Fundamentalsatz der Differenzial - Integralrechnung

Dieser Lehrsatz, der auch offiziell diese Bezeichnung trägt, schafft die Verbindung zwischen den Stammfunktionen und der Flächenberechnung. Erst durch die Gültigkeit dieses Satzes wird die Integralrechnung (=Stammfunktionen) für die Berechnung von Flächen und Volumen interessant. Im Abschnitt über die Berechnung der Untersummen wurde am Schluß des Abschnittes untersucht, wie die einzelnen Zahlen entstanden sind und die Schlußfolgerung gezogen, dass der Größe der Fläche von der oberen Grenze der Flächenberechnung abhängt (wenn die untere Grenze als Funktionswert 0 hat).

Zunächst müssen einige Begriffe eingeführt werden. Das ist zunächst etwas formal, hilft aber später Ordnung zu halten.

Satz:
Sei F,(x) eine Stammfunktion von f{x). dann ist eine Funktion F^x) ebenfalls Stammfunktion von f(x), wenn gilt:

$$F_2(x) = F_1(x) + C$$

Dieser Satz sagt nichts weiter aus. als das: Wenn man eine Stammfunktion hat, gibt es auch noch weitere, die sich aber nur durch die Addition einer konstanten Zahl unterscheiden, da eine addierte konstante Zahl beim Differenzieren wegfällt, kann man "rückwärts" nicht mehr schließen, was für eine konstante Zahl da ursprünglich gestanden hat. Nach diesem Satz gibt es genau eine Stammfunktion $F_2(x)$, die an einer Stelle x_0 den Wert 0 annimmt: $F_2(x_0) = 0$, nämlich die Funktion $F_2(x)$ mit $C = - F_1(x_0)$.

Um Irrtümern durch Gleichheit in den Variablenbezeichnungen zu vermeiden, wird vorübergehend die zu integrierende Funktion f(x) mit der Variablen t benutzt und als f(t) geschrieben.

Diese Funktion wird bezeichnet mit $F = \int_{x_0} f(t)\,dt$ und ihr Funktionswert wird bezeichnet mit $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

Definition:
Unter der Integralfunktion F(x) einer Funktion f(x) versteht man den Wert des Integrals

von f(t) an seiner oberen Grenze x

Diese Formel soll noch etwas erklärt werden. Man bildet die Stammfunktion von f(t), dabei erhält man F(t) und wenn an dem Integralzeichen am unteren Ende x_0 steht und am oberen Ende eine Variable x steht, dann soll man in die Stammfunktion F(t) dieses x als obere Grenze einsetzen und das x_0 als untere Grenze. Natürlich entsteht damit nichts anderes als die Funktion F(x). Deshalb nennt man diese Konstruktion auch etwas hochtrabend: Das Integral als Funktion seiner oberen Grenze. Eine der wichtigsten Eigenschaften dieser Funktion F(x), dass sie an der Stelle x_0 gleich Null ist: $F(x_0) = 0$. Damit ist die Nullstelle von der Stelle x_0 abhängig und man erhält für jedes x_0 eine andere Steile, an der die Integralfunktion Null ist, und trotzdem sind alle F(x) Stammfunktionen und Lösungen des Integrals.
Blickt man jetzt noch einmal zurück auf die Berechnung der Untersummen und der Entstehung der einzelnen Zahlen kann man die Fläche schreiben als

$$\text{Fläche} = F(2) = \int_0^2 x^2\,dx$$

In Worten: berechne die Stammfunktion und setze im Integral als oberes Ende des Integralzeichens den rechten, oberen Wert der zu berechnenden Fläche ein **und dieser Wert ist gleich dem Flächeninhalt.**
Genau das wird durch den Fundamentalsatz ausgedrückt.

Fundamentalsatz der Differenzial – Integralrechnung:

Ist f(t) eine stetige Funktion, so ist die Integralfunktion
differenzierbar mit der Ableitung F'(x) = f(x) und der Grenzwert der Ober- und Untersummen ist gleich und zwar mit dem Funktionswert der Integralfunktion an seiner oberen Grenze.

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Dieser Satz liefert den Zusammenhang zwischen der Flächenberechnung als Grenzwert unendlich schmaler Rechtecke und der Stammfunktion der Funktion, unter der der Flächeninhalt berechnet werden soll. Erst mit diesem Satz ist die Flächenberechnung über das Integral erlaubt. Zunächst sollen hier ein paar Schlußfolgerungen aus diesem Satz gezogen werden

1) Der Funktionswert der Integralfunktion an der Stelle x = a ist immer 0, geometrisch, da von a bis a keine Fläche entsteht und deshalb

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) = 0$$

2) Der Wert x = a ist aber auch die untere Grenze des Integrals. Also kann man schlußfolgern: Der Wert der Integralfunktion (Stammfunktion) an seiner unteren Grenze ist 0.

3) Ist der Flächeninhalt nicht vom Punkt 0 aus, sondern von einem beliebigen anderen Punkt a aus zu berechnen, geht man so vor, dass man die Fläche bis zum oberen x–Wert der Berechnung bestimmt und dann die zu viel berechnete Fläche bis zum unteren x–Wert (Anfangswert) wieder subtrahiert.

$$\int_0^b f(t)\,dt - \int_0^a f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Das gleiche Ergebnis kann man erzielen wenn man als untere Grenze nicht den Wert 0 sondern den Wert benutzt, von dem an die Fläche berechnet werden soll. Das führt bei der vorhergehenden Formel zu der verkürzten Form:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Ganz nebenbei entsteht dabei der Effekt, dass auch für sich änderndes b der Flächeninhalt an der unteren Grenze immer 0 bleibt.

4) Aus dem Bilden der Stammfunktion ist bekannt, dass zu jeder Stammfunktion noch eine unbekannte Konstante C zu addieren ist.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

wobei jeweils für x = a die Konstante C = − F(a) zu setzen Ist. Damit erhält man eine sich ändernde Konstante in Abhängigkeit von der unteren Grenze. Auf diesen Zusammenhang ist bereits zu Beginn dieses Abschnitts bei der Erklärung der Integralfunktion hingewiesen worden.

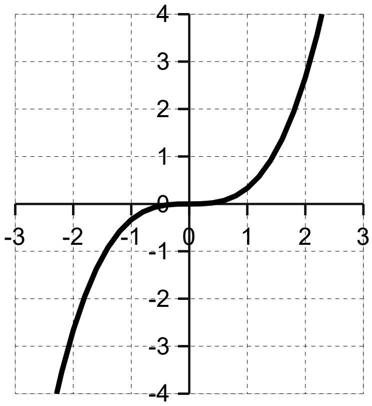
Geometrische Interpretation der Schlußfolgerung 3:
Es soll wieder die einfache Funktion $y = x^2$ betrachtet werden und die Berechnung des Flächeninhalts unter dieser Funktion, bzw die Integralfunktion bei unterschiedlicher unterer Grenze. Bei der Berechnung der Fläche über die Rechtecke wurde die Fläche von 0 bis 2 betrachtet. Diese Berechnung läßt sich jetzt in eine Integralform schreiben, die folgendermaßen aussieht:

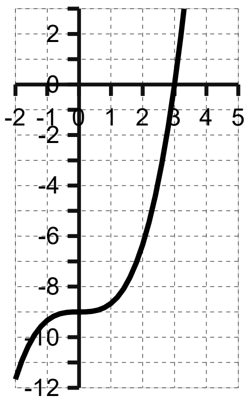
$$\text{Fläche} = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{2^3}{3} = F(2)$$

Betrachtet man diese Funktion als Integralfunktion ihrer oberen Grenze entsteht

$$\int_0^x t^2\,dt = F(x) - F(0) = \frac{x^3}{3} - 0 = \frac{x^3}{3}$$

Der Funktionswert an der unteren Grenze x = 0 ist 0, so dass die Konstante C aus der allgemeinen Berechnung der Stammfunktion jetzt einen definierten Wert hat, den der Stammfunktion an der unteren Grenze. Das dazu gehörende Funktionsbild der Stammfunktion hat den rechts dargestellten Verlauf. Man kann aus dieser Kurve auch ablesen, dass der Flächeninhalt unter der Funktion $y = x^2$ von 0 bis 2 gleich 8/3 = 2,66 beträgt. Das ist der Funktionswert der Funktion (= Stammfunktion von $y = x^2$) an der Stelle x = 2.

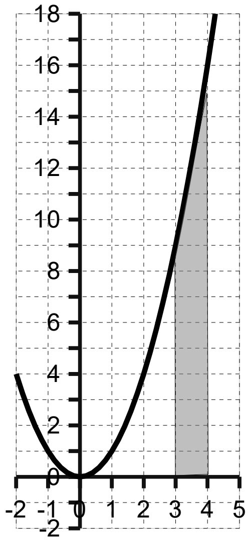




Als nächstes soll die Fläche unter der Funktion nicht ab dem Punkt 0, sondern ab dem Punkt 3 betrachtet werden. Wie oben bereits ausgeführt heißt daß, die untere Grenze wird zu dem Wert x= 3 und das Integral hat folgendes Aussehen.

$$\int_3^x t^2\,dt = F(x) - F(3) = \frac{x^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{x^3}{3} - 9$$

Die Stammfunktion ist natürlich wieder die gleiche, wie vorher, aber die Konstante C aus dem Berechnen der Stammfunktion hat jetzt den Wert - 9 . Auf der rechten Seite ist wieder das Kurvenbild dargestellt. Was kann man aus diesem Kurvenbild ablesen:
Der Kurvenverlauf ist der gleiche wie in der oberen Funktion. Die Funktion ist in Richtung y-Achse verschoben (Die Verschiebung in Richtung y-Achse macht genau die additive Konstante, die beim Differenzieren weggefallen ist.)
Was aber das entscheidende daran ist: Die Verschiebung der Kurve erfolgt genau so, dass die Kurve an der unteren Grenze des Integrals 0 ist, die Kurve schneidet die x-Achse, in diesem Fall an der Stelle x = 3.



Als nächstes soll das Verhalten, das Entwickeln, der Fläche ab dem Punkt x = 3 betrachtet werden. In der rechten Funktion ist deshalb die Fläche von x = 3 bis x = 4 der Funktion $y = x^2$ grau eingefärbt. Daraus ist zu erkennen, dass natürlich die Fläche von x = 3 bis x = 3 gleich 0 ist, da keine Breite vorhanden ist, aber selbst ein sehr kleiner Schritt von x = 3 in positive x Richtung führt schlagartig zu einer größeren Fläche. Betrachtet man dazu das obere Kurvenbild der Stammfunktion sieht man, dass dieses an x = 3 einen sehr steilen Kurvenanstieg hat. Kleine Änderungen der x - Werte führen zu starker Steigung der y - Werte.

Der Flächeninhalt im rechten Bild lässt sich fast auszählen: Bis y = 9 sind 9 volle Quadrate von der Größe 1 FE, danach kommen noch 6 Quadrate, an denen mehr oder weniger ein Stück fehlt. Geht man einmal grob davon aus, dass bei dem Quadrat zwischen y = 9 und y = 10 etwa die Fläche fehlt, die beim Quadrat zwischen y= 15 und y = 16 noch vorhanden ist und beim Quadrat zwischen y = 10 und y = 11 das fehlt, was beim Quadrat zwischen y = 14 und y = 15 vorhanden ist, werden aus den 6 Quadraten 3 Quadrate mit vollem Flächeninhalt. Diese zu den 9 Quadraten addiert ergeben 12 Quadrate und damit der Flächeninhalt 12 FE. Betrachtet man jetzt die zugehörige Stammfunktion

$$y = \frac{x^3}{3} - 9$$

Mit der oberen Grenze 4 und der unteren Grenze 3 erhält man:

$$y(4) = \frac{4^3}{3} - 9 = \frac{37}{3} = 12{,}33$$

und der Wert an der unteren Grenze ist 0, wie man bereits dem Funktionsbild entnehmen kann. Also ist der Flächeninhalt unter der Kurve $y = x^2$ zwischen x = 3 und x = 4 gleich 12,33 FE, was der ausgezählten Fläche doch sehr nahe kommt. Der Grund liegt natürlich darin, dass die Funktion $y = x^2$ in diesem Bereich einer Geraden schon sehr ähnlich sieht.

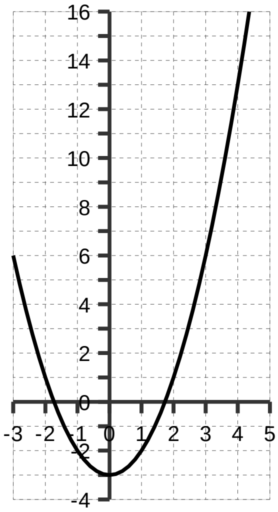
Der orientierte Flächeninhalt

Bei der Berechnung der Flächeninhalte über Rechtecke war eine Seite der Rechtecke der y-Wert der Funktion. Dieser y-Wert der Funktion kann positiv oder auch negativ sein Aus diesem Grund, werden beim Integrieren Flächeninhalte mit positivem und mit negativem Flächeninhalt entstehen. Für die Berechnung des **Werts des Integrals** muss das auch so bleiben, nur, wenn definitiv nur der **Flächeninhalt unter der Funktion** berechnet werden soll, sind einige Dinge zu beachten. (Trennen an Nullstellen)

Für die folgenden Betrachtungen sollen folgende Begriffe vereinbart werden:

- Die **Ausgangsfunktion** ist die Funktion, die hinter dem Integralzeichen steht, von der die Stammfunktion berechnet werden soll.
- Die **Stammfunktion** oder **Integralfunktion** ist das Ergebnis des Integrierens als Funktion ausgedrückt und nicht als Maßzahl einer Fläche.

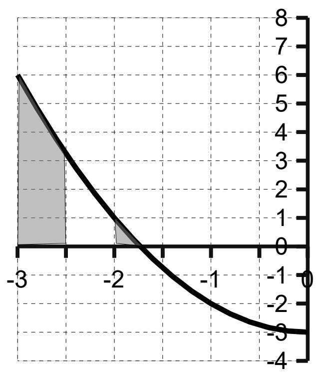
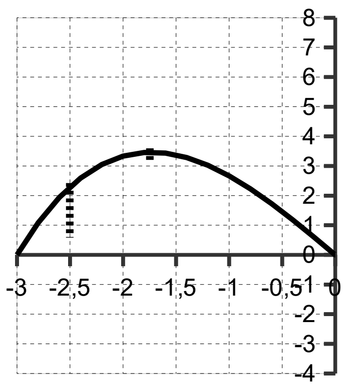
Damit ist die Ausgangsfunktion die erste Ableitung der Stammfunktion.



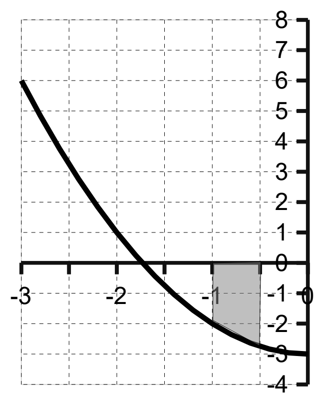
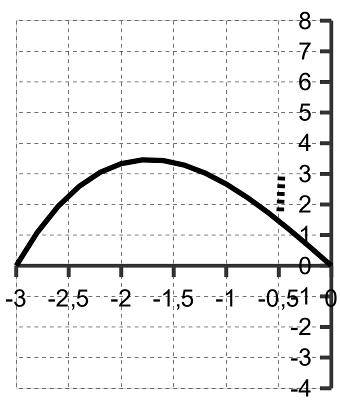
Der orientierte Flächeninhalt soll ebenfalls an einer einfachen Funktion erläutert werden. Es wird die Funktion $y = x^2 - 3$ benutzt und das Integral (=Stammfunktion) von

$F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt$ betrachtet. Auf der rechten Seite ist zunächst wieder das Funktionsbild von $y = x^2 - 3$ abgebildet.

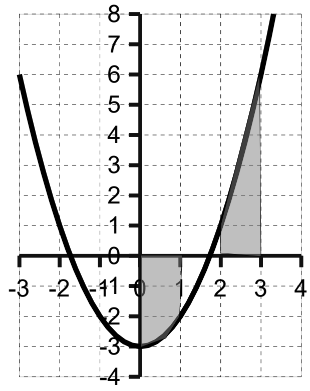
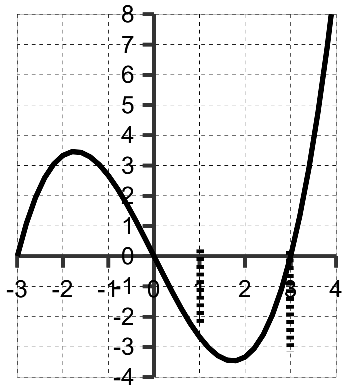
An der Stelle $x = -3$ wird die zugehörige Stammfunktion gleich 0 sein. Für steigendes x werden die Funktionswerte steigen, da die Funktion f(x) als erste Ableitung der Stammfunktion positiv ist. Aber die Steigungen werden kleiner, weil die Funktionswerte kleiner werden. (*Zusammenhang zwischen Funktion und 1. Ableitung*) Für den Bereich der Integralfunktion heißt dass, es werden positive Flächenteile addiert, mit wachsendem x werden aber die Flächenteile, die addiert werden, kleiner.

$y = x^2 - 3$	Integralfunktion	
		Am Bild sieht man deutlich, dass die Zunahme der Flächen kleiner wird. Bei der Integralfunktion steigen die Funktionswerte an, mit wachsendem x wird aber die Zunahme geringer. Der Zuwachs erfolgt etwa bis zum Punkt $x = -1{,}75$, genau ist es $-\sqrt{3} = -1{,}7320$, die Nullstelle der Funktion $y = x^2 - 3$. Da das die erste Ableitung der Stammfunktion ist, muss die Stamm-funktion dort einen Extrempunkt besitzen ! Ab diesem Zeitpunkt verläuft die Kurve von f(x) unterhalb der x-Achse, was auf die Fläche und das Funktionsbild der Integralfunktion Auswirkungen hat.

In der linken grauen Fläche beträgt ein Rechteck etwa ½ FE. Addiert man die Flächen der grauen Rechtecke zusammen, erhält man etwas mehr als 2 FE. Das entspricht genau dem Funktionswert der Integralfunktion an der Stelle - 2.5

$y = x^2 - 3$	Integralfunktion	
		Die grau gezeichnete Fläche liegt unterhalb der x-Achse und besitzt deshalb negative y-Werte. Der Flächeninhalt wird deshalb eine negative Zahl werden. Also verringern diese Flächen den Wert der Integralfunktion, je weiter der Wert für x wächst. Auf der Seite der Integralfunktion erscheinen diese negative Flächeninhalt als kleiner werdende Funktionswerte An der Stelle x = 0 ist bei der Integralfunktion eine Nullstelle erreicht. Geometrisch bedeutet das, dass der gesamte positive Flächeninhalt „aufgebraucht" ist und der Gesamtflächeninhalt von $x = -3$ bis $x = 0$ den Wert 0 hat.

$$\int_{-3}^{0} (x^2 - 3)\,dx = F(0) - F(-3) = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_{-3}^{0} = 0 - (-9 + 9) = 0$$

$y = x^2 - 3$	Integralfunktion	
		Betrachtet man die Funktion weiter, sammeln sich für wachsende x weitere negative Flächenstücke an, was dazu führt, dass die Integralfunktion weiter fällt. Die Integralfunktion fällt bis $x = \sqrt{3}$, danach sammeln sich wieder positive Flächenteile an. Was ist an dieser Stelle $x = \sqrt{3}$: die erste Ableitung f(x) hat eine Nullstelle, damit muss die Stammfunktion an dieser Stelle einen Extremwert besitzen. Da der Funktionswert der Ausgangsfunktion als 1. Ableitung der Stammfunktion von negativen Werten nach positiven Werten wechselt, muss in der Stammfunktion ein Minimum vorliegen, was bei der Integralfunktion deutlich zu sehen ist.

Mit dem Anwachsen positiver Flächenteile wächst auch die Integralfunktion wieder, bis mehr positive Flächenteile angesammelt sind, als nach x= 0 negative Flächenteile angesammelt wurden. Auf Grund der Achsensymmetrie der Funktion muss dass bei x = 3 passieren, deshalb hat die Integralfunktion dort einen Nullpunkt, der aber aus dem Kurvenbild der Funktion f(x) nicht abzuleiten ist.
Auf der Seite des Integranden links sieht man, daß sich zwischen x = 0 und x = 1 ein Flächeninhalt von etwa 2,5 ergibt. Auf der rechten Seite der Integralfunktion sieht man, daß der Funktionswert zwischen x = 0 und x = 1 etwa um 2,5 kleiner wird.
Zwischen x = 2 und x =3 ergibt sich links ein Flächeninhalt von etwa 3,5. Bei der Integralfunktion ergibt sich zwischen x = 2 und x = 3 ein Funktionszuwachs von 3,5. Der Zuwachs hat nichts damit zu tun, dass die absoluten Funktionswerte immer noch negativ sind.

Zusammenfassung

- Die Integralfunktion - das Integral als Funktion seiner oberen Grenze - ist die Stammfunktion immer bezogen auf den Wert der unteren Grenze, an dem die Integralfunktion immer gleich 0 ist.
- Die untere Grenze hat damit die Bedeutung der additiven Konstanten aus der Berechnung von Stammfunktionen F(x) + C und legt eindeutig eine Konstante C fest, die so festgelegt wird, dass die Integralfunktion an der unteren Grenze 0 ist: C = F(unterer Grenze)
- Damit wird aus den beliebig vielen Stammfunktionen, die sich nur durch einen konstanten Wert C unterscheiden, ein ganz bestimmtes C ausgewählt und damit aus der Kurvenschar F(x) + C eine Kurve ausgewählt.
- Den gleiche Effekt kann man erzielen, wenn die Frage gestellt ist, es gibt einen Punkt P mit den Koordinaten xp und yp, gesucht ist diejenige Stammfunktion, die durch diesen Punkt verläuft. Daraus resultiert die Gleichung $y_P = F(x_P) + C$, was letzten Endes auf eine Bestimmungsgleichung für C hinausläuft, da alle anderen Werte bekannt sind. (Punktprobe, ob - oder wann - ein Punkt auf einer Funktionskurve liegt.)
- Die Fläche unter dem Integranden gibt immer nur die Differenz der Funktionswerte der Stammfunktion an, niemals den absoluten Funktionswert.

Es ist streng zu unterscheiden.

- soll das Integral berechnet werden, oder
- soll der Flächeninhalt unter der Kurve berechnet werden.

Soll das Integral berechnet werden.

- ist über die Nullstellen hinweg zu integrieren, da positive und negative Flächenteile berücksichtigt werden müssen. Hier geht es um die Bestimmung der Stammfunktion.

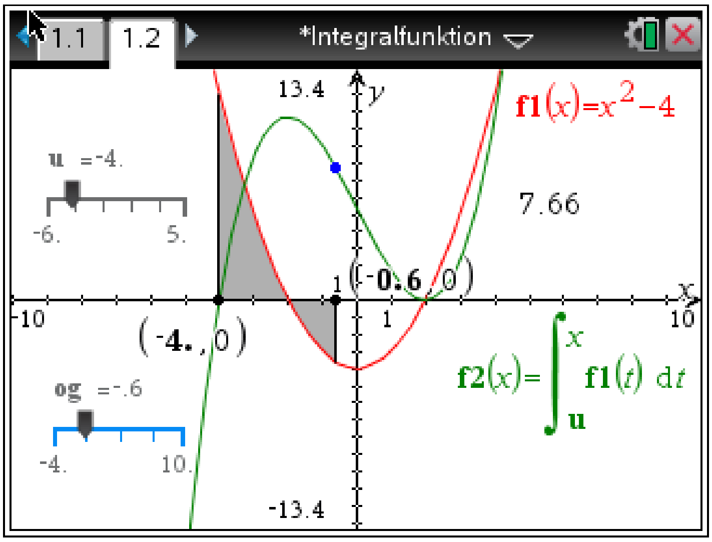
Ist die Fläche unter einer Funktion zu bestimmen,

- muss an den Nullstellen getrennt wenden, da die positiven und die negativen Flächenteile zur Gesamtfläche gehören. Hier geht es um den Hauptsatz der Differenzial – Integralrechnung, bei dem positive und negative Flächenteile zu unterscheiden sind.

Zur Veranschaulichung dieser Zusammenhänge soll die Funktion y = x² - 4 betrachtet werden Das ist die rot gezeichnete Funktion in der Grafik. Die Stammfunktion wird über Integralfunktion herge-stellt und ist als f2(x) in der Grafik eingetragen f2(x) ist **eine** Stammfunktion von f1(x).

Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine addierte Konstante. Diese Konstante wird bei der Integralfunktion durch die untere Grenze fest-gelegt. Die Konstante wird dadurch so festgelegt, dass die Stammfunktion an der unteren Grenze immer eine Nullstelle besitzt.

Die untere Grenze, angegeben durch den Buch-staben u, liegt jetzt bei - 4 (siehe Schieberegler u), deshalb hat die grüne Funktion bei -4 eine Nullstelle.



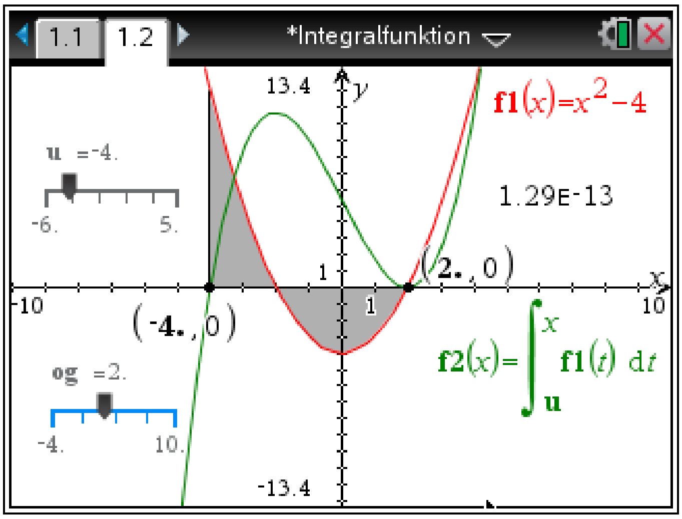
Die dunklen Flächen unter der roten Kurve zeigen den Flächeninhalt, der durch das Integral bestimmt wird. Ab der Stelle - 4 liegt der Flächeninhalt des Integrals oberhalb der x - Achse, deshalb ist diese Fläche positiv. Die Auswirkungen auf die Stammfunktion sind : Die Stammfunktion(grün) ist monoton steigend, da immer mehr positive Flächeninhalte dazukommen. (In diesem Bereich ist die erste Ableitung f1(x) positiv, deshalb ist die Stammfunktion f2(x) monoton steigend.) Es bleiben bis zur Stelle -2 immer positive Flächeninhalte. Der Zuwachs der Flächeninhalt bis zur Stelle -2 nimmt aber ab. Damit verringert sich der Anstieg der grünen Funktion bis zur Stelle x = - 2. weshalb der Kurvenverlauf immer flacher wird.

Ab x = -2 ist der Flächeninhalt zwischen f1(x) und x - Achse negativ. Das bedeutet, dass der summierte Flächen-inhalt weniger wird, und damit die Funktion f2(x) fällt. Vom Flächeninhalt bis zur Stelle x = -2 wird jetzt der kommende Flächeninhalt subtrahiert. (Es gibt eine negative erste Ableitung f1(x), was bei der Stammfunktion zu einer monoton fallenden Funktion führt.) Die obere Grenze steht im Moment auf x = - 0.6 (siehe Schieberegler og). Auf der grünen Funktion stellt der blaue Punkt den Funktionswert an der Stelle x = - 0,6 dar. Der Funktionswert beträgt 7,66, dem Wert, der auf der rechten Seite der Grafik zu sehen ist. Dieser Funktionswert ist

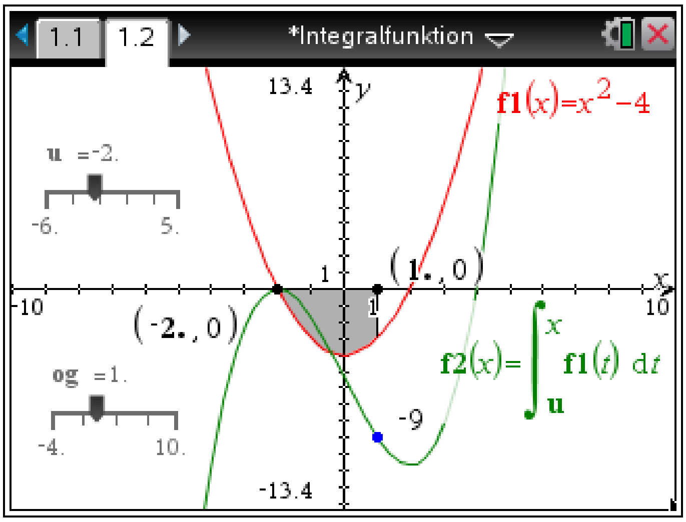
Der orientierte Flächeninhalt der Funktion f1 (x) im Intervall von x = - 4 bis x = - 0,6.

Als orientierten Flächeninhalt versteht man die Gesamtfläche unter Berücksichtigung der Vorzeichen, dh. der Flächenteile oberhalb der x - Achse und unterhalb der x - Achse.

Jetzt wird die obere Grenze an die Stelle x = 2 verschoben. Der Funktionswert der grünen Stammfunktion ist 0. Angezeigt durch den Wert 1.29 E- 13, was soviel bedeutet wie 1.29 • 10^{-13} . Geometrisch bedeutet das, zwischen -4 und 2 ist der Anteil der Flächen, die oberhalb der x - Achse liegen genau so groß, wie die Flächen, die unterhalb der x - Achse liegen. Nach der Stelle x = 2 sind die Funktionswerte von f1(x) wieder positiv, damit der Flächeninhalt unter f1 oberhalb der x - Achse und die Funktion f2 monoton steigend. Die insgesamt positiven Funktionswerte von f2 resultieren nur daraus, dass es keine größeren Flächeninhalte unterhalb der x - Achse gegeben hat, wie es vorher oberhalb der x - Achse gegeben hat und hat nichts mit dem Funktionsverlauf von f1 ab der Stelle x = 2 zu tun.



Als nächstes sollen die Auswirkungen der Verschiebung der unteren Grenze untersucht werden. Dazu wird die untere Grenze auf x = − 2 gesetzt Die obere Grenze steht zunächst auf 1. Die grüne Funktion f2(x) hat das gleiche Aussehen, wie oben, ist aber nach unten verschoben. Genau das ist die Auswirkung, wenn man die Konstante verändert. Es wird nicht das Kurvenbild an sich verändert, sondern nur der Schnittpunkt mit der y − Achse. An der Stelle x = − 1 hat die grüne Funktion jetzt eine Nullstelle. Ab der Stelle x = − 1 ist der Flächeninhalt unter der Funktion f1 (x) negativ, da er unterhalb der x − Achse liegt. Deshalb gehen die Funktionswerte der Stammfunktion f2(x) ins negative. An der Stelle x = 1 (obere Grenze) ist jetzt der Funktionswert y = − 9. Ab der Stelle x = 2 sind die Funktionswerte von f1 wieder positiv, deshalb steigt die Funktion f2 ab x = 2 wieder, aber deren Funktionswerte sind nicht positiv, da erst



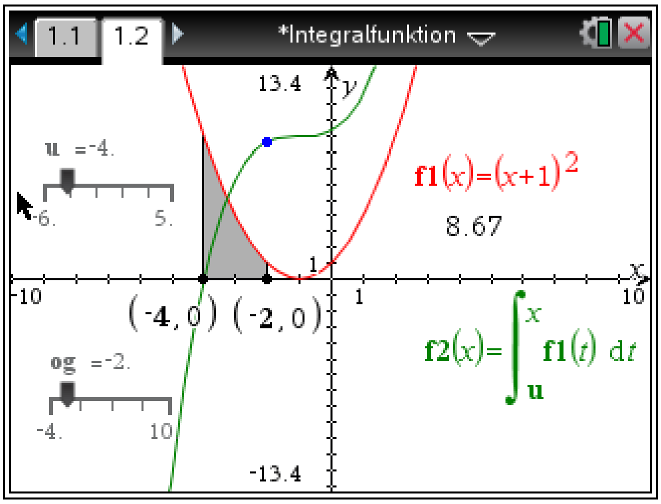
wieder so viel positiver Flächeninhalt gesammelt werden muss, daß der gesamte negative Flächeninhalt ausgeglichen ist. Das ist dann erst an der Stelle x = 4 erreicht, dann sind die Funktionswerte von f2 positiv.
Ab der Stelle x = 1 kommen keine weiteren negativen Flachen dazu und das bewirkt, dass die Funktionswerte von f2 steigen Damit hat f2 an der Stelle x = 2 einen Tiefpunkt. Das ist aber genau dort, wo f1 von negativen Funktions-werten zu positiven Funktionswerten wechselt. Damit noch einmal die Bestätigung der bekannten Aussage:

Hat die Ausgangsfunktion einen Extremwert, hat die erste Ableitung eine Nullstelle.

Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht ! Die Umkehrung gilt nur in der abgeschwächten Form:

*Hat die erste Ableitung **eine einfache Nullstelle** und schneidet deshalb die x – Achse, hat die Ausgangsfunktion einen Extremwert.*

Dazu wird die Funktion f(x) = (x+1)² betrachtet. Dieser Integrand besitzt bei x = –1 einen Extremwert, aber keinen Vorzeichenwechsel. Damit kann die Stammfunktion an dieser Stelle auch keinen Extremwert besitzen. Die untere Grenze ist x = – 4. Bis zur aktuellen oberen Grenze von – 2 wächst die (grüne) Stammfunktion, immer langsamer, da immer weniger Flächeninhalte dazukommen. An der Stelle x = – 1 gibt es keinen Zuwachs, da der Integrand den Wert 0 hat und deshalb zwischen Funktion und x – Achse Funktion keine Fläche passt. Damit hat die Stammfunktion dort auch einen waagerechten Kurvenverlauf, kein Zuwachs. Nach der Stelle x = -1 verläuft der Integrand wieder oberhalb er x – Achse und damit werden wieder positive Flächenteile addiert, was dazu führt, dass die Stammfunktion weiter wächst. Für einen Extremwert müsste sie jetzt aber fallen und damit Flächenteile unter der x – Achse hinzukommen. Also :
Kein Schnittpunkt des Integranden mit der x – Achse
=> Kein Extremwert in der Stammfunktion



In der Ausdrucksweise der Differenzialrechnung heißt das :
Hat die erste Ableitung keinen Schnittpunkt mit der x – Achse, hat die Ausgangsfunktion keinen Extremwert an dieser Stelle.

Der Tangentenanstieg an dieser Stelle bei der Stammfunktion ist zwar 0, aber es existiert kein Extremwert, sondern ein Terrassenpunkt.

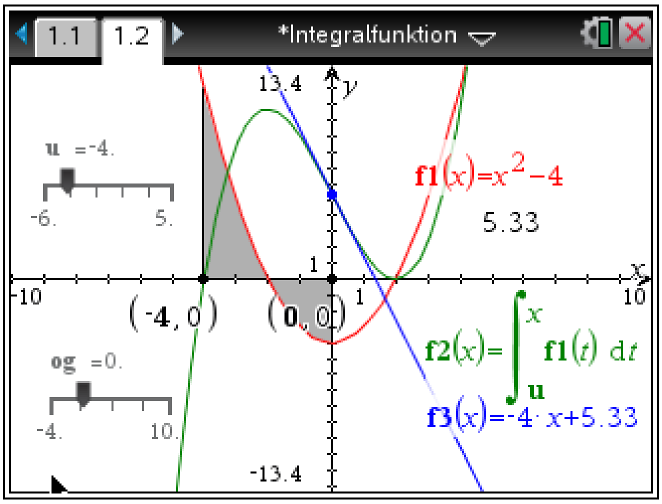
In der Ausdrucksweise der Differenzialrechnung heißt das :
Jeder Extremwert, der 1. Ableitung
ist ein Wendepunkt in der Ausgangsfunktion.

In diesem Fall hat die Wendetangente an Anstieg 0.

Das soll jetzt noch einmal für einen beliebigen Extremwert des Integranden nachgewiesen werden. Dazu wird wieder die Ausgangsfunktion $f(x) = x^2 - 4$ benutzt. Dass diese Funktion bei x = 0 einen Extremwert besitzt muss nicht nachgewiesen werden, das ist sehr einfach zu erkennen. Um nachzuweisen, dass die (grüne) Stammfunktion an dieser Stelle einen Wendepunkt hat, ist die Wendetangente an dieser Stelle eingezeichnet. Der Funktionswert der Stammfunktion ist 5,33, was an der rechten Zahl unter dem Funktionsausdruck f1 zu erkennen ist, und der Anstieg ist gleich dem Wert des Integranden (der ist nämlich die 1. Ableitung der Stammfunktion) und damit – 4.
Die Wendetangente hat damit die Gleichung

$$f(x) = -4x + 5{,}33$$

Diese Funktion ist als f3 in der Grafik eingetragen. Woran erkennt man jetzt, dass es ich um einen Wendepunkt handelt ?



Tangenten haben grundsätzlich eine Eigenschaft: Sie liegen links von der Kurve, wenn die Kurve rechts gekrümmt ist, oder sie liegen rechts von der Kurve, wenn die Kurve links gekrümmt ist. Eine Tangente schneidet niemals die Kurve (in der Umgebung ihres Tangentenpunktes). In einem Wendepunkt wechselt die Krümmung von links nach rechts, oder von rechts nach links. Damit muss die Tangente von der linken Seite auf die rechte Seite, oder von der rechten Seite auf die linke Seite. Wie soll sie das schaffen, sie muss !!! durch die Kurve durch.

Der Wendepunkt ist der einzige Kurvenpunkt, bei dem die Tangente die Kurve schneiden darf .
Im Wendepunkt hat eine Funktion keine Krümmung ($f''(x) = 0$) und verhält sich dort wie eine Gerade.
Deshalb liegt die Tangente weder rechts noch links von der Kurve.
Eine Gerade hat an allen Punkten keine Krümmung.

Auf der einen Seite liegt die Tangente links von der Kurve, auf der anderen Seite rechts von der Kurve. Und genau diesen Effekt sieht man hier im Punkt (0 / 5,33) . Die Tangente schneidet in diesem Punkt die Kurve, damit handelt es sich um einen Wendepunkt.
Nach x = 0 werden die Funktionswerte von f1 wieder betragsmäßig kleiner, so dass die Tangentenanstiege flacher werden, aber sie bleiben zunächst noch negativ. Vor dem Wert x=0 sind die Funktionswerte von f1 aber auch betragsmäßig kleiner und die Tangentenanstiege damit flacher. In der Sprechweise der Differenzialrechnung heißt das:

In den Wendepunkten hat eine Funktion ihren steilsten Tangentenanstieg.
Wendepunkte führen in der 1. Ableitung zu einem Extremwert.

Aussagen der Differenzialrechnung gelten immer nur für einen gewisse Umgebung des Punktes und niemals für den gesamten Kurvenverlauf. Deshalb kann es bei entfernten x Werten durchaus steiler Tangentenanstiege geben.