

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele																		
Zählprinzip	■ Zählprinzip Grundproblematik: Wieviele Möglichkeiten gibt es . . . ♦ . . . n Objekte in verschiedenen Reihenfolgen anzuordnen ♦ . . . k Objekte aus einer Menge von n Objekten auszuwählen. Fundamentales Zählprinzip – Produktregel Aus r Mengen $M_1, M_2, \dots, M_r$ mit $n_1, n_2, \dots, n_r$ Elementen lassen sich $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$ verschiedene r-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ bilden mit $x_i \in M_i$ oder Hat man eine Folge von Entscheidungen zu treffen, bei denen es für die i. Entscheidung n_i Möglichkeiten gibt ($i = 1, \dots, r$), dann ist die Gesamtzahl aller möglichen Entscheidungs-Folgen gegeben durch $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$ Bezeichnungen: <table> <tr> <td>n – Menge</td> <td>...</td> <td>Menge von n Elementen</td> </tr> <tr> <td>k – Stichprobe</td> <td>...</td> <td>Teilmenge von k Elementen einer Grundmenge</td> </tr> <tr> <td>geordnet</td> <td>...</td> <td>Reihenfolge wichtig (<i>Variationen</i>)</td> </tr> <tr> <td>ungeordnet</td> <td>...</td> <td>Reihenfolge unwichtig (<i>Kombinationen</i>)</td> </tr> <tr> <td>mit Zurücklegen</td> <td>...</td> <td>gezogenes Element wird vor der nächsten Ziehung zurückgelegt</td> </tr> <tr> <td>ohne Zurücklegen</td> <td>...</td> <td>gezogenes Element wird vor der nächsten Ziehung nicht zurückgelegt</td> </tr> </table>	n – Menge	...	Menge von n Elementen	k – Stichprobe	...	Teilmenge von k Elementen einer Grundmenge	geordnet	...	Reihenfolge wichtig (<i>Variationen</i>)	ungeordnet	...	Reihenfolge unwichtig (<i>Kombinationen</i>)	mit Zurücklegen	...	gezogenes Element wird vor der nächsten Ziehung zurückgelegt	ohne Zurücklegen	...	gezogenes Element wird vor der nächsten Ziehung nicht zurückgelegt	Allgemeines Zählprinzip bei mehrstufigen Experimenten: Besteht ein Zufallsexperiment aus k voneinander unabhängigen Stufen mit jeweils $n_1, n_2, \dots, n_k$ Ergebnissen, so hat das Gesamtexperiment $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ kombinierte Ergebnisse. Dabei wird berücksichtigt, dass unterschiedliche Reihenfolgen als unterschiedliche Ergebnisse gewertet werden. Spezialfälle: 1. Aus einer Urne mit n Kugeln wird k mal mit Zurücklegen gezogen. Dann gibt es $n \cdot \dots \cdot n = n^k$ verschiedenen Ergebnisse. Variation mit Wiederholung 2. Aus einer Urne mit n Kugeln wird k mal ohne Zurücklegen gezogen. Dann gibt es $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$ verschiedenen Ergebnisse. Variation ohne Wiederholung 3. Aus einer Urne mit n Kugeln werden alle n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Dann gibt es $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ verschiedene Ergebnisse. Permutation ohne Wiederholung
n – Menge	...	Menge von n Elementen																		
k – Stichprobe	...	Teilmenge von k Elementen einer Grundmenge																		
geordnet	...	Reihenfolge wichtig (<i>Variationen</i>)																		
ungeordnet	...	Reihenfolge unwichtig (<i>Kombinationen</i>)																		
mit Zurücklegen	...	gezogenes Element wird vor der nächsten Ziehung zurückgelegt																		
ohne Zurücklegen	...	gezogenes Element wird vor der nächsten Ziehung nicht zurückgelegt																		

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Zählprinzip	● Summen– und Produktregel	
	★ Summenregel (Entweder – Oder – Regel)	
	Haben n Elemente einer Menge M eine Eigenschaft A und k Elemente diese Eigenschaft A nicht, so besteht M aus n + k Elementen. Man schreibt: $ M = A + \bar{A} $ („Anzahl von M = Anzahl von A + Anzahl von nicht-A“)	
	★ Produktregel	
	Form 1: Hat die Menge A r Elemente und die Menge B s Elemente, so gibt es $r \cdot s$ geordnete Paare der Form (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$, d. h. $ A \times B = A \cdot B $. Dazu bietet sich eine Matrixschreibweise an: Die Menge A bestehe aus 4 Elementen und die Menge B aus 6 Elementen 1;1 1;2 1;3 1;4 1;5 1;6 2;1 2;2 2;3 2;4 2;5 2;6 3;1 3;2 3;3 3;4 3;5 3;6 4;1 4;2 4;3 4;4 4;5 4;6 womit 24 geordnete Paare entstanden sind. Form 2: Ein Versuch bestehe aus s Stufen. Der Ausgang einer Stufe habe keinen Einfluss auf die Anzahl (!) der möglichen Ausgänge bei späteren Stufen (Unabhängigkeit der Stufen). Haben die einzelnen Stufen bzw. $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$ Ausfälle, so hat der Gesamtversuch $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_s$ Ausfälle. (Dass der Ausgang keinen Einfluß auf die Anzahl der Versuche haben soll bedeutet, dass immer wieder der Ausgangszustand hergestellt wird, in der Sprache der Kombinatorik: mit Zurücklegen gearbeitet wird. Es müssen immer genügend Elemente zur Verfügung stehen, sie dürfen nicht alle werden.)	

© Dipl.-Math.
Armin Richter



Treff
Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele																																			
Zählprinzip	k-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ n^k ◆ Anordnung je eines Elementes aus k verschiedenen Mengen, wobei aus jeder Menge ein Element vorhanden ist. ◆ Aus n unterscheidbaren Objekten einer Menge werden nacheinander mit Zurücklegen k Objekte entnommen ◆ Ein jedes solches k-Tupel ist ein Pfad im Baumdiagramm. ◆ Bei Berücksichtigung der Reihenfolge ist jeder Pfad zu bewerten, es gibt so viele Möglichkeiten, wie k-Tupel zu bilden sind. ◆ Da jedes Element nur einmal vorhanden sein darf, ist $k \leq n$. Variation mit Wiederholung k-Permutation $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ einer endlichen Menge M $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \frac{n!}{(n-k)!}$ ◆ ist eine Permutation k-elementiger Teilmengen von M ◆ aus einer n elementigen Menge werden nacheinander ohne Zurücklegen k Elemente entnommen ◆ ist die Anzahl der k-Permutationen einer n- elementigen Menge Variation ohne Wiederholung k-Teilmenge $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ einer endlichen Menge M $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$ ◆ ist eine ungeordnete Auswahl von k Elementen aus M ◆ ist die Anzahl der möglichen Teilmengen mit k Elementen einer n – elementigen Menge Kombination ohne Wiederholung k-Kombination $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ einer endlichen Menge M $\binom{n-k+1}{k} = \frac{(n-k+1)!}{k! (n-1)!}$ ◆ ist eine ungeordnete Auswahl von k Elementen aus M ◆ ist die Anzahl der k-Kombinationen einer n – elementigen Menge Kombination mit Wiederholung	<table><thead><tr><th></th><th>Ausgangsmenge</th><th>Auswahlmenge (Kombination)</th><th>Formel</th><th>Anzahl möglicher Reihenfolgen</th></tr></thead><tbody><tr><td>Permutation ohne Wiederholung</td><td>$N=4$ </td><td>$N=4$ </td><td>$N!$</td><td>$4! = 24$</td></tr><tr><td>Permutation mit Wiederholung</td><td>$N=4$ </td><td>$N=4$ </td><td>$\frac{N!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$</td><td>$\frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 24$</td></tr><tr><td>Kombination ohne Wiederholung</td><td>$N=4$ </td><td>$k=2$ </td><td>$\frac{N!}{(N-k)! \cdot k!}$</td><td>irrelevant</td></tr><tr><td>Variation ohne Wiederholung</td><td>$N=4$ </td><td>$k=2$ </td><td>$\frac{N!}{(N-k)!}$</td><td>$\frac{4!}{(4-2)!} = 12$</td></tr><tr><td>Kombination mit Wiederholung</td><td>$N=4$ </td><td>$k=2$ </td><td>$\frac{(N+k-1)!}{(N-1)! \cdot k!}$</td><td>irrelevant</td></tr><tr><td>Variation mit Wiederholung</td><td>$N=4$ </td><td>$k=2$ </td><td>N^k</td><td>$4^2 = 16$</td></tr></tbody></table>		Ausgangsmenge	Auswahlmenge (Kombination)	Formel	Anzahl möglicher Reihenfolgen	Permutation ohne Wiederholung	$N=4$ 	$N=4$ 	$N!$	$4! = 24$	Permutation mit Wiederholung	$N=4$ 	$N=4$ 	$\frac{N!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$	$\frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 24$	Kombination ohne Wiederholung	$N=4$ 	$k=2$ 	$\frac{N!}{(N-k)! \cdot k!}$	irrelevant	Variation ohne Wiederholung	$N=4$ 	$k=2$ 	$\frac{N!}{(N-k)!}$	$\frac{4!}{(4-2)!} = 12$	Kombination mit Wiederholung	$N=4$ 	$k=2$ 	$\frac{(N+k-1)!}{(N-1)! \cdot k!}$	irrelevant	Variation mit Wiederholung	$N=4$ 	$k=2$ 	N^k	$4^2 = 16$
	Ausgangsmenge	Auswahlmenge (Kombination)	Formel	Anzahl möglicher Reihenfolgen																																	
Permutation ohne Wiederholung	$N=4$ 	$N=4$ 	$N!$	$4! = 24$																																	
Permutation mit Wiederholung	$N=4$ 	$N=4$ 	$\frac{N!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$	$\frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 24$																																	
Kombination ohne Wiederholung	$N=4$ 	$k=2$ 	$\frac{N!}{(N-k)! \cdot k!}$	irrelevant																																	
Variation ohne Wiederholung	$N=4$ 	$k=2$ 	$\frac{N!}{(N-k)!}$	$\frac{4!}{(4-2)!} = 12$																																	
Kombination mit Wiederholung	$N=4$ 	$k=2$ 	$\frac{(N+k-1)!}{(N-1)! \cdot k!}$	irrelevant																																	
Variation mit Wiederholung	$N=4$ 	$k=2$ 	N^k	$4^2 = 16$																																	

© Dipl.-Math.
Armin Richter

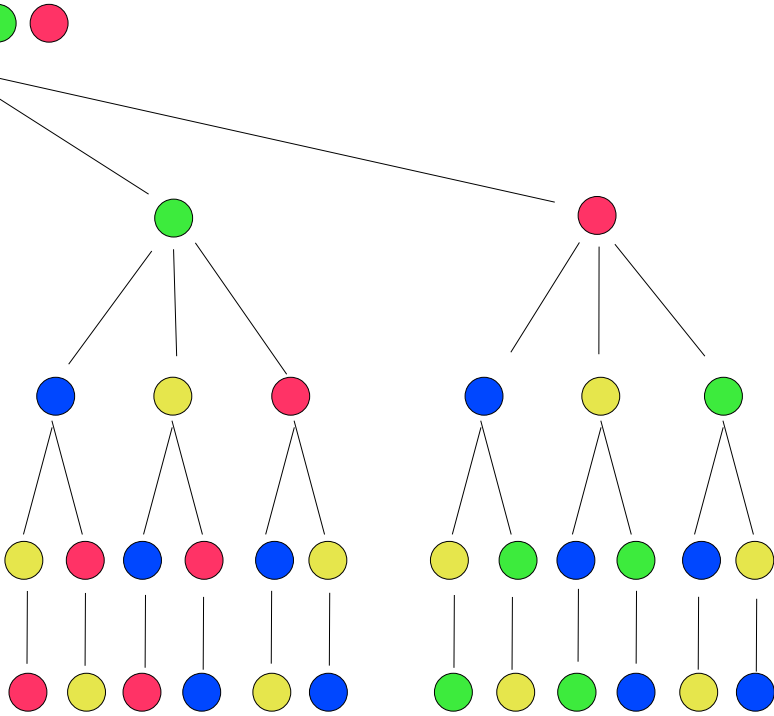
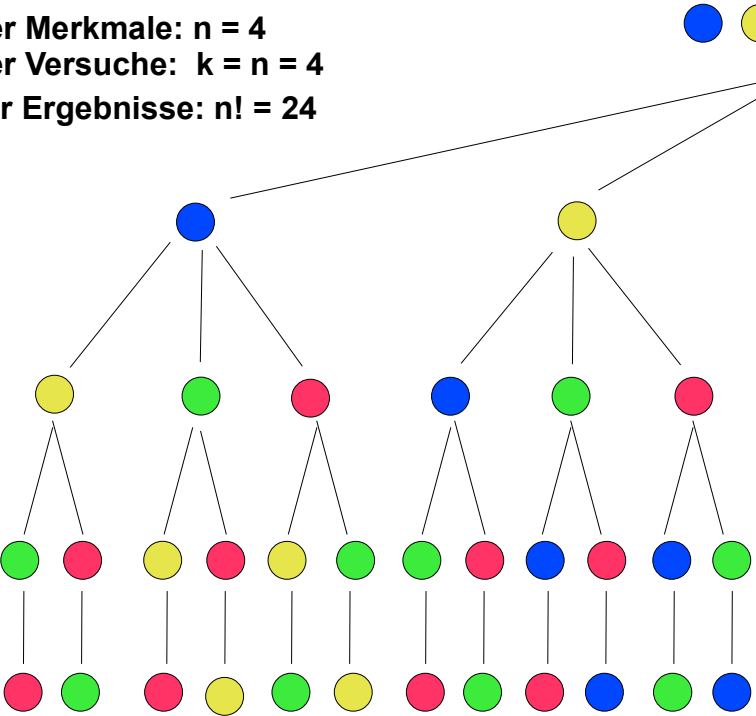
CHRISTINA STRAUCH

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

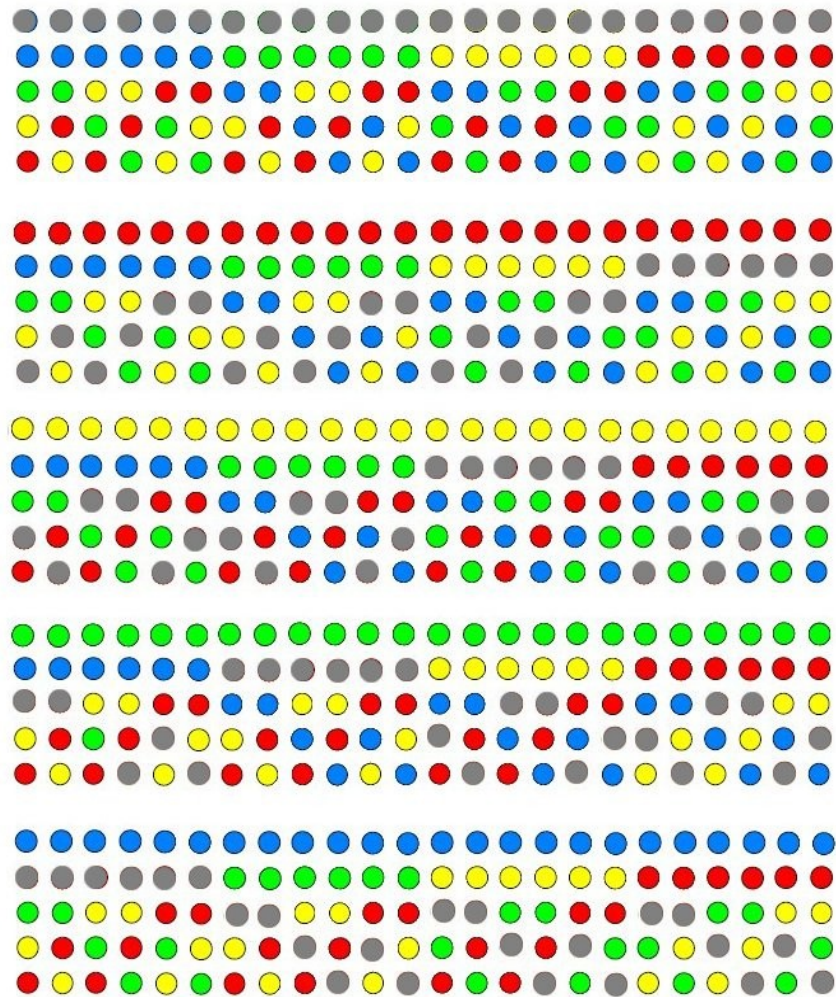
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Permutation	■ Permutation Eine Anordnung (nur Reihenfolge) sämtlicher Elemente einer endlichen Menge heißt auch Permutation. Für Permutationen hat sich eine Listenschreibweise eingebürgert. Sämtliche Permutationen von $S = \{a, b, c\}$ sind: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Bei einer Permutation ● müssen immer alle Elemente ● in einer Reihenfolge angeordnet werden. Anzahl der Merkmale: n Anzahl der Versuche: k = n	

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Permutation ohne Wiederholung	● Permutation von n Elementen ohne Wiederholungen Anzahl der Permutationen bei n Verschiedenen Elementen: $P_n = n!$ Alle n-elementigen Tupel, die aus einer n-elementigen Menge erzeugt werden können mit n-verschiedenen Elementen. Für die Auswahl ● von n Elementen ● aus einer Menge mit Elementen ● ohne Wiederholung (das heißt immer, man könnte die n Elemente auch mit einem Zug aus der Urne ziehen und es gilt immer, dass alle Elemente gezogen werden) ● mit Berücksichtigung der Reihenfolge Voraussetzungen: ● Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander. ● Es müssen alle (n) Elemente ausgewählt werden. (am Ende des Experiments ist die Urne leer) ● Ein Element kann nicht mehrmals ausgewählt werden. (es wird keine Kugel zurückgelegt, also keine Wiederholung und es gibt auch keinen zwei gleichen Elemente) ● Die Reihenfolge muss berücksichtigt werden (die Reihenfolge (1,2,3) ist von (2,1,3) zu unterscheiden, würde die Reihenfolge nicht berücksichtigt werden, wäre das identisch mit nicht unterscheidbaren Elementen) Interpretationen ● Anzahl der Möglichkeiten, eine geordnete Stichprobe von n Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln ohne Zurücklegen zu ziehen. ● Anzahl der Möglichkeiten, n verschiedene (unterscheidbare) Objekte so auf n Urnen zu verteilen, dass in jeder Urne ein Objekt liegt. ● Anzahl der n-stelligen Sequenzen von n verschiedenen Zeichen, in denen jedes Zeichen genau einmal vorkommt.	

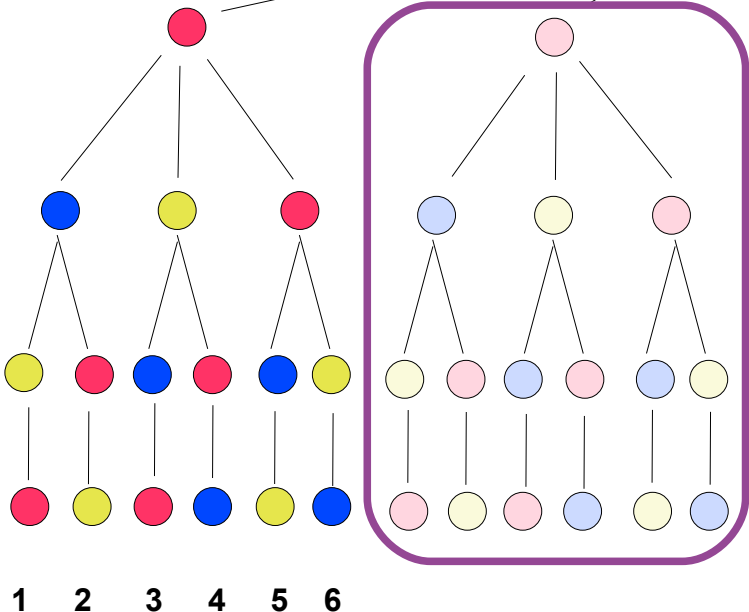
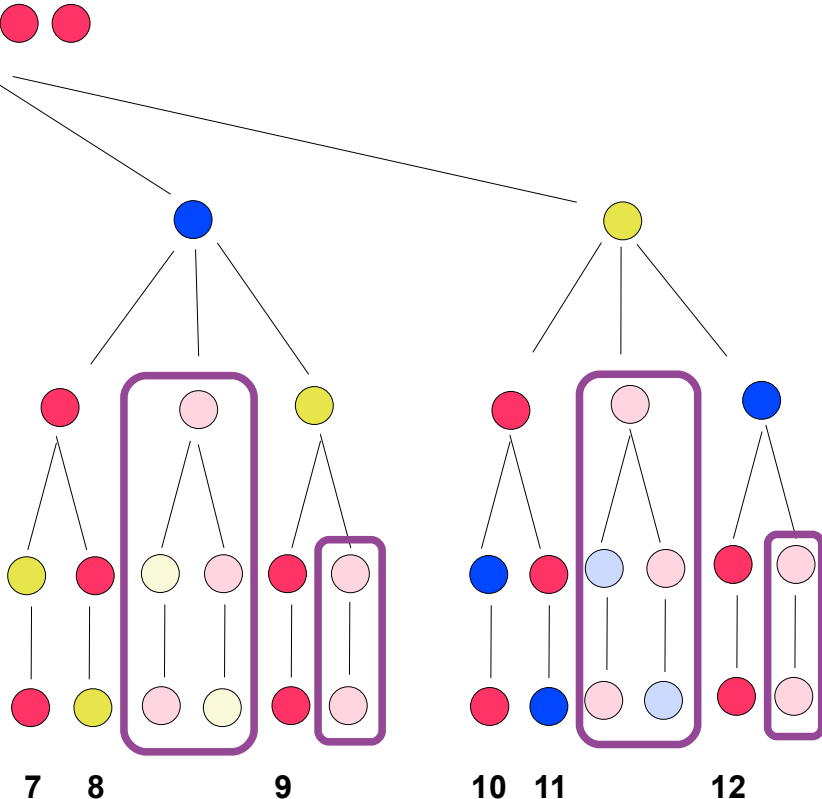
Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Permutation ohne Wiederholung	 Baumdiagramm	
	Anzahl der Merkmale: $n = 4$ Anzahl der Versuche: $k = n = 4$ Anzahl der Ergebnisse: $n! = 24$ 	

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Permutation ohne Wiederholung	★ Herleitung der Formel (Zählprinzip) 1. Stufe: n Möglichkeiten (Menge 1 enthält n Elemente) 2. Stufe: n-1 Möglichkeiten (Menge 2 enthält n Elemente) 3. Stufe: n-2 Möglichkeiten (Menge 3 enthält n Elemente) n-te Stufe: 1 Möglichkeit (Menge n enthält n Elemente) Unter „Menge“ ist jeweils der Status der Urne zu verstehen: wieviele Kugeln sind in der Urne enthalten. da nach jedem Ziehen nicht zurückgelegt wird, sind beim jeweils nächsten Zug eine Kugel weniger in der Urne vorhanden. Es stehen also n verschiedene Elemente zur Verfügung, deren Anzahlen nach dem Zählprinzip immer um 1 niedriger werden und es sind n – Objekte anzuordnen (k=n): $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$	Anzahl der Merkmale: $n = 5$ Anzahl der Versuche: $k = n = 5$ Anzahl der Ergebnisse: $5! = 120$ 

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Permutation mit Wiederholung	● Permutation von n Elementen mit Wiederholungen <i>(Elemente, die nicht unterscheidbar sind)</i> Angenommen, wir haben eine Menge von Objekten, die aus mehreren Teilmengen besteht, wobei innerhalb jeder Teilmenge die Objekte gleich sind. Ein Beispiel dafür ist eine Urne mit mehreren Kugeln der gleichen Farbe. Beim Ziehen sind Kugeln der gleichen Farbe nicht unterscheidbar, dh. die Eigenschaft der Elemente tritt mehrfach auf. Anzahl der Permutationen bei n Elementen, bei denen $n_1, n_2, \dots, n_k$ Elemente untereinander gleich sind: ${}^w P_{n; n_1, n_2, n_3, \dots, n_k} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$ Für die Auswahl ● von n Elementen ● aus einer Menge mit n Elementen ● mit Wiederholung (das heißt auch hier, es könnten alle Elemente auf einmal gezogen werden) ● mit Berücksichtigung der Reihenfolge unterscheidbarer Elemente und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge nicht unterscheidbarer Elemente Voraussetzungen: ● Mindestens 2 Elemente der Ausgangsmenge sind identisch, d.h. es gibt Elemente der Ausgangsmenge, die sich nicht voneinander unterscheiden lassen . ● Es müssen alle (n) Elemente ausgewählt werden. (nach dem Experiment ist die Urne leer) ● Ein Individualelement kann nicht mehrmals ausgewählt werden, ein Element mit gleicher Eigenschaft hingegen schon. Liegen z.B. 2 rote Kugeln in der Ausgangsmenge, so muss jede der beiden roten Kugeln ausgewählt werden (mit Wiederholung), eine dritte rote Kugel kann aber nicht ausgewählt werden. ● Die Reihenfolge der unterscheidbaren Elemente spielt eine Rolle. Interpretationen ● Anzahl der Möglichkeiten, eine geordnete Stichprobe von k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln mit zurücklegen so zu ziehen, dass die Kugel a_i genau k_i-mal gezogen wird. ● Anzahl der Möglichkeiten, k unterscheidbare Objekte auf n Urnen so zu verteilen, dass in der i-ten Urne k_i Objekte liegen.	Prototypisches Beispiel Mögliche Buchstabenanordnungen beim Wort ANAGRAMM Wieviele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, alle Buchstaben des Wortes ANAGRAMM in einer unterschiedlichen Reihenfolge anzuordnen. In diesem Wort kommen bestimmte Buchstaben mehrfach vor. Anzahl aller Buchstaben: $N=8$ Häufigkeit einzelner Buchstaben: $k_1 = A = 3$ $k_2 = G = 1$ $k_3 = N = 1$ $k_4 = M = 2$ $k_5 = R = 1$ $A = 8! / (3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!) = 8! / (3! \cdot 2!) = 40320 / 12 = 3360$ Es gibt 3360 unterschiedliche (8 Buchstaben umfassende) Wörter, die unter der Verwendung aller Buchstaben des Wortes ANAGRAMM gebildet werden können.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
	★ Baumdiagramm Anzahl der Merkmale: $n = 4$ Anzahl der Versuche: $k = n = 4$ Anzahl gleicher Elemente: $n_1 = 2$ Anzahl der Ergebnisse: $4!/2! = 12$  In der 1. Ebene fällt ein Teilbaum weg mit $3!$ Möglichkeiten = 6 (die Permutation von 3 Farben rot-gelb-blau) In der 2. Ebene fallen zwei Teilbäume weg mit $2 * 2!$ Möglichkeiten = 4 (die Permutation von je 2 Farben rot-blau und rot-gelb) In der 3. Ebene fallen zwei Teilbäume weg mit $2 * 1!$ Möglichkeiten = 2 (die Permutation von 2 gleichen Farben (rot-rot)) Jeder Teilbaum beginnt immer mit einer roten Kugel, weil es bereits einen Teilbaum gibt, der mit einer roten Kugel beginnt. Da es zwei rote Kugeln gibt, muss es in jeder Ebene zwei Teilbäume geben, die mit einer roten Kugel beginnen und deshalb einmal zu entfernen sind.	 7 8 9 10 11 12

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Permutation ohne Wiederholung	★ Herleitung der Formel (Zählprinzip)	
	★ Herleitung der Formel aus Permutation ohne Wiederholung	
	Zunächst ist das Zählprinzip dem der Permutation ohne Wiederholung ähnlich mit jeder Stufe enthält die Urne eine Kugel weniger. Damit entsteht wieder folgende Zählung: 1. Stufe: n Möglichkeiten (Menge 1 enthält n Elemente) 2. Stufe: n-1 Möglichkeiten (Menge 2 enthält n Elemente) 3. Stufe: n-2 Möglichkeiten (Menge 3 enthält n Elemente) n-te Stufe: 1 Möglichkeit (Menge n enthält n Elemente) Unter „Menge“ ist jeweils der Status der Urne zu verstehen: wieviele Kugeln sind in der Urne enthalten. da nach jedem Ziehen nicht zurückgelegt wird, sind beim jeweils nächsten Zug eine Kugel weniger in der Urne vorhanden. Hier wird ohne Zurücklegen gearbeitet, obwohl es „mit Wiederholung“ heißt. Entscheidend ist aber, dass genau n Ziehungen stattfinden und dass nach n Ziehungen die Urne leer ist. Deshalb geht man davon aus, dass in der Urne selbst schon Kugeln liegen, die nicht unterscheidbar sind, aber bei n Kugeln die Urne leer ist. Damit stehen zunächst n! Anordnungen zur Verfügung $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ Durch die Gleichheit von Elementen lassen sich jeweils n_1 – Objekte nicht mehr unterscheiden, die alleine aus der Vertauschung der n_1 Objekte entstehen. n_1 Objekte lassen sich aber in $n_1!$ Möglichkeiten anordnen, so dass die unterscheidbaren Möglichkeiten sind: $n!/n_1!$	

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

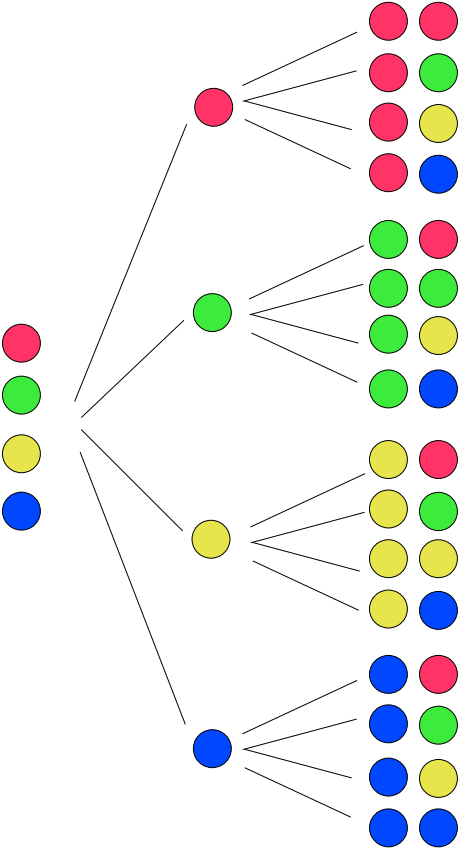
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Permutation ohne Wiederholung	★ Beispiel Auf der rechten Seite wird das Beispiel aus der Permutation ohne Wiederholung auf diesen Fall geändert. In der Urne befinden sich weiterhin 5 Kugel, davon sind jetzt aber 2 rote, 2 blaue und 1 gelbe. In einigen Fällen sind die Kugeln mit Nummern versehen, um die Ergebnisse besser unterscheiden zu können. Dies Nummern sind natürlich auf den Kugeln nicht vorhanden, sonst wären sie nicht „nicht unterscheidbar“. Wenn man sich die Nummern wegdenkt, stellt man fest, dass jeweils vier Anordnungen nicht unterschieden werden können (durch senkrechte Striche getrennt), so dass von den ursprünglich 120 Anordnungen der „Permutationen ohne Wiederholung“ nur noch 30 verschiedene Anordnungen (30 nicht unterscheidbare Vierergruppen, die im rechten Beispiel durch senkrechte rote Striche gekennzeichnet sind) übrigbleiben. Da zwei Sorten Kugel mit je 2 Stück nicht unterscheidbar sind, ist nach obiger Herleitung $n_1 = 2$ und $n_2 = 2$ (und $n_3=1$ für gelb). Damit ergibt sich aus der Berechnungsformel:	Anzahl der Merkmale: $n = 5$ Anzahl der Versuche: $k = 5$ Anzahl gleicher Elemente: $n_1 = 2; n_2 = 2$ Anzahl der Ergebnisse: $5!/2!2! = 30$

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Variation	■ Variation <i>(mit Beachtung der Reihenfolge)</i> Jede mögliche Anordnung mit Berücksichtigung der Reihenfolge von k Elementen aus n vorhandenen Elementen heißt Variation dieser Elemente (Variation von n Elementen zur k-ten Klasse). Solche Auswahlen mit Beachtung der Reihenfolge werden auch als geordnete Stichproben bezeichnet. Bei einer Variation werden ● k Elemente ausgewählt ● die in Reihenfolge angeordnet werden Anzahl der Merkmale: n Anzahl der Versuche: k	

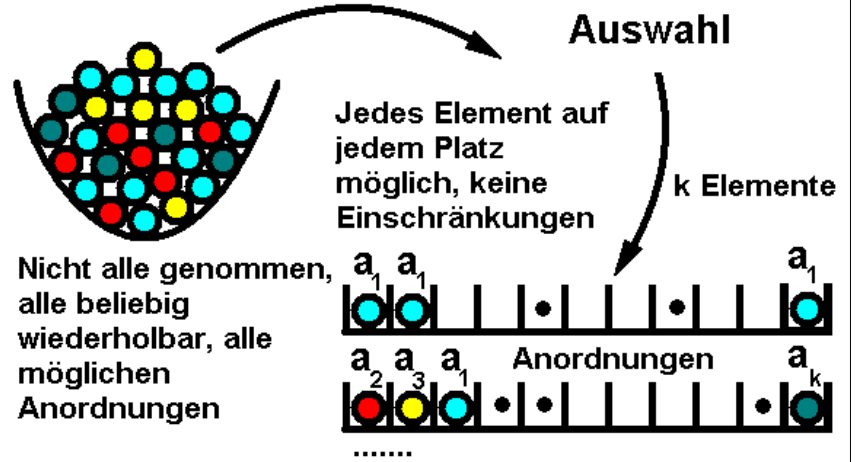
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Variation mit Wiederholung	• Variation mit Zurücklegen (mit Wiederholungen) Gegeben seien n verschiedene Elemente. Wieviele Möglichkeiten gibt es, k Elemente unter Berücksichtigung der Reihenfolge anzuordnen, wenn jedes Element beliebig oft, aber höchstens k mal, wiederholt werden darf? (Beachte: k kann auch grösser als n sein) ${}^W V_n^k = n^k$ Alle k-elementigen Tupel, die aus einer n-elementigen Menge erzeugt werden können Für die Auswahl - von k Elementen (Kugeln), beim Ziehen mit zurücklegen kann $k > n$ sein, da jeder Versuch die Bedingungen hat, wie der erste - aus einer Menge mit n Elementen (Urne) mit Wiederholung (Zurücklegen) (das bedeutet, dass vor jeder neuen Ziehung der Zustand vor der ersten Ziehung wieder hergestellt wird. Damit ist auch möglich, dass $k > n$, da die „Urne“ nie leer wird.) mit Berücksichtigung der Reihenfolge Voraussetzungen: - Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander. - Es werden einige (k) Elemente ausgewählt. - Beim Ziehen mit Zurücklegen kann $k > n$ sein, da jeder Versuch die gleichen Bedingungen hat, wie der erste Versuch. - Ein Element kann mehrmals ausgewählt werden. Interpretationen - Anzahl der Möglichkeiten, eine geordnete Stichprobe von k Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln mit Zurücklegen zu ziehen. - Anzahl der Möglichkeiten, k verschiedene (unterscheidbare) Objekte auf n Urnen zu verteilen, wobei jede Urne beliebig viele Objekte aufnehmen kann. - Anzahl der k-stelligen Sequenzen, in denen jede Stelle mit irgendeinem von n verschiedenen, beliebig oft wiederholbaren Zeichen besetzt ist.	Prototypisches Beispiel Zahlenschloss Ein Zahlenschloss bestehe aus 5 Vorrichtungen, welche jeweils eine Zifferneinstellung verlangen. Wieviele Möglichkeiten gibt es ? wichtig - Bei jeder Zifferneinstellung können die Zahlen 0 bis 9 gewählt werden ($N=10$). Bestimmte Ziffern können mehrfach vorkommen (=mit Wiederholung) - Die Reihenfolge ist entscheidend (01557 ist ungleich 75510) $N = 10$ mögliche Ziffern (0 bis 9) $k = 5$ Zifferneinstellungen $A = N^k = 10^5 = 100000$ Es gibt 100 000 mögliche Ziffernanordnungen für ein Zahlenschloss mit 5 einzustellenden Ziffern.

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Variation mit Wiederholung	★ Baumdiagramm Anzahl der Merkmale: $n = 4$ Anzahl der Versuche: $k = 2$ $n^k = 4^2 = 16$ 	Das Baumdiagramm ist voll besetzt. gleiche Farben haben die Wahrscheinlichkeit $1/16$ verschiedene Farben treten im Baumdiagramm zweimal auf und haben deshalb die Wahrscheinlichkeit $2 \cdot 1/16$

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
	Anzahl der Merkmale: $n = 4$ Anzahl der Versuche: $k = 3$ Anzahl der Ereignisse : $n^k = 4^3 = 64$ Gruppe 1. Ereignis blaue Kugel: 3x Blau 1x 2x Blau $3 + 1 + 1 + 1 = 6$ 1x Blau $0 + 3 + 3 + 3 = 9$ Gruppe 2. Ereignis gelbe Kugel: 3x Blau 0x 2x Blau 1 = 1 1x Blau $3 + 1 + 1 + 1 = 6$ Das Baumdiagramm ist voll besetzt. 3 gleiche Farben treten je 3-mal auf haben die Wahrscheinlichkeit $1/64$ 2 gleiche Farben treten je 9 – mal auf haben die Wahrscheinlichkeit $9 \cdot 1/64$ 1 festgelegte Farbe $3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 27$ mal haben die Wahrscheinlichkeit $27 \cdot 1/64$ 3 verschiedene Farben treten $4 \cdot 6 = 24$ mal auf haben die Wahrscheinlichkeit $24 \cdot 1/64$	Gruppe 3. Ereignis grüne Kugel: 3x Blau 0x 2x Blau 1 = 1 1x Blau $3 + 1 + 1 + 1 = 6$ Gruppe 4. Ereignis gelbe Kugel: 3x Blau 0x 2x Blau 1 = 1 1x Blau $3 + 1 + 1 + 1 = 6$

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Variation mit Wiederholung	★ Herleitung der Formel Zählprinzip)	
	★ Herleitung der Formel aus Permutation ohne Wiederholung 1. Stufe: n Möglichkeiten (Menge1 enthält n Elemente) 2. Stufe: n Möglichkeiten (Menge2 enthält n Elemente) 3. Stufe: n Möglichkeiten (Menge3 enthält n Elemente) k-te Stufe: n Möglichkeiten (Mengek enthält n Elemente) Unter „Menge“ ist jeweils der Status der Urne zu verstehen: wieviele Kugeln sind in der Urne enthalten. da nach jedem Ziehen wieder zurückgelegt wird, sind bei jedem Zug die gleichen Bedingungen, wie beim 1. Zug vorhanden, also auch die gleiche Anzahl der Möglichkeiten. Um die Möglichkeiten auszurechnen, müssen die unterschiedlichen Anzahlen miteinander multipliziert werden. Da hier eine Gleichwertigkeit vorliegt, da jedes der k Positionen mit jedem der n Elemente belegt werden kann, folgt aus $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k = n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$	

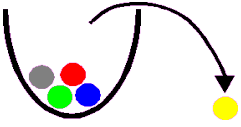
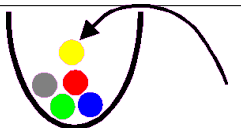
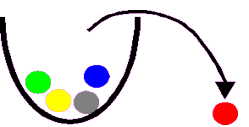
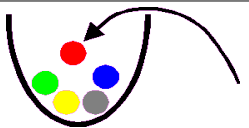
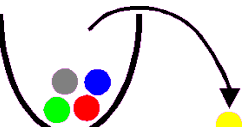
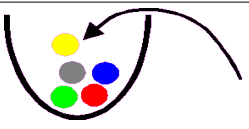
Wenn aus n Objekten k Objekte mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge ausgewählt werden sollen, dann kann jedes der n Objekte auf jedem der k Plätze der Auswahl erscheinen

Mengendarstellung: Die Menge

$$B_n^k = \{(x_1; x_2; \dots; x_k) \mid x_i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}\}$$

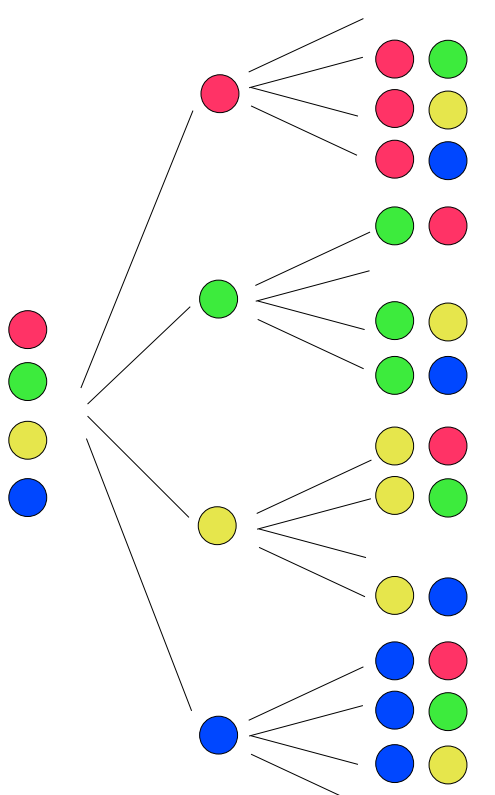
aller Variationen ohne Wiederholung von n Dingen zur Klasse k (für $n, k \in \mathbb{N}$). Sie heißt auch Menge aller Permutationen ohne Wiederholung von n Dingen zur Klasse k. Sie hat die oben angegebene Anzahl von Elementen.

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln		Musterbeispiele
Variation mit Wiederholung		Man hat die Urne mit den fünf verschieden farbigen Kugeln.	
		Von diesen fünf Kugeln wird nun eine beliebige Kugel zufällig herausgegriffen. In unserem Fall erwischen wir die gelbe Kugel. Da aber fünf verschiedene Kugeln in unserer Urne lagen, hatten wir für diesen Zug auch 5 Möglichkeiten , eine dieser fünf Kugeln zu ziehen.	
		Nun wird die eben gezogene Kugel wieder zu den anderen Kugeln in die Urne zurückgelegt . Man hat nun wieder alle fünf verschiedenen Kugeln in der Urne.	
		Jetzt wird ein zweites Mal gezogen. Durch das Zurücklegen der – in unserem Fall gelben – Kugel hat man wieder alle fünf Kugeln in der Urne und somit auch wieder 5 Möglichkeiten für den zweiten Zug, der unter den gleichen Bedingungen stattfindet, wie der erste.. Diesmal erwischen wir die rote Kugel.	
		Wie eben wird nun die gezogene – rote – Kugel wieder zu den anderen Kugeln in die Urne zurückgelegt , so dass man wieder alle fünf verschiedene Kugeln in der Urne hat.	
		Nun wird ein drittes und letztes Mal gezogen. Auch hier hat man durch das Zurücklegen wieder alle fünf Kugeln zur Auswahl. Somit hat man auch wieder 5 Möglichkeiten , die dritte Kugel zu ziehen. In unserem Fall erwischen wir erneut die gelbe Kugel, was nur durch das Zurücklegen möglich wurde.	
		Um Ordnung zu schaffen, legen wir die eben gezogen Kugel wieder in die Urne zurück.	

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Variation ohne Wiederholung	● ohne Zurücklegen (ohne Wiederholungen) Alle k-Permutationen, die aus einer n-elementigen Menge erzeugt werden können $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$ Für die Auswahl ● von k Elementen ● aus einer Menge mit n Elementen ● ohne Wiederholung (das heißt immer, man könnte die k Elemente auch mit einem Zug aus der Urne ziehen und es gilt immer $k \leq n$) ● mit Berücksichtigung der Reihenfolge Voraussetzungen: ● Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander. ● Es werden einige (k) Elemente ausgewählt. ● Beim Ziehen ohne Zurücklegen muss $k \leq n$ sein, da irgendwann die Urne leer ist. ● Ein Element kann nicht mehrmals ausgewählt werden. Interpretationen ● Anzahl der Möglichkeiten $k \leq n$ Elemente aus einer Urne mit n Elementen auszuwählen, wobei gezogene Kugel nicht wieder zurückgelegt werden. ● Anzahl der Möglichkeiten, $k \leq n$ verschiedene (unterscheidbare) Objekte auf n Urnen zu verteilen, wobei in jeder Urne nur 1 Objekt liegt. (das schließt ein, dass einige Urnen leer bleiben) ● Anzahl der k-stelligen Sequenzen aus n verschiedenen Zeichen.	Prototypisches Beispiel Gold, Silber, Bronze 8 Läufer stehen im Finale der Olympischen Spiele. Wieviele Möglichkeiten gibt es, daß die 8 Läufer Gold, Silber und Bronze unter sich ausmachen. Es kann nur einmal Gold, einmal Silber und einmal Bronze vergeben werden (= ohne Wiederholung). Es kommt auf die Reihenfolge an. d.h. z.B. Wenn wir wissen, daß Läufer a,b,c die Medaillen unter sich ausgemacht haben, dann gibt es noch mehrere Möglichkeiten, wer jeweils welches Metall erhalten haben könnte (Reihenfolge relevant). $N = \text{Anzahl der Finalisten} = 8$ $k = \text{Medaillen} = 3$ $A = \frac{N!}{(N-k)!}$ $A = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{40320}{120} = 336$ Es gibt 336 Möglichkeiten, unter 8 Finalisten Gold, Silber und Bronze zu verteilen.

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Variation mit Wiederholung	★ Baumdiagramm Anzahl der Merkmale: $n = 4$ Anzahl der Versuche: $k = 2$ $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{2!} = 12$ 	In der ersten Ebene fällt kein Teilbaum weg, da erst ab doppeltem Auftreten ein Zweig gelöscht werden muss. In jedem Teilbaum der 2. Stufe fehlt eine Ausprägung, deshalb entstehen aus den 16 Möglichkeiten der Variation mit Wiederholung nur noch 12 Möglichkeiten: $n^2 - n = n(n-1)$ Doppelte Farben treten keine auf $0 \cdot 1/12$ verschiedene Farben treten zweimal auf $2 \cdot 1/12$

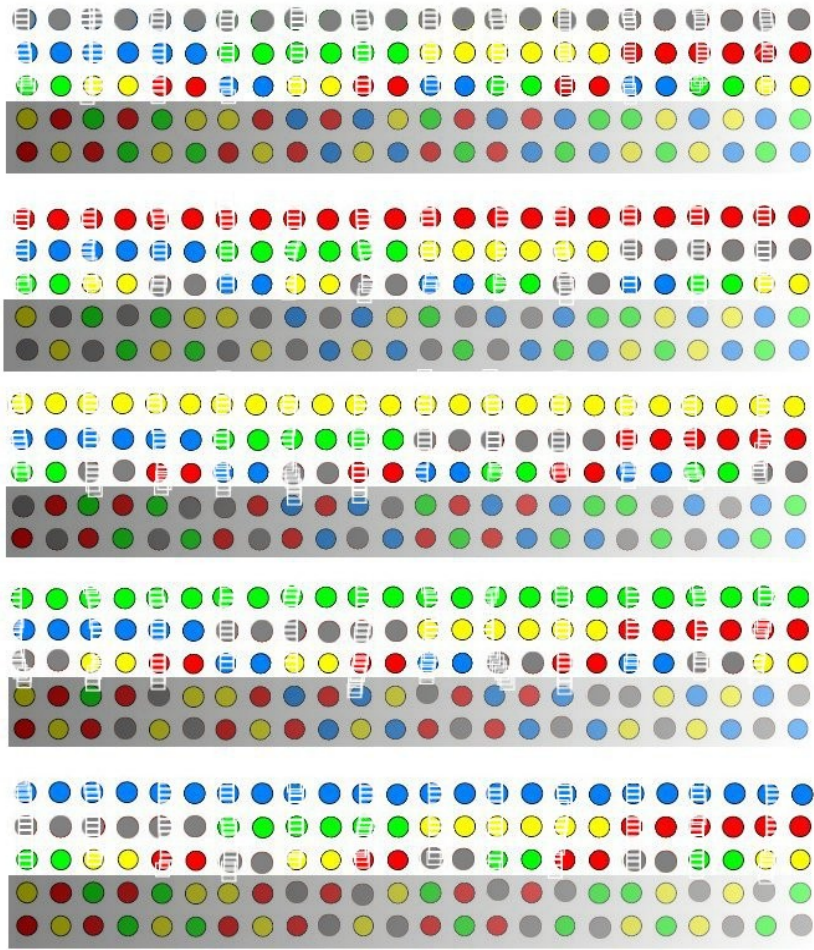
Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
	Anzahl der Merkmale: $n = 4$ Anzahl der Versuche: $k = 3$ Anzahl der Ereignisse: $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{1!} = 24$ Ebene 1 Ereignis blaue Kugel: Ereignis gelbe Kugel: Ebene 2 fällt je Teilbaum der 1. Ebene 1 Teilbaum weg = Ebene 3 In der 3. Ebene fällt je Teilbaum der 2. Ebene 2 Teilbäume weg durch die fehlenden Teilbäume der 1. Ebene $12 \cdot 2$ Teilbäume $4 \cdot 4$ $64 - 24 - 16 = 24$ Das Baumdiagramm hat ab der 2. Ebene Lücken: in der 2. Ebene 4 Teilbäume in der 3. Ebene zusätzlich je Teilbaum der 2. Ebene: 3 Teilbäume 3 gleiche Farben treten nicht auf 2 gleiche Farben treten nicht auf	Ereignis grüne Kugel: Ereignis rote Kugel: 4 Teilbäume jede 3- Kombination an Farben tritt $3! = k! = 6$ mal auf (Permutation von 3 Elementen) Es gibt 4 mögliche Kombinationen aus 4 Farben 3 zusammenzustellen, damit ergibt sich als Gesamtzahl: $n \cdot 3! = 4 \cdot 3! = 4! = 24$

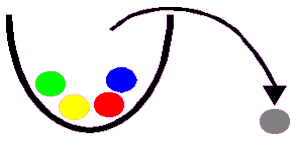
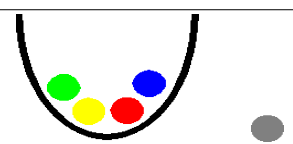
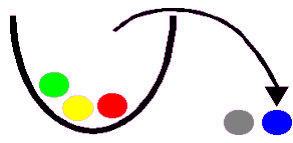
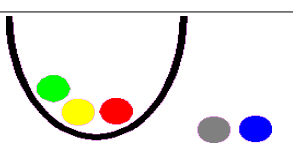
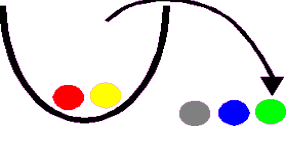
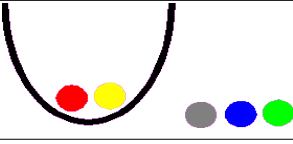
Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Variation mit Wiederholung	★ Herleitung der Formel (Zählprinzip)	Beispiel In einer Urne liegen 10 verschiedene Kugeln beschriftet von 1 bis 10. Aus dieser Urne werden nun nacheinander 3 Kugeln gezogen. Wenn die Reihenfolge nun eine Rolle spielt, also 1,2,3 eine andere Lösung ist als 3,2,1, wieviele Lösungen gibt es? Stellt man sich vor, dass die gezogenen Kugeln in Eierbecher abgelegt werden, so können im ersten Eierbecher 10 verschiedenen Kugeln liegen. Im zweiten nur noch 9, da eine bereits im ersten Becher liegt. Im dritten und letzten können nur noch 8 verschiedene liegen. Es ergeben sich: $10 \cdot 9 \cdot 8$ Möglichkeiten, oder da hier $n=10$: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$. Dabei ist beim letzten Faktor $(n-2)$ die Zahl, die subtrahiert werden muss gleich $k+1$, wenn k die Anzahl der zu ziehenden Kugeln ist. Also gibt es genau $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1)$ Möglichkeiten: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \dots \cdot 2 \cdot 1$ ausgedrückt in Fakultätsschreibweise heißt das: $n! / (n-k)!$ Nach der Definition des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$ folgt daraus $\binom{n}{k} k! = \frac{n!}{(n-k)!}$ 1 2 3 4 n n-1 n-2 n-3 k k+1 k+2 n-k+1 n-k n-k-1 n 2 1 } $(n-k)!$ Bei der Variation ohne Zurücklegen sollen auf k Plätzen n verfügbare Elemente gesetzt werden, dabei ist $k \leq n$. Jedes Element kann dabei höchstens einen Platz einnehmen. Mengendarstellung: Die Menge $A_n^k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \setminus \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}\}\}$ ist die Menge aller Variationen ohne Wiederholung von n Dingen zur Klasse k (für $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$). Sie heißt auch Menge aller Permutationen ohne Wiederholung von n Dingen zur Klasse k. Sie hat die oben angegebene Anzahl von Elementen.
	★ Herleitung der Formel aus Permutation ohne Wiederholung	
	1. Stufe: n Möglichkeiten (Menge1 enthält n Elemente) 2. Stufe: $n-1$ Möglichkeiten (Menge2 enthält $n-1$ Elemente) 3. Stufe: $n-2$ Möglichkeiten (Menge3 enthält $n-2$ Elemente) k-te Stufe: $n-k+1$ Möglichkeiten (Mengek enthält $n-k+1$ Elemente) Unter „Menge“ ist jeweils der Status der Urne zu verstehen: wieviele Kugeln sind in der Urne enthalten. Dadurch, dass kein Zurücklegen stattfindet, sind vor jedem Zug ein Element weniger in der Urne. das Abbrechen nach k Ziehungen führt zu dem Ergebnis: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_{n-k+1} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = n! / (n-k)!$ (Wenn man das Produkt zu $n!$ ergänzt, muss man durch $(n-k)!$ teilen, damit das Ergebnis erhalten bleibt)	
	★ Herleitung der Formel aus Permutation mit Wiederholung	
	Die Anzahl von Permutationen von n Elementen, bei denen n_1 Elemente gleich sind beträgt: $n! / n_1!$ Möglichkeiten. 1. Stufe: n Möglichkeiten (Menge1 enthält n Elemente) 2. Stufe: $n-1$ Möglichkeiten (Menge2 enthält $n-1$ Elemente) 3. Stufe: $n-2$ Möglichkeiten (Menge3 enthält $n-2$ Elemente) k-te Stufe: $n-k+1$ Möglichkeiten (Mengek enthält $n-k+1$ Elemente) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 1$ Da in diesem Fall $n-k$ Elemente nicht ausgewählt werden, kann die Anordnung dieser Elemente als gleich (da unbekannt) und ununterscheidbar angesehen werden – diese Kugeln werden einfach als Haufen dazugegeben. Damit entsteht aus der Permutation mit Wiederholung die Formel $n! / (n-k)!$ Für n Elemente gibt es $n!$ Anordnungen, bei denen $(n-k)$ nicht unterscheidbar sind.	

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Variation mit Wiederholung	★ Herleitung der Formel aus Variation ohne Wiederholung Die Anzahl der Variation einer n-elementigen Menge in Gruppen zu k-Elementen ist n^k. In diesem Fall konnte man bei jeder Ziehung wieder auf n Elemente der Menge zurückgreifen, da die gezogenen Kugeln wieder zurückgelegt wurden. In diesem Fall sind aber bei der 2. Ziehung nur noch n-1 Elemente vorhanden, bei der 3. Ziehung n-2 Element usw. 1. Stufe: n Möglichkeiten (Menge1 enthält n Elemente) 2. Stufe: n-1 Möglichkeiten (Menge2 enthält n-1 Elemente) 3. Stufe: n-2 Möglichkeiten (Menge3 enthält n-2 Elemente) k-te Stufe: n-k+1 Möglichkeiten (Mengek enthält n-k+1 Elemente) dadurch entstehen k: 1 2 3 k Elemente $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ Möglichkeiten	Anzahl der Merkmale: $n = 5$ Anzahl der Versuche: $k = 3$ Anzahl der Ergebnisse: $5!/2! = 60$ 
	★ Beispiel Werden nur 3 Kugeln gezogen, erkennt man, dass die letzten beiden Kugeln keine Rolle spielen und beliebig vertauscht werden können. Das führt aber dazu, dass von den anderen Permutationen jeweils zwei identisch sind, so dass eine gelöscht werden kann (im Bild rechts durch kleine weiße Gitter abgedeckt). Die Anzahl der zu löschenden entspricht genau den möglichen Permutationen, die nicht mehr unterschieden werden können, also $2!$. Somit ist in diesem Fall nur noch die Hälfte der Permutationen vorhanden: $5! / 2!$. Man erkennt aus dem Bild, wenn der grau markierte Bereich um eine Reihe erhöht wird, was dem Ziehen von 2 Kugeln aus 5 entspricht, sind jeweils 6 verbleibende Permutationen gleich und die Anzahl von 3 Permutationen auf eine zusammengeschrumpft. Also verbleiben aus der Ausgangsmenge noch $1/6$ der Auswahlen: $5! / 3!$	

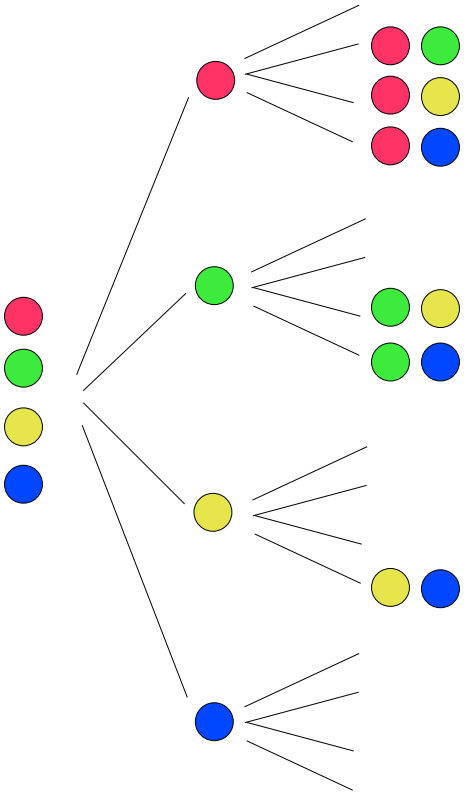
Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

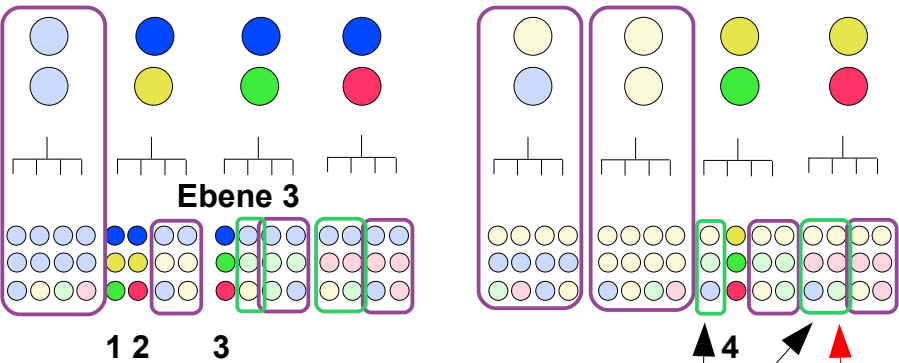
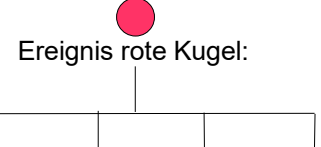
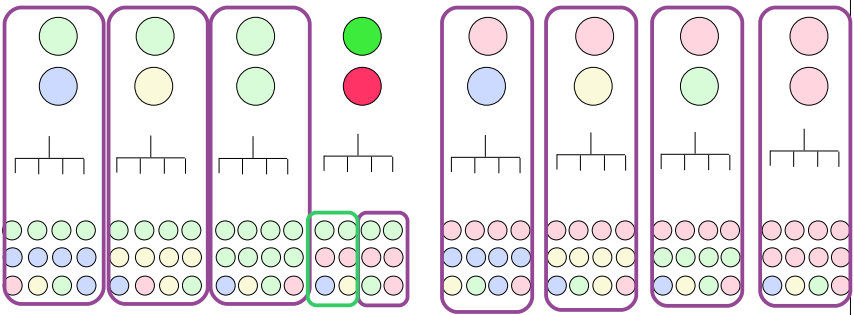
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Variation mit Wiederholung	 Man hat die Urne mit den fünf verschieden farbigen Kugeln.	
	 Von diesen fünf Kugeln wird nun eine beliebige Kugel zufällig herausgegriffen. In unserem Fall erwischen wir die graue Kugel. Da aber fünf verschiedene Kugeln in unserer Urne lagen, hatten wir für diesen Zug auch 5 Möglichkeiten, eine dieser fünf Kugeln zu ziehen.	
	 Diese eben gezogene Kugel wird nun nicht zurückgelegt, sondern außerhalb der Urne liegen gelassen.	
	 Jetzt wird ein zweites Mal gezogen. Dadurch, dass die bereits gezogene Kugel nicht zurückgelegt wurde, befinden sich nur noch vier verschiedene Kugeln in der Urne. Man hat jetzt somit nur noch 4 Möglichkeiten, eine weitere Kugel zu ziehen. Bei uns ist dies die blaue Kugel.	
	 Auch diese -blaue- Kugel wird nun ebenso, wie die vorherige, nicht zu den restlichen Kugeln in die Urne zurückgelegt, sondern bleibt ebenfalls außen liegen.	
	 Nun wird ein drittes und letztes Mal gezogen. Dadurch, dass die bisher gezogenen Kugeln nicht zurückgelegt wurden, haben wir in der Urne nur noch drei verschiedene Kugeln zur Auswahl. Wir haben also 3 Möglichkeiten, die letzte -bei uns grüne- Kugel zu ziehen.	
	 Genau wie bisher wird auch diese Kugel nicht in die Urne zurückgelegt.	

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Kombination	■ Kombination <i>(ohne Beachtung der Reihenfolge)</i> Jede mögliche Anordnung aus n vorhandenen Elementen eine Gruppe von k Elementen herauszuziehen heißt Kombination dieser Elemente. Auf die Reihenfolge der Elemente innerhalb der Gruppe soll es dabei nicht ankommen. Rot-weiss-grün soll als das gleiche Element wie grün-weiss-rot, weiss-grün-rot usw. angesehen werden. Auswählen, bei denen die Reihenfolge keine Rolle spielt heißen auch ungeordnete Stichproben. Bei Kombinationen spielt die Reihenfolge der Elemente keine Rolle. Deshalb wird bei Variationen zwischen abc , cba, bac ,... unterschieden, bei Kombinationen aber nicht. Damit gibt es mehr Variationen als Kombinationen, weil mehrere Variationen zu einer Kombination zusammengefasst werden. $\frac{n!}{(n-k)!}$ Von der Anzahl der Variationen sind alle die zu entfernen, die nur durch Vertauschen der k gleichen Elemente entstehen. Die Anzahl der Vertauschungen von k Elementen ist nach dem Zählprinzip k ! Also ist die durch Variation entstandene Anzahl durch k! zu dividieren, da diese als eine Kombination angesehen werden. $\frac{n!}{(n-k)! k!}$ Bei einer Kombination werden ● k Elemente ausgewählt ● die nicht angeordnet werden (ohne Beachtung der Reihenfolge) Anzahl der Merkmale: n Anzahl der Versuche: k Markanter Text: ... werden in einem Zug gezogen	

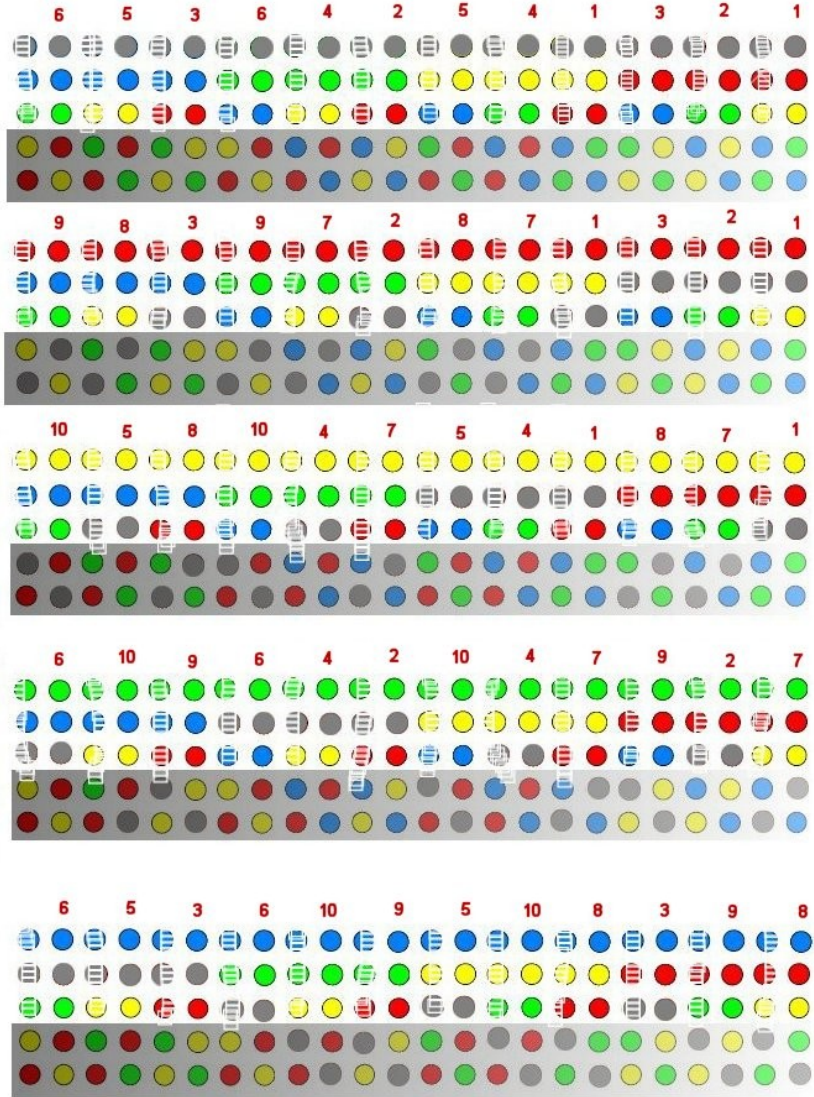
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Kombination ohne Wiederholung	• Kombination ohne Zurücklegen (ohne Wiederholungen) Bei einer konkreten Kombination wird jedes der n Objekte genau einmal oder gar nicht ausgewählt, deswegen handelt es sich um Kombinationen ohne Wiederholung (= ohne Zurücklegen). Aus einer Menge von n Elementen lassen sich ohne Berücksichtigung der Reihenfolge: $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$ viele Tupel mit k Elementen bilden. Alle k-Teilmengen, die aus einer n-elementigen Menge erzeugt werden können Für die Auswahl • von k Elementen • aus einer Menge mit n Elementen • ohne Wiederholung (das heißt immer, man könnte die Elemente auch in einem Zug aus der Urne ziehen) • ohne Berücksichtigung der Reihenfolge Voraussetzungen: • Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander. • Es werden einige (k) Elemente ausgewählt. • Beim Ziehen ohne Zurücklegen muss $k \leq n$ sein, da irgendwann die Urne leer ist. • Ein Element kann nicht mehrmals ausgewählt werden. Interpretationen • Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge zu ziehen ($k \leq n$). Die Kugeln können gleichzeitig gezogen werden. • Anzahl der Möglichkeiten, k gleiche (nicht unterscheidbare) Kugeln auf n unterscheidbare Urnen zu verteilen, wobei jede Urne höchstens eine Kugel erhalten kann. • Anzahl der n-stelligen Sequenzen mit k-Mal dem Zeichen "1" und (n-k)-Mal dem Zeichen "0". • Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.	Prototypisches Beispiel Ziehung der Lottozahlen Aus 49 nummerierten Kugeln werden nacheinander 6 Kugeln gezogen. Wieviele mögliche 6 Zahlen können ausgewählt werden ? Wichtig: Es werden einige Kugeln aus mehreren Kugeln gezogen. Eine gezogene Kugel kann nicht noch einmal ausgewählt werden. Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Kugeln gezogen werden. $N=49$; $k=6$; $A = N! / ((N-k)! \cdot k!)$ $A = 49! / ((49-6)! \cdot 6!) = 13983816$ Es gibt ca. 14 Millionen Möglichkeiten, 6 Zahlen im Lotto anzukreuzen.

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Kombination ohne Wiederholung	★ Baumdiagramm Anzahl der Merkmale: $n = 4$ Anzahl der Versuche: $k = 2$ $\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! 2!} = 6$ 	Die Zusammenstellung von Teilmengen bewirkt, dass keine Farben doppelt auftreten können, weil jede Farbe nur einmal auftritt. Damit entfallen in jedem Teilbaum der Zweig mit den doppelten Farben. Im 1. Teilbaum der 2. Ebene entfällt – 1 Zweig mit den doppelten Farben 1 Im 2. Teilbaum der 2. Ebene entfällt – 1 Zweig mit den doppelten Farben und – 1 Zweig, der im 1. Teilbaum bereits in anderer Reihenfolge vorhanden ist. 2 Im 3. Teilbaum der 2. Ebene entfällt – 1 Zweig mit den doppelten Farben und – 1 Zweig, der im 1. Teilbaum bereits in anderer Reihenfolge vorhanden ist. – 1 Zweig, der im 2. Teilbaum bereits in anderer Reihenfolge vorhanden ist. 3 Im 4. Teilbaum der 2. Ebene entfällt – 1 Zweig mit den doppelten Farben und – 1 Zweig, der im 1. Teilbaum bereits in anderer Reihenfolge vorhanden ist. – 1 Zweig, der im 2. Teilbaum bereits in anderer Reihenfolge vorhanden ist. – 1 Zweig, der im 3. Teilbaum bereits in anderer Reihenfolge vorhanden ist. 4 Die Anzahl der Entfallenden Zweige wird bestimmt von der Anzahl der Merkmale, also n. Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen berechnet sich nach der Formel: $\frac{n(n+1)}{2}$ Von ursprünglich n^2 Zweigen sind $\frac{n(n+1)}{2}$ zu subtrahieren. $\frac{n(2n - n - 1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \stackrel{n=4}{=} 6$

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
	Anzahl der Merkmale: $n = 4$ Anzahl der Versuche: $k = 3$ Anzahl der Ereignisse: $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{4!}{1!3!} = 4$ Ebene 1 Ereignis blaue Kugel:  Ereignis gelbe Kugel:  Ebene 2 je Teilbaum der 1. Ebene fällt 1 Teilbaum mehr weg Ebene 3  1 2 3 4 entfällt wegen 1. Teilbaum Anordnung enthält blau $1 \cdot 4 = 4$ 6 3 entfällt wegen 2. Teilbaum Anordnung enthält rot-grün $2 \cdot 4 = 8$ 4 3 In der 3. Ebene fällt im 1. Teilbaum 1 Teilbaum aus 1. Ebene 6 Teilbäume aus VoW 1+2 Teilbäume im 2. Teilbaum 2 Teilbäume aus 1. Ebene 4 Teilbäume aus VoW 1+2 Teilbäume	 Ereignis grüne Kugel:  Ereignis rote Kugel:  In der 3. Ebene fällt im 3. Teilbaum 3 Teilbäume aus 1. Ebene 2 Teilbäume aus VoW 2 Teilbäume im 4. Teilbaum 4 Teilbäume aus 1. Ebene $3 \cdot 4 = 12$ 2 2 $4 \cdot 4 = 16$ $64 - 13 - 15 - 16 - 16 = 4$ Diese Anordnungen sind bereits bei Variation ohne Wiederholung entfallen Diese Anordnungen entfallen bei diesem Typ, da sie in anderer Reihenfolge bereits vorhanden sind.

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Kombination ohne Wiederholung	★ Herleitung der Formel (Zählprinzip)	Anzahl der Merkmale: $n = 5$ Anzahl der Versuche: $k = 3$ 
	★ Herleitung der Formel aus Variation ohne Wiederholung	
	Wenn man k Elemente aus einer Urne mit n Elementen zieht und die Reihenfolge beachten muss, erhält man $n!/(n-k)!$ Möglichkeiten. $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = n! / (n-k)!$ Jetzt sollen aber unterschiedliche Reihenfolgen wie eine Auswahl behandelt werden. k Elemente kann man aber auf $k!$ verschiedene Weise anordnen und genau diese sollen als eine Auswahl angesehen werden. Also ist der Ausdruck noch einmal durch $k!$ zu dividieren. $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = n! / (n-k)! \cdot k!$	
	★ Beispiel	
	In dem bei Permutation angegebenen Beispiels heißt das, es werden nur noch die aufgetretenen Farben gezählt, alle Vertauschungen innerhalb der Reihenfolge der Farben gelten als eine Anordnung. Da 3 verschiedenfarbige Kugeln immer in $3! = 6$ verschiedenen Anordnungen möglich sind, ist die Zahl der Variationen: $V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60 \text{ noch einmal durch } 3! = 6 \text{ zu dividieren}$ $C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = 10$ Diese 10 Anordnungen sind durchnummeriert und gleichzeitig die 6 jeweils gleichen Anordnungen mit der gleichen Nummer versehen. Man erkennt, dass die 6 gleichen Anordnungen über jeweils 3 Zeilen mit je 2 Anordnungen vertreten sind.	

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Kombination ohne Wiederholung	Auswahlprobleme ohne Zurücklegen können als Anordnungsprobleme aufgefasst werden. Die Zahl der möglichen Auswahlen kann ermittelt werden, indem die Zahl der Anordnungen ermittelt wird, bei denen die ausgewählten Objekte auf ausgezeichneten Plätzen angeordnet sind. Dieses Auswahlproblem kann auf die Ermittlung aller Anordnungen zurückgeführt werden, bei denen die ausgewählten Objekte auf den ersten Plätzen landen, wobei es weder bei den ausgewählten noch bei den nicht ausgewählten Objekten auf die Reihenfolge ankommt. Wenn aus n Objekten k ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge ausgewählt werden sollen, so gibt es jeweils die Klasse der k ausgewählten Objekte und die Klasse der $(n-k)$ nicht ausgewählten Objekte, in der es auf die Reihenfolge nicht ankommt. Dabei sind k und $n-k$ in der Formel austauschbar, da man die n Objekte in zwei Teilmengen teilt; welche davon die interessierende ist, hat keinen Einfluss auf die Anzahl der möglichen Aufteilungen. Mengendarstellung: Die Menge $C_n^k = \{(x_1; x_2; \dots; x_k) \mid x_i \in \{0, 1\}; \sum x_i = k\}$ ist die Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von n Dingen zur Klasse k (für $n \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{N}_0; n \geq k$).	

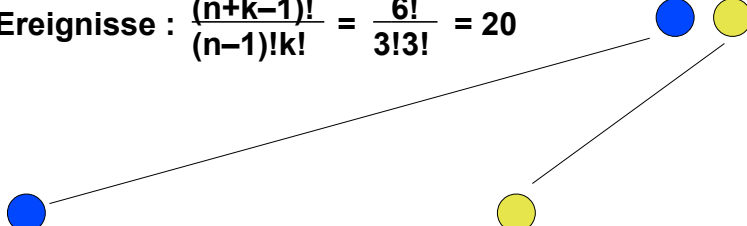
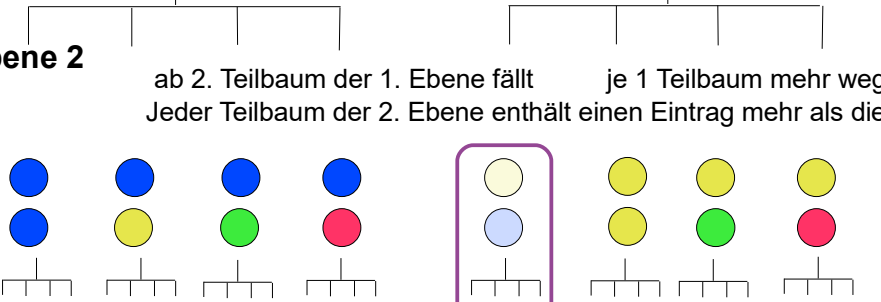
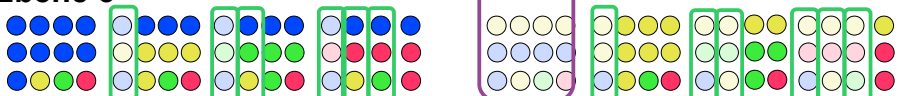
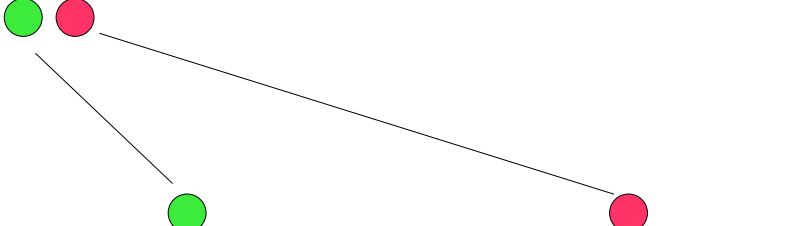
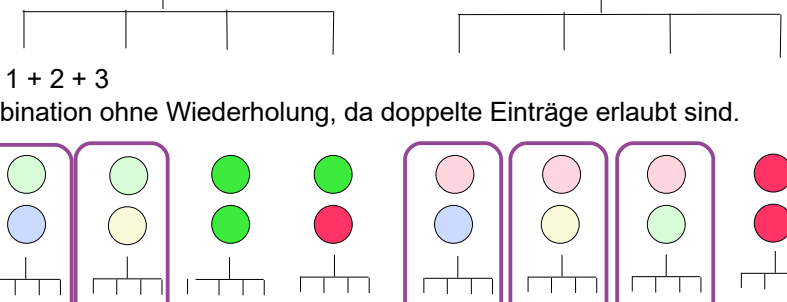
© Dipl.-Math.
Armin Richter

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Kombination mit Wiederholung	● Kombination mit Zurücklegen (mit Wiederholungen) Auf wieviele Arten kann man aus n verschiedenen Elementen k Elemente herausgreifen, wenn Wiederholungen gestattet sind und die Reihenfolge innerhalb der Anordnung nicht relevant ist? Äquivalente Formulierung : k "Kugeln" auf n "Zellen" verteilen. $\frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$ Alle k-Kombinationen, die aus einer n-elementigen Menge erzeugt werden können Für die Auswahl - von k Elementen - aus einer Menge mit n Elementen mit Wiederholung (das heißt, dass jede Ziehung aus der Urne wie die erste Ziehung ist) ohne Berücksichtigung der Reihenfolge Voraussetzungen: - Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander. - Es werden einige (k) Elemente ausgewählt. - Beim Ziehen mit Zurücklegen kann $k > n$ sein, da jeder Versuch die gleichen Bedingungen hat, wie der erste Versuch. - Ein Element kann mehrmals ausgewählt werden. Interpretationen - Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Kugeln mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge (ungeordnete Stichprobe) zu ziehen, wobei $k > n$ sein kann. - Anzahl der Möglichkeiten, k gleiche (nicht unterscheidbare) Kugeln auf n unterscheidbare Urnen zu verteilen, wobei jede Urne mehrere Kugeln erhalten kann und $k > n$ möglich ist.	Prototypisches Beispiel 3 Päckchen Zigaretten aus dem Zigarettenautomat Aus einem prall gefüllten Zigarettenautomat mit 15 Fächern kann man 15 verschiedene Zigaretten sorten auswählen. Sie erhalten den Auftrag, 3 Päckchen Zigaretten zu besorgen, wobei es egal ist, um was es sich dabei handelt, da es dem Raucher nur um Nikotin geht. Wieviele mögliche Zusammensetzungen von unterschiedlichen 3 Zigarettenpäckchen gibt es. Wichtig: Für jede Ziehung stehen alle Zigaretten sorten zur Verfügung. D.h. sie können mehrmals dieselbe Marke ziehen (mit Wiederholung). Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Zigarettenpäckchen gezogen werden (Reihenfolge irrelevant). $N = 15$ Zigaretten sorten $k = 3$ Zigarettenpäckchen $A = \frac{(N+k-1)!}{((N-1)! \cdot k!)}$ $A = \frac{(15+3-1)!}{((15-1)! \cdot 3!)}$ $A = 680$ mögliche unterschiedliche 3 Zigarettenpäckchen kombinationen

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Kombination mit Wiederholung	★ Baumdiagramm Anzahl der Merkmale: $n = 4$ Anzahl der Versuche: $k = 2$ $\binom{n+k-1}{k} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! 3!} = 10$	Die Zusammenstellung von Teilmengen mit Wiederholung bewirkt, dass doppelte Farben auftreten können. Damit werden in jedem Teilbaum der Zweig mit den doppelten Farben erhalten bleiben. Da die Reihenfolge aber nicht berücksichtigt wird, fallen die anderen Zweige ebenso weg, wie bei Kombination ohne Wiederholung: Im 1. Teilbaum der 2. Ebene entfällt – kein Zweig 0 Im 2. Teilbaum der 2. Ebene entfällt – 1 Zweig, der im 1. Teilbaum bereits in anderer Reihenfolge vorhanden ist. 1 Im 3. Teilbaum der 2. Ebene entfällt – 1 Zweig, der im 1. Teilbaum bereits in anderer Reihenfolge vorhanden ist. – 1 Zweig, der im 2. Teilbaum bereits in anderer Reihenfolge vorhanden ist. 2 Im 4. Teilbaum der 2. Ebene entfällt – 1 Zweig, der im 1. Teilbaum bereits in anderer Reihenfolge vorhanden ist. – 1 Zweig, der im 2. Teilbaum bereits in anderer Reihenfolge vorhanden ist. – 1 Zweig, der im 3. Teilbaum bereits in anderer Reihenfolge vorhanden ist. 3 Die Anzahl der Entfallenden Zweige wird bestimmt von der Anzahl der Merkmale, also n. Aber es wird nicht von 1 bis 4 addiert, sondern von 0 bis 3, also $n-1$. Damit ist die Summenformel: $\frac{(n-1)n}{2}$ Von ursprünglich n^2 Zweigen sind $\frac{(n-1)n}{2}$ zu subtrahieren. $\frac{n(2n - n + 1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \stackrel{n=4}{=} 10$

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Kombination mit Wiederholung	Anzahl der Merkmale: $n = 4$ Anzahl der Versuche: $k = 3$ Anzahl der Ereignisse: $\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{6!}{3!3!} = 20$ Ebene 1  Ebene 2 ab 2. Teilbaum der 1. Ebene fällt je 1 Teilbaum mehr weg Jeder Teilbaum der 2. Ebene enthält einen Eintrag mehr als die Kombination ohne Wiederholung, da doppelte Einträge erlaubt sind.  Ebene 3  1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 In der 3. Ebene fällt - im 1. Teilbaum 1+2+3 Teilbäume 6 - im 2. Teilbaum 1 Teilbaum aus 2. Ebene 1+2+3 Teilbäume 4	 1 + 2 + 3  17 18 19 20 In der 3. Ebene fällt - im 3. Teilbaum 2 Teilbäume aus 2. Ebene 2+3 Teilbäume 5 - im 4. Teilbaum 3 Teilbäume aus 2. Ebene 3 Teilbäume 3 $64 - 6 - 10 - 13 - 15 = 20$

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Kombination mit Wiederholung	★ Herleitung der Formel <i>(Die Herleitung der Formel aus den bisherigen Formeln ist nicht sehr einfach. Es gibt verschiedene Versuche, die Formel zu begründen. Die folgende scheint eine der einleuchtendsten zu sein)</i> Um das Problem zu lösen, führen wir einen neuen Begriff ein: Den Begriff Duplikator des Vorgängerobjekts für den Platz k. Dazu beachten wir, dass die gegebenen m unterscheidbaren Objekte in der Urne, aus welcher ausgewählt werden soll, immer mit Nummern versehen gedacht werden können. <i>(Im rechten Beispiel 1 grau; 2 blau; 3 gelb; 4 rot; 5 grün)</i> Und dass zu jeder Auswahl von k Objekten aus den m Objekten dann eindeutig bezüglich der Objektnummern eine Rangliste existiert. Eine beliebige Auswahl kann so immer unzweideutig als Rangliste interpretiert werden. In dieser Rangliste existieren dann k Plätze, auf denen die Objekte ihren Nummern nach angeordnet gedacht werden können. Durch die Wiederholungen kann es dann passieren, dass auch einmal alles Objekte mit derselben Nummer ausgewählt werden. Wiederholte Objekte wollen wir uns hier immer als Duplikate eines Originals vorstellen. Das ändert die Anzahl der Möglichkeiten nicht. Man stellt aber fest, dass bei jeder möglichen Auswahl immer mindestens ein Originalobjekt dabei ist. Duplikate kann es damit höchstens $k - 1$ Stück geben. <i>(Im rechten Beispiel die pink Quadrate)</i> In den Ranglisten sind dann die Duplikate der gleichen Nummer nach dem Originalobjekt angeordnet, denn dieses Originalobjekt kann man sich zuerst gezogen denken, bevor Duplikate nachgeliefert werden.	

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Kombination mit Wiederholung	Statt der Duplikate denken wir uns nun Geräte, Objekte quasi mit dem Namen "Duplikator", welche die Duplikate aus dem Vorgängerobjekt erzeugen. Diese Erzeugung ist eindeutig. Statt einem duplizierten Element auf Platz Nummer j kann man daher auch den zu dieser Platznummer j gehörenden Duplikator dj ausgewählt denken. Dieser dupliziert das Objekt vom davor liegenden Platz mit der Nummer j-1 und überlässt ihm anschließend den eigenen Platz mit der Nummer j. Dieser Duplikationsprozess ist eineindeutig. Man kann aus dem Duplikat und seiner Nummer in der Rangliste auch wieder den Duplikator zurückgewinnen. Damit haben wir das Problem, aus m Objekten in der Urne und den Duplikatoren für die Plätze 2, 3, . . . , k für unsere Rangliste k Objekte auszuwählen, wobei dann zuerst die Duplikatoren auf ihre Plätze der Rangliste gesetzt werden und anschliessend die Objekte der Grösse ihrer Nummern oder Ränge nach. Damit ist die Rangliste perfekt. So haben wir das Problem, eine Auswahl von k Elementen aus m Objekten plus k - 1 Duplikatoren zu treffen. Wir wählen also aus m + k - 1 Elementen k Elemente aus und erhalten damit $\binom{n + k - 1}{k}$	The diagram illustrates the concept of combinations with repetition using colored balls and their corresponding duplikators. The top part shows the selection of 5 balls from a set of 5 objects and 4 duplikators (total 9 balls). The bottom part shows the selection of 3 balls from a set of 3 objects and 2 duplikators (total 5 balls).

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Kombination mit Wiederholung	Mengendarstellung: Die Menge $D_n^k = \{(x_1; x_2; \dots x_n) \mid x_i \in \{0, 1, 2, \dots k\}; \wedge \sum x_i = k\}$ ist die Menge aller Kombinationen mit Wiederholung von n Dingen zur Klasse k (für $n \in \mathbb{N}$; $k \in \mathbb{N}_0$).	

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
	Zur Unterscheidung, ob sich um eine Kombination, Variation oder Permutation handelt kann der folgende Algorithmus verwendet werden: ● Wird aus der Menge der Elemente noch eine Auswahl getroffen? ● Falls nein, handelt es sich um eine Permutation. ● Sind die Elemente alle verschieden? ● Ja, Permutation ohne Wiederholung. ● Nein, Permutation mit Wiederholung. ● Falls ja, ist die Reihenfolge der Ziehung relevant? ● Falls ja, handelt es sich um eine Variation. ● Wird mit Zurücklegen gezogen? ● Ja, Variation mit Wiederholung ● Nein, Variation ohne Wiederholung ● Falls nein, handelt es sich um eine Kombination. ● Wird mit Zurücklegen gezogen? ● Ja, Kombination mit Wiederholung ● Nein, Kombination ohne Wiederholung <pre> graph TD A[In der Auswahl] --> B[kann oder muss ein bestimmtes Element mehrfach vorkommen.] A --> C[kann bzw. darf ein bestimmtes Element nur einmal vorkommen.] B --> D[mit Wiederholung] C --> E[ohne Wiederholung] D --> F[ist bedeutsam] E --> G[ist unwichtig] F --> H[alle Elemente der Ausgangsmenge müssen ausgewählt und angeordnet werden.] G --> I[beliebig viele Elemente können ausgewählt und müssen angeordnet werden.] H --> J[Permutation] I --> K[Variation] G --> L[Kombination] </pre>	Der Entscheidungsbaum <pre> graph TD Root[Kombinatorik] --> Q1[Werden alle Elemente verwendet?] Q1 -- ja --> P[Permutation] Q1 -- nein --> Q2[Ist die Reihenfolge der Elemente von Bedeutung?] Q2 -- ja --> V[Variation] Q2 -- nein --> K[Kombination] P --> Q3[Sind Wiederholungen zugelassen?] Q3 -- nein --> P_oW["P_oW = N!"] Q3 -- ja --> P_mW["P_mW = N! / (n1! * n2! * ... * nk!)"] V --> Q4[Sind Wiederholungen zugelassen?] Q4 -- ja --> V_mZ["V_mZ = N^k"] Q4 -- nein --> V_oZ["V_oZ = N! / (N - k)!"] K --> Q5[Sind Wiederholungen zugelassen?] Q5 -- ja --> K_mZ["K_mZ = (N+k-1) / n"] Q5 -- nein --> K_oZ["K_oZ = N / n"] </pre>

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele																																																
	1. Beispiel: Auf wie viele Arten können sich 3 Personen auf 3 Stühle verteilen? Lösung: Klärung der Fragen 1. - 4.? <table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>die Kugeln entsprechen den 3 Personen</td><td>$n = 3$</td><td>P</td></tr><tr><td>2</td><td>die 3 Stühle entsprechen 3 Ziehungen</td><td></td><td>P_{oW}</td></tr><tr><td>3</td><td>da sich eine Person nur auf einen Stuhl setzen kann, kann eine Kugel nicht zweimal gezogen werden</td><td></td><td></td></tr></table> Permutation Damit kennt man die Anzahl der Möglichkeiten, nämlich $n! = 3! = 6$. 2. Beispiel: Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es bei einem 4-fachen Würfelwurf? <table><tr><td></td><td>die Kugeln entsprechen den 6 Augenzahlen</td><td>$n=6$</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>Es sind 4 Würfe</td><td>$k=4$</td><td>V/K</td></tr><tr><td>2</td><td>es ist entscheidend in welcher Reihenfolge die Augenzahlen kommen</td><td></td><td>V</td></tr><tr><td>3</td><td>die Augenzahlen können sich wiederholen</td><td></td><td>V_{mW}</td></tr></table> Variation mit Wiederholung – k-Tupel aus einer n-Menge Damit kennt man die Anzahl der Möglichkeiten, nämlich $n^k = 6^4 = 1296$					1	die Kugeln entsprechen den 3 Personen	$n = 3$	P	2	die 3 Stühle entsprechen 3 Ziehungen		P_{oW}	3	da sich eine Person nur auf einen Stuhl setzen kann, kann eine Kugel nicht zweimal gezogen werden				die Kugeln entsprechen den 6 Augenzahlen	$n=6$		1	Es sind 4 Würfe	$k=4$	V/K	2	es ist entscheidend in welcher Reihenfolge die Augenzahlen kommen		V	3	die Augenzahlen können sich wiederholen		V_{mW}	<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>																
1	die Kugeln entsprechen den 3 Personen	$n = 3$	P																																															
2	die 3 Stühle entsprechen 3 Ziehungen		P_{oW}																																															
3	da sich eine Person nur auf einen Stuhl setzen kann, kann eine Kugel nicht zweimal gezogen werden																																																	
	die Kugeln entsprechen den 6 Augenzahlen	$n=6$																																																
1	Es sind 4 Würfe	$k=4$	V/K																																															
2	es ist entscheidend in welcher Reihenfolge die Augenzahlen kommen		V																																															
3	die Augenzahlen können sich wiederholen		V_{mW}																																															

© Dipl.-Math.
Armin Richter



Treff
Lernen

CHRISTINA STRAUCH

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
	In einer Urne befinden sich vier schwarze, sechs weiße und fünf rote Kugeln, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. a) aus der Urne wird eine Kugel gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse A: Die gezogene Kugel ist weiß B: Die gezogene Kugel ist nicht rot C: Die gezogene Kugel ist schwarz oder nicht weiß b) aus der Urne werden nacheinander ohne Zurücklegen 2 Kugeln entnommen. Die Farbe der entnommenen Kugeln wird notiert. Bestimme die Ergebnismenge Das Ereignis D sei: Es werde eine schwarze und eine weiße Kugel oder zwei rote Kugeln gezogen. Geben Sie die zu D gehörende Ereignismenge an und bestimmen Sie Wahrscheinlichkeit P(D) c) Nun werden aus der Urne mit einem Griff drei Kugeln entnommen. (= Kombination ohne Wiederholung: „mit einem Griff“ kann man keine Reihenfolge bestimmen und auch nicht wieder Zurücklegen) Die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse E, F und G sind wie folgt gegeben: Lösung zu a) Alle Fragestellungen gehen von 15 Kugeln aus und 1 Kugel wird gezogen. 1 Kugeln ohne zurücklegen mit Reihenfolge: $V_{oW} \frac{15!}{1!} = 15$ A: 1 weiße Kugeln : 6 Anzahl: Permutation ohne Wiederholung $n=1 : 1!$ $P(A) = \frac{6}{15}$ B: 1 nicht rote Kugel : 10 Anzahl: Permutation ohne Wiederholung $n=1 : 1!$ $P(A) = \frac{10}{15}$ C: 1 schwarze oder nicht weiße Kugel : 9 Anzahl: Permutation ohne Wiederholung $n=1 : 1!$ $P(A) = \frac{9}{15}$	Lösung zu b) Alle Fragestellungen gehen von 15 Kugeln aus 2 Kugeln werden gezogen ohne Zurücklegen Reihenfolge ist zu unterscheiden, da w,s und s,w gesondert zu zählen sind $V_{oW} \frac{15!}{13!} = 15 \cdot 14$ 1 weiße Kugeln 1 schwarze : $6 \cdot 4$ Anzahl: Permutation ohne Wiederholung $n=2 : 2!$ (da weiß-weiß oder schwarz-schwarz nicht erlaubt sind) 2 rote Kugeln: $5 \cdot 4$ Anzahl: Permutation ohne Wiederholung $n=1 : 1!$ $P(A) = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4}{15 \cdot 14} = \frac{68}{210} = \frac{34}{105}$ Lösung zu c) $P(E) = \frac{\frac{4 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 3}}{\frac{15}{3}}$ Der Binomialkoeffizient im Nenner besagt: Ziehe 3 Kugeln aus 15 ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge Der Binomialkoeffizient ist die Formel für Kombination ohne Wiederholung Der erste Binomialkoeffizient im Zähler besagt: Ziehe 3 Kugeln aus einer Menge von 4 oW und oR das ist die Möglichkeit, aus 4 schwarzen Kugeln 3 schwarze auszuwählen Der zweite Binomialkoeffizient im Zähler besagt: Ziehe 3 Kugeln aus einer Menge von 6 oW und oR das ist die Möglichkeit, aus 6 weißen Kugeln 3 weiße auszuwählen Der dritte Binomialkoeffizient im Zähler besagt: Ziehe 3 Kugeln aus einer Menge von 5 oW und oR das ist die Möglichkeit, aus 5 roten Kugeln 3 rote auszuwählen

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
	Damit erhält man im Zähler die Anzahl 3 weiße aus 6 weißen zu ziehen, 3 rote aus 5 roten zu ziehen und 3 schwarze aus 4 schwarzen zu ziehen. Damit erhält man die Anzahl bei 3 Ziehungen 3 mal die gleiche Farbe zu ziehen. $P(F) = 3 \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{14}$ Die sinkenden Faktoren im Nenner lassen darauf schließen, dass es sich um eine Auswahl ohne Wiederholung handelt, da die Anzahl der möglichen Fälle zurückgeht. Die Zahlen im Zähler lassen darauf schließen, dass man - beim 1. mal eine schwarze, - beim 2. mal eine weiße - beim 3. mal eine rote Kugel zieht Eine zweite mögliche Interpretation ist, dass 6 weiße Kugeln vorhanden sind: es wird beim 1. 2. und 3. mal einen weißen Kugel gezogen Eine dritte mögliche Interpretation ist, dass 6 weiße Kugeln und 5 rote Kugeln vorhanden sind: es wird beim 1. 3. eine weiße Kugel gezogen und beim 2. mal eine rote gezogen. Eine vierte mögliche Interpretation ist, dass 6 weiße Kugeln und 4 schwarze Kugeln vorhanden sind: es wird beim 1. 2. eine weiße Kugel gezogen und beim 3. mal eine schwarze gezogen. Bleibt die Frage zu klären, welche dieser Möglichkeiten kann man das Ergebnis aus 3 verschiedenen Wegen erreichen. Das ist bei jeder Interpretation möglich, da es gleichgültig ist, welche Kugel zuerst gezogen wird.	

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
	Aufgabe 1 Würfel 2 Seiten mit Augenzahl 2 2 Seiten mit Augenzahl 3 1 Seite mit Augenzahl 1 1 Seite mit Augenzahl 4 Es wird 5 mal geworfen: a) Die Augenzahlen von 1 und 4 treten nicht auf Ausprägungen $n = 2$ Versuche $k = 5$ Mit Wiederholung: Es gibt mehr Versuche als Ausprägungen Reihenfolge : spielt keine Rolle => Kombination mit Wiederholung $\frac{n + k - 1}{k} = \frac{2 + 5 - 1}{5} = \frac{6}{5} = 6$ $P(2,2,2,2,2) + P(2,2,2,2,3) + P(2,2,2,3,3) + P(2,2,3,3,3)$ $+ P(2,3,3,3,3) + P(3,3,3,3,3)$ b) Der Würfel zeigt 5 mal dieselbe Augenzahl Ausprägungen $n = 4$ Versuche $k = 1$ Idee 1 Mit Wiederholung: Es gibt mehrmals gleiche Auswahl Reihenfolge : spielt keine Rolle => Kombination mit Wiederholung $\frac{n + k - 1}{k} = \frac{4 + 1 - 1}{1} = \frac{4}{1} = 4$ Idee 2 Der erste Wurf entscheidet, welche Zusammenstellung gemeint ist, damit gibt es 4 Möglichkeiten. $P(1,1,1,1,1) + P(2,2,2,2,2) + P(3,3,3,3,3) + P(4,4,4,4,4)$	c) Jede Augenzahl von 1 bis 4 kommt mindestens 1 mal vor $P(1,1,2,3,4) + P(1,2,2,3,4) + P(1,2,3,3,4) + P(1,2,3,4,4)$ Idee 1 In jedem Versuch kommt die Kombination 1,2,3,4 vor, also ist die Unterscheidung nur im 5. (oder 1.) Versuch vorhanden. Da es vier Ziffern gibt, gibt es 4 Möglichkeiten Idee 2 Es liegt eine Permutation von 5 Elementen ($=k$) mit Wiederholung vor Ausprägungen $n = 4$ Versuche $k = 5$ Die mögliche Anzahl ist $\frac{5}{2} = 10$ Teilmengen von 4 Elemente (=ohne Reihenfolge) zu je 2 Elementen (11,12,13,23,...) die bei jedem Versuch vorhanden sein sollen ohne Wiederholung (das sind die Zweiergruppen, bei denen 11, 22 nicht auftritt), gibt es $\frac{4}{2} = 6$ Diese 6 müssen von den 10 subtrahiert werden.

Grundwissen Mathematik: Jahrgangsstufe 10

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele																																																																								
	Ein Würfel wird zweimal geworfen berechne die Wahrscheinlichkeit für A: Es erscheint genau bei einem Wurf eine 6 Idee 1 Ausprägung $n = 2$ (6; keine 6) Versuche $k = 2$ ohne Wiederholung: da weder die 6 noch „keine 6“ doppelt auftreten sollen Reihenfolge : spielt eine Rolle, (6,x) ist was anderes als (x,6) => Variation ohne Wiederholung $\frac{n!}{(n-k)!} = 2! = 2 \qquad P(6,\bar{6}) + P(\bar{6},6)$ Ergibt 2 Möglichkeiten mit der Wahrscheinlichkeit von 1/6 und 5/6. Idee 2 Ausprägung $n = 6$ Versuche $k = 2$ Gesamtzahl $n^k = 6^2 = 36$ Davon sind zu subtrahieren alle beliebigen Kombinationen von 5 Elementen: $n^k = 5^2 = 25$ sowie eine Kombination (6;6) ergibt 10 Möglichkeiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit Idee 3 Ausprägung $n = 6$ Versuche $k = 1$ Die Möglichkeit 6 verschiedene Zahlen in Gruppen zu 1 anzuordnen ist $\frac{6}{1} = 6$ Das gilt sowohl für den 1. wie auch für den 2. Wurf, damit 12 Möglichkeiten. Davon ist zu subtrahieren der Durchschnitt (6,6) da nur genau eine 6 geworfen werden soll. Möglichkeiten 10 mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 für jeden Wurf: $10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$	B: Die Summe der Augenzahlen ist kleiner als 10 Idee 1 Bei zwei Würfeln kann die Augenzahl zwischen 2 und 12 liegen, Das sind 11 Möglichkeiten. Wenn die Summe kleiner als 10 sein soll, sind das 3 Möglichkeiten weniger, also 8. Die aber mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit. Höhere Summen bieten mehr Möglichkeiten des Zusammenstellens: $2 = 11$ $7 = 1+6 ; 2+5; 3+4$ Idee 2 Wie viele 2-er Teilmengen kann man aus 6 Elementen erzeugen: => Kombinationen mit Wiederholung $\frac{6+2-1}{2} = 21$ <table><tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr><tr><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td></td></tr><tr><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td></td><td></td></tr><tr><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>55</td><td>56</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>66</td><td></td><td></td><td></td></tr></table> ebenfalls mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten Idee 3 Es sind 6 Elemente in Gruppen zu 2 zu gliedern, mit Wiederholung, da auch (2;2) zugelassen sind und die Reihenfolge eine Rolle spielt, da (1;5) und (5;1) zu unterscheiden sind. <table><tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr><tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td></tr><tr><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td></tr><tr><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td></tr><tr><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td><td>56</td></tr><tr><td>61</td><td>62</td><td>63</td><td>64</td><td>65</td><td>66</td></tr></table> => Variation mit Wiederholung $n^k = 6^2 = 36$ Diese 36 Möglichkeiten haben die gleiche Wahrscheinlichkeit Aber wie komme ich auf die gültigen Möglichkeiten ?	11	12	13	14	15	16	22	23	24	25	26		33	34	35	36			44	45	46					55	56						66				11	12	13	14	15	16	21	22	23	24	25	26	31	32	33	34	35	36	41	42	43	44	45	46	51	52	53	54	55	56	61	62	63	64	65	66
11	12	13	14	15	16																																																																					
22	23	24	25	26																																																																						
33	34	35	36																																																																							
44	45	46																																																																								
	55	56																																																																								
		66																																																																								
11	12	13	14	15	16																																																																					
21	22	23	24	25	26																																																																					
31	32	33	34	35	36																																																																					
41	42	43	44	45	46																																																																					
51	52	53	54	55	56																																																																					
61	62	63	64	65	66																																																																					

© Dipl.-Math.
Armin Richter

CHRISTINA STRAUCH