x-1)} = \frac{4}{9}$   
(für  $x \neq 1$  und  $y \neq 0$ )

f)  $\frac{4(x+y)}{3(y-2)} \cdot \frac{y-2}{x(x+y)} = \frac{4(x+y) \cdot (y-2)}{3(y-2) \cdot x(x+y)}$   
 $= \frac{4}{3x}$  (für  $x \neq 0$ ;  $y \neq 2$ ;  $x \neq -y$ )

g)  $\frac{2(p^2-9)}{3(p+q)^2} \cdot \frac{p+q}{p+3}$   
 $= \frac{2(p+3)(p-3) \cdot (p+q)}{3(p+q)^2 \cdot (p+3)} = \frac{2(p-3)}{3(p+q)}$   
(für  $p \neq -3$  und  $p \neq -q$ )

Sollst du Bruchterme dividieren, dann gehe so vor:

1. Bestimme den Kehrtterm des Divisors. Diesen erhältst du, wenn du seinen Zähler mit seinem Nenner vertauschst.
2. Multipliziere den Dividenten mit dem Kehrtterm des Divisors. Wie das geht, erfährst du in Aufgabe 13. Dabei musst du ausschließen, dass weder der Nenner des Dividenten noch Zähler und Nenner des Divisors null werden können.

Merke:

Durch einen Bruchterm kannst du dividieren, indem du mit seinem Kehrtterm multiplizierst.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$