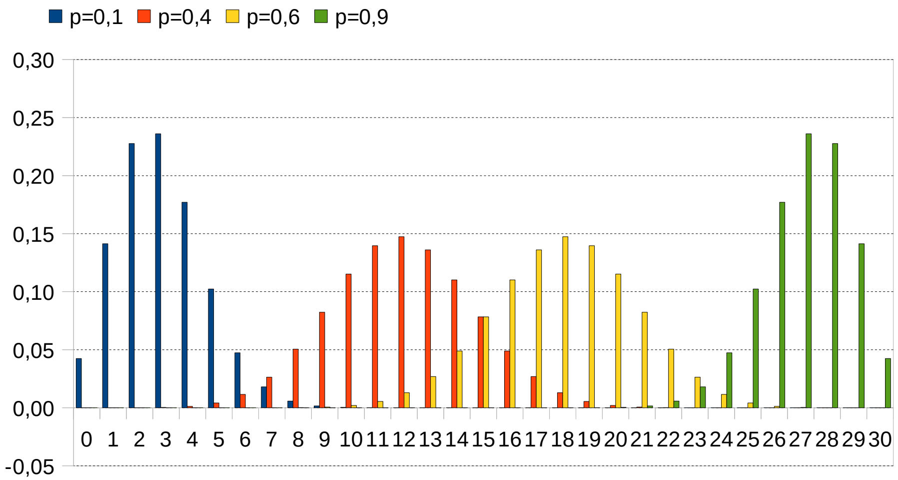
Mathematik - Intensivkurs: Hypothesentest

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Hypothesentest	**Hypothesentest**	



In dem Bild sind verschiedene Binomialverteilungen dargestellt, bei denen immer der Wert für n = 30 ist. Es wechselt nur die Wahrscheinlichkeit. Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind am oberen Rand dargestellt. Daraus ist zu erkennen, dass mit wachsender Wahrscheinlichkeit die Säulen nach rechts wandern. Es sollen jetzt die roten Säulen im Zusammenhang mit dem Hypothesentest betrachtet werden. Die Wahrscheinlichkeit für die roten Säulen ist 0,4.

Gibt es nur eine Hypothese unterscheidet man zwischen einem linksseitigen und einem rechtsseitigen Hypothesentest. Es kommt darauf an, Kriterien zu finden, nach denen die Hypothese

- abzulehnen ist oder
- nicht abgelehnt werden kann.

Grundsätzlich wird eine Hypothese nicht angenommen. Dass eine Hypothese nicht abgelehnt wird, heißt nicht automatisch, dass sie richtig ist, sondern nur, dass sie mit dieser Untersuchung nicht widerlegt werden kann. Andere Tests, die z.B noch nicht bekannt sind, könnten die Hypothese widerlegen.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Hypothesentest

Linksseitiger Hypothesentest

Bei einem **linksseitigen Test** wird die Hypothese aufgestellt:

Liegt die Anzahl der Ereignisse **unter einer festgelegten Schranke**, dann ist die Hypothese abzulehnen. Alle Werte, die größer sind, widersprechen der Hypothese nicht.

Jemand behauptet, sein Ereignis (fehlerfreie Teile, Stimmenanteil) hat eine Wahrscheinlichkeit von <u>mindestens</u> 40%:
H_0 $p \geq p_0 = 40\%$ daraus resultiert H1: $p < p_0 = 40\%$
Das Gleichheitszeichen gehört immer zu H_0.

Wenn er recht hat, oder die Wahrscheinlichkeit noch größer ist, als 40%, dann interessiert uns das als Gegenpartei nicht. In diesen Fällen ist er sogar besser als er selbst angibt, was für uns zum Vorteil ist. Uns interessiert, ob er schlechter ist, als er uns einreden will. Deshalb interessiert uns der linke Teil der Verteilungskurve.

Merke : Die Bedingung von H1 zeigt den Hypothesentest an, der gemacht werden muss. In diesem Fall steht bei H1

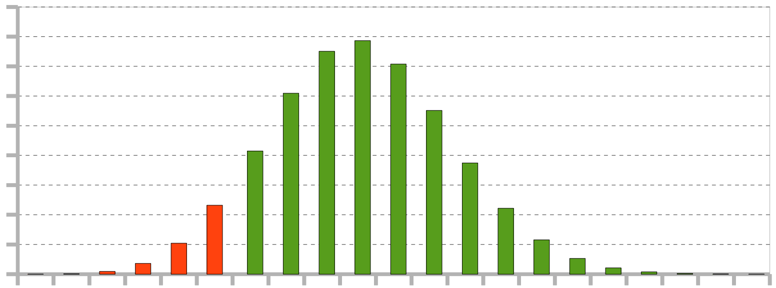
$$p < p_0$$

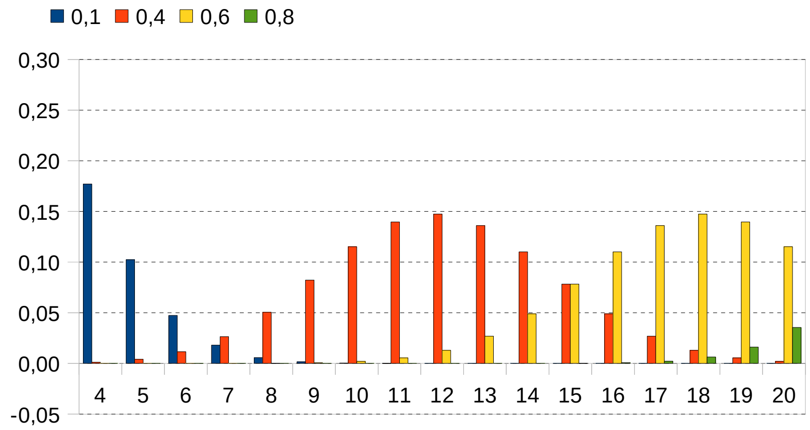
Die Spitze des Ungleichheitszeichen zeigt nach links, oder zu p Werten, die **kleiner** als p_0 sind.
In diesem Fall handelt es sich um einen linksseitigen Test.

Uns interessiert, ob die Ereignisse nicht doch seltener auftreten, als bei 40% angenommen. Bei p = 0,4 und n = 30 erhält man einen Erwartungswert von 12, der auch die höchste rote Säule darstellt. Wenn man alle 30 Exemplare untersucht, sollte man 12 Stück finden, die die Eigenschaft erfüllen. Natürlich wird das nicht immer der Fall sein. Maschinen machen Fehler nicht nach mathematischen Regeln. Finden wird mehr, kann uns das nur recht sein, da die Aussage lautet es sind „mindestens 40%“. Finden wird weniger, sollte man irgendwann mißtrauisch werden.

Finden wir nur 9 oder 10 Teile mit der gewollten Eigenschaft kann das noch in Ordnung sein, aber bei nur 3 oder 4 Teilen muss man an den 40% eher zweifeln. Bei den roten Säulen tritt k = 3 oder k = 4 mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit auf, deshalb wäre es ein großer Zufall, wenn man tatsächlich einen solch extremen Test erhält. In diesem Fall ist wohl eher anzunehmen, dass die Wahrscheinlichkeit in Richtung der blauen Säulen geht. Für kleineres p werden die Säulen an k = 3 und k = 4 größer und treten damit öfter auf.

Linksseitiger Hypothesentest





Mathematik - Intensivkurs: Hypothesentest

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Hypothesentest	**Ablaufschema beim linksseitiger Hypothesentest**	

1) Festlegung der Hypothesen: H_0: $p \geq p_0$; (H_1: $p < p_0$)

(beim linksseitigen Hypothesentest immer **$p \geq p_0$**)

2) Festlegung des Stichprobenumfangs n

Ablehnungsbereich gegeben, Irrtumswahrscheinlichkeit gesucht

3) Festlegung des Ablehnungsbereiches k_0

4) Festlegung der Zufallsvariablen X (immer) und ihrer Verteilung (verlangen manche Lehrer nicht; in der Schule ist es fast immer die Binomialverteilung)

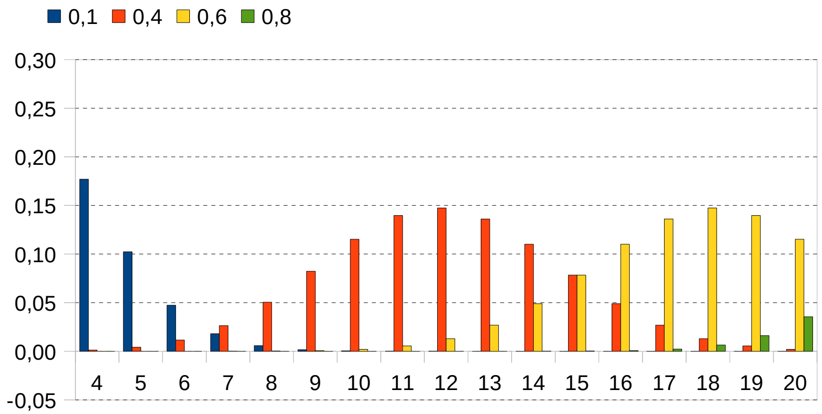
5) Bestimmung der summierten Wahrscheinlichkeit aus der Bedingung $P(X \leq k_0) = \alpha$ und damit der Irrtumswahrscheinlichkeit

6) Angabe der Entscheidungsregel oder Entscheidung aufgrund eines konkreten Stichprobenergebnisses

An der Stelle kommt die Irrtumswahrscheinlichkeit ins Spiel. Wir akzeptieren seine Behauptung, wenn wir wenigstens noch 8 Teile mit der geforderten Eigenschaft finden. Sind es weniger meinen wir, seine Angaben stimmen nicht. Gleichzeitig sehen wir an der roten Säulen, dass bei einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 durchaus die Ereignisse mit k = 7 oder k = 6 auftreten können, und damit die Behauptung doch richtig ist, obwohl wir sie nicht akzeptieren.

Wenn wir k = 8 als Grenze festlegen, dann kann es sein, dass wir uns mit einer Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 7)$ irren, also der Summe aller möglichen Ereignisse deren k kleiner als 8 ist. Das ist die Irrtumswahrscheinlichkeit bei k = 8.

Für jeden Wert k erhält man eine andere Irrtumswahrscheinlichkeit.



Treff Lernen
Christina Strauch

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Hypothesentest

Irrtumswahrscheinlichkeit gegeben, Ablehnungsbereich gesucht

3) Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeit α
4) Festlegung der Zufallsvariablen X (immer) und ihrer Verteilung (verlangen manche Lehrer nicht; in der Schule ist es fast immer die Binomialverteilung)
5) Bestimmung der linken Grenze gL aus der Bedingung $P(X \leq g_L) \leq \alpha$ und damit des Ablehnungsbereichs $K = \{0, \ldots, g_L\}$
6) Angabe der Entscheidungsregel oder Entscheidung aufgrund eines konkreten Stichprobenergebnisses

Beispiel
Bei einer Wahl hatte eine Partei einen Stimmenanteil von 40 %. Nach der Wahl hat sie einige unbequeme Maßnahmen ergriffen, und man vermutet, dass der Stimmenanteil gesunken ist. Bei einer Umfrage unter 100 Personen geben 33 an, dass sie die Partei wieder wählen würden. Kann man hieraus bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % schließen, dass der Stimmenanteil gesunken ist?

Bei einem linksseitigen Hypothesentest sprechen kleine Werte der Zufallsvariablen gegen die Hypothese, also Werte, die links vom Erwartungswert liegen. Wenn eine Partei behauptet, sie habe einen Stimmenanteil von mindestens 40 %, macht es uns stutzig, wenn zu wenige Leute behaupten, diese Partei wählen zu wollen.

	Wahrscheinlichkeitsfunktion	Verteilungsfunktion
k	$B_{100;0,4}(k)$	$F_{100;0,4}(k)$
30	0,01001	0,024783
31	0,01507	***0,039848***
32	0,02166	***0,061504***
33	0,02975	0,091254
34	0,03908	0,130337
35	0,04913	0,179469

Die Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% = 0,05 liegt zwischen den k-Werten 31 und 32. Es ist grundsätzlich die summierte Funktion zu benutzen.
Wenn sich immer noch 33 Personen für diese Partei entscheiden, dann liegt dieser Wert nicht im Ablehnungsbereich.

Hier ist ganz klar zu erkennen, dass man daraus nicht schließen kann, dass der gesamte Wähleranteil nicht gesunken ist. Eine andere Befragung könnte zu einem anderen Ergebnis kommen.

Lösung
1) Wir führen den Hypothesentest durch:
H_0: $p \geq 0{,}4$; H_1: $p < 0{,}4$

2) n = 100; α = 0,05

3) X = Anzahl der Personen in der Stichprobe, die die Partei wieder wählen würden X ist bei wahrer Nullhypothese binomialverteilt mit den Parametern n = 100 und p = 0,4

4) $P(X \leq g_L) \leq 0{,}05 \Rightarrow g_L = 31$ (Tabelle siehe Rückseite);
Ablehnungsbereich K = {0, …, 31}

5) Da $33 \notin K$ ist, kann man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % nicht behaupten, dass der Stimmenanteil der Partei gesunken ist. Wäre kein Stichprobenergebnis bekannt, so würde man an dieser Stelle die Entscheidungsregel formulieren: Wenn höchstens 31 Leute angeben, die Partei wieder wählen zu wollen, kann man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % behaupten, dass der Stimmenanteil der Partei gesunken ist.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Hypothesentest

Die Berechnung des Ablehnungsbereichs über die Listeneinträge ist sehr aufwendig. Eine Lösung über einen Grafikbildschirm steht nicht zur Verfügung. Aber jeder heute übliche Taschenrechner besitzt eine „Inverse Normalverteilung“ , die hier sehr gut zum Einsatz kommen kann.

Die Inverse Normalverteilung benötigt als Eingabeparameter :

1. Die vorgegebene Grenzwahrscheinlichkeit, in diesem Fall die Irrtumswahrscheinlichkeit
2. Den Erwartungswert μ
3. Die Streuung σ

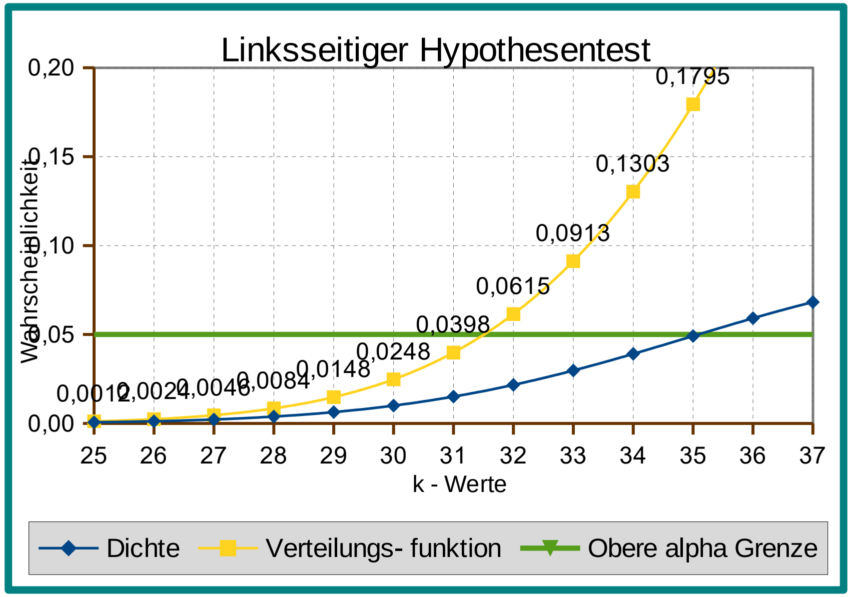
$n = 100$ $\quad \mu = n * p = 40$

$p = 0{,}4$

$\sigma = \sqrt{n\, p\, (1-p)} = \sqrt{40*0{,}4*0{,}6} = 3{,}098$

InvNorm (0,05 ; 40; 3,1) = 34,9

Nach der Inversen Normalverteilung erhält man das Ergebnis, dass bei k = 34 der Ablehnungsbereich endet und bei k = 35 der Annahmebereich beginnt. Das weicht geringfügig von den Werten der Binomialverteilung ab. Deshalb muss man nach der Berechnung die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten noch einmal mit der Binomialverteilung überprüfen.



Es wird immer mit der summierten Wahrscheinlichkeit gearbeitet, und damit mit der gelben Linie.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Hypothesentest

Irrtumswahrscheinlichkeit

Die Anzahl der durchgeführten Proben bezeichnet man mit n, die Anzahl der positiv gefundenen Ereignisse mit k (entsprechend der Bedeutung in der Binomialverteilung).

Das Problem bei der Durchführung der Tests:
Auch Ereignisanzahlen, die über/unter der vorgegeben Schranke liegen sind durchaus möglich, aber wenn sie eintreten geht man **immer** davon aus, dass die Hypothese **falsch** ist, obwohl sie in wenigen Fällen auch richtig sein kann.

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler ist genau die Summe der Wahrscheinlichkeiten, mit denen das Ereignis eintreten kann, bei dem die Anzahl k kleiner ist als die vorgegebene Grenze.

„Der Test verlief so ungünstig, dass er suggeriert, die Hypothese sei falsch, obwohl sie richtig ist.“ Dieser Fehler ist nicht zu erkennen, man muss mit ihm leben !

Für das Festlegen der Schranken für die Ablehnung/Annahme der Hypothese gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

1. Ist die Anzahl k größer/kleiner als ein festgelegter Wert k_0, dann ist die Hypothese abzulehnen. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, mit denen trotzdem größere/kleinere Werte auftreten ist das Signifikanzniveau für den α – Fehler
2. Das Signifikanzniveau für den α – Fehler (Irrtumswahrscheinlichkeit) soll auf einen bestimmten Wert begrenzt werden. Ab/bis zu welcher Anzahl k_0 ist die Hypothese abzulehnen oder nicht abzulehnen.

> Eine Hypothese wird abgelehnt, obwohl sie richtig ist.
> In diesen Fällen spricht man von einem α – Fehler

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Hypothesentest

Rechtsseitiger Hypothesentest

Bei einem **rechtsseitigen Test** wird die Hypothese aufgestellt:
Liegt die Anzahl der Ereignisse **über einer festgelegten Schranke**, dann ist die Hypothese abzulehnen. Alle Werte, die kleiner sind, widersprechen der Hypothese nicht.

Jemand behauptet, sein Ereignis (defekte Teile, faule Äpfel) hat eine Wahrscheinlichkeit von <u>höchstens</u> 40%:

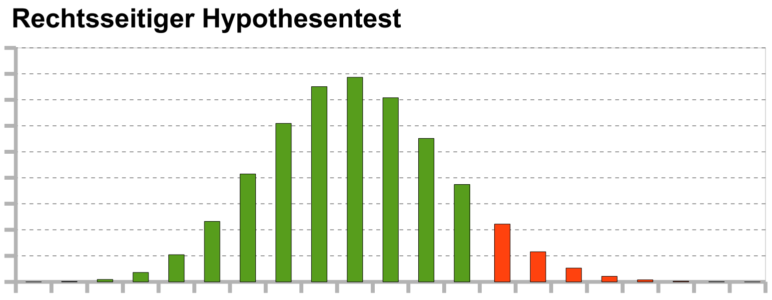
$H_0 \quad p \leq p_0 = 40\%$ daraus resultiert H1: $p > p_0$

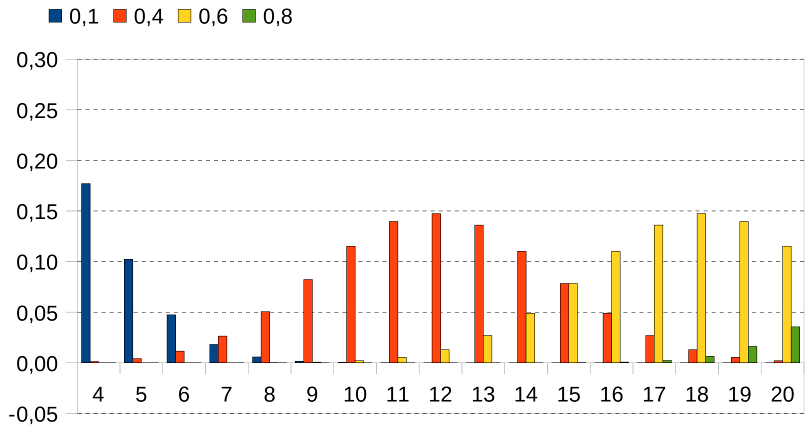
Das Gleichheitszeichen gehört immer zu H_0.

Wenn er recht hat, oder die Wahrscheinlichkeit noch kleiner ist, als 40%, dann interessiert uns das als Gegenpartei nicht. In diesen Fällen ist er sogar besser als er selbst angibt, was für uns zum Vorteil ist. Uns interessiert, ob er schlechter ist, als er uns einreden machen will. Deshalb interessiert uns der rechte Teil der Verteilungskurve.

> Merke : Die Bedingung von H1 zeigt den Hypothesentest an, der gemacht werden muss. Beim rechtsseitigen Test steht bei H1
>
> $p > p_0$
>
> Die Spitze des Ungleichheitszeichen zeigt nach rechts, oder die p Werte sollen größer als p_0 sein.
>
> In diesem Fall handelt es sich um einen rechtsseitigen Test.

Für uns als Gegenpartei eher interessant die Werte k = 17 , 18, 19 . Bei einer Wahrscheinlichkeit von 40% dürften diese Werte eher selten auftreten. Da sie aber dennoch auftreten können, unterliegen wir auch in diesen Fällen einer Irrtumswahrscheinlichkeit, und zwar der Summe der Wahrscheinlichkeiten von 18, 19 , 20 bis zu n (= 30).





Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Hypothesentest

Ablaufschema beim rechtsseitiger Hypothesentest

1) Festlegung der Hypothesen: H_0: $p \leq p_0$; (H_1: $p > p_0$)

(beim rechtsseitigen Hypothesentest immer **$p \leq p_0$**)

2) Festlegung des Stichprobenumfangs n

Ablehnungsbereich gegeben, Irrtumswahrscheinlichkeit gesucht

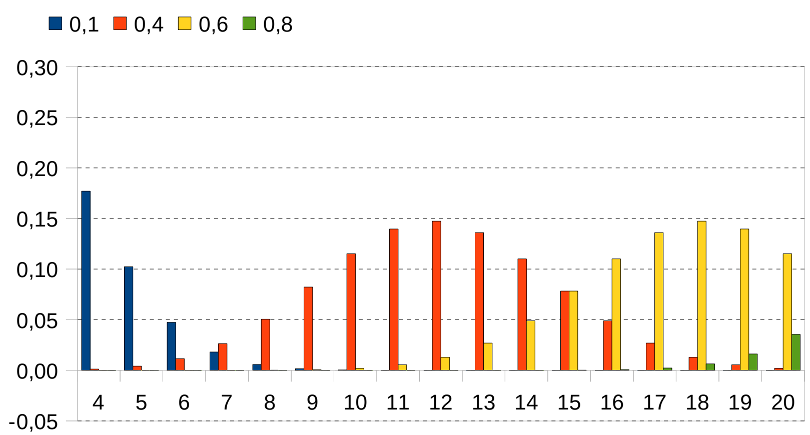
3) Festlegung des Ablehnungsbereiches k_0

4) Festlegung der Zufallsvariablen X (immer) und ihrer Verteilung (verlangen manche Lehrer nicht; in der Schule ist es fast immer die Binomialverteilung)

5) Bestimmung der summierten Wahrscheinlichkeit aus der Bedingung $P(X \geq k_0) = \alpha$ und damit der Irrtumswahrscheinlichkeit

6) Angabe der Entscheidungsregel oder Entscheidung aufgrund eines konkreten Stichprobenergebnisses

An der Stelle kommt die Irrtumswahrscheinlichkeit ins Spiel. Wir akzeptieren seine Behauptung, wenn wir höchsten 17 Teile mit der geforderten Eigenschaft finden. Sind es mehr, meinen wir, seine Angaben stimmen nicht. Gleichzeitig sehen wir an der roten Säulen, dass bei einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 durchaus die Ereignisse mit k = 18 oder k = 19 auftreten können, und damit die Behauptung doch richtig ist, obwohl wir sie nicht akzeptieren.



Wenn wir k = 17 als Grenze festlegen, dann kann es sein, dass wir uns mit einer Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 18)$ irren, also der Summe aller möglichen Ereignisse deren k größer als 17 ist. Das ist die Irrtumswahrscheinlichkeit bei k = 17.

Für jeden Wert k erhält man eine andere Irrtumswahrscheinlichkeit.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Hypothesentest

Irrtumswahrscheinlichkeit gegeben, Ablehnungsbereich gesucht

3) und der Irrtumswahrscheinlichkeit α

4) Festlegung der Zufallsvariablen X (immer) und ihrer Verteilung (verlangen manche Lehrer nicht; in der Schule ist es fast immer die Binomialverteilung)

5) Bestimmung der rechten Grenze g_R aus der Bedingung $P(X \geq g_R) \leq \alpha$ und damit des Ablehnungsbereichs $K = \{g_R, \ldots, n\}$

6) Angabe der Entscheidungsregel oder Entscheidung aufgrund eines konkreten Stichprobenergebnisses

Bei einem rechtsseitigen Hypothesentest sprechen große Werte der Zufallsvariablen gegen die Hypothese, also Werte, die rechts auf dem Zahlenstrahl bzw. rechts vom Erwartungswert liegen. Wenn eine Firma behauptet, sie habe bei der Produktion von Taschenrechnern eine Ausschussquote von höchstens 5 %, macht es uns stutzig, wenn zu viele defekte Taschenrechner reklamiert werden.

Beispiel
Die Behauptung der Firma soll mit einer Stichprobe von 100 Taschenrechnern untersucht werden. Wie viele defekte Taschenrechner müssen mindestens gefunden werden, damit man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 % schließen kann, dass die Ausschussquote höher als von der Firma angegeben ist?

	Dichte	umgekehrte Verteilungsfunktion
5	0,180018	0,564019
6	0,150015	0,384001
7	0,106026	0,233986
8	0,064871	0,127960
9	0,034901	0,063090
10	0,016716	0,028188
11	0,007198	0,011472
12	0,002810	0,004274
13	0,001001	0,001464
14	0,000327	0,000463
15	0,000099	0,000136

An der umgekehrten Verteilungsfunktion (Linie mit den Quadraten) ist zu erkennen, dass die Irrtumswahrscheinlichkeit von 10% = 0,1 zwischen den k Werten 8 und 9 liegt. Bei k = 9 kann man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,1 davon ausgehen, dass die Fehlerrate von 5% nicht stimmt.
Die Summe von 9 bis 30 ergibt 0,0631 (s. Kurvenbild). Die Summe von 8 bis 30 ergibt 0,1280, also mehr als 0,1

ACHTUNG Bei der Berechnung der umgekehrten Verteilungsfunktion

Lösung
Wir führen den Hypothesentest nach dem Muster durch:

1) H_0: $p \leq 0{,}05$; H_1: $p > 0{,}05$

2) $n = 100$; $\alpha = 0{,}10$

3) X = Anzahl der defekten Taschenrechner in der Stichprobe X ist bei wahrer Nullhypothese binomialverteilt mit den Parametern n = 100 und p = 0,05

4) Ansatz: $P(X \geq g_R) \leq 0{,}10$

5) Da eine solche Wahrscheinlichkeit nicht direkt aus der Tabelle abgelesen werden kann, muss man zunächst umformen bzw. zum Gegenereignis übergehen:
$P(X \geq g_R) \leq 0{,}10 \Leftrightarrow P(X \leq g_{R-1}) \geq 0{,}90 \Rightarrow g_{R-1} = 8$ (aus Tabelle)
$\Leftrightarrow g_R = 9$; Ablehnungsbereich $K = \{9, \ldots, 100\}$

6) Wenn mindestens 9 defekte Taschenrechner entdeckt werden, kann man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 % behaupten, dass die Angaben der Firma nicht zutreffen.
Nur wenn ein Stichprobenergebnis bekannt wäre, könnte man ein konkretes Urteil fällen.

Mathematik - Intensivkurs: Hypothesentest

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Hypothesentest

Eine Summierung von k bis n ist mit dem Taschenrechner nicht realisierbar. Man muss auf eine Summierung von 0 bis k umstellen. Deshalb ist bei der umgekehrten Wahrscheinlichkeit immer ein k Wert weniger zu benutzen. Damit sieht die notwendige Formel so aus:

$$\boxed{1 - \text{binomcdf}(n,p,\mathbf{k-1}) \leq \alpha}$$

Der Wert k – 1, den man damit erhält ist das Ende des Annahmebereichs (!) . Der Ablehnungsbereich beginnt um 1 höher, und damit bei dem gesuchten k.

Auch hier ist die Berechnung mit der Tabelle sehr aufwendig, dazu kommt noch Umrechnung von einer oberen Summe auf eine untere Summe. Wie beim linksseitigen Hypothesentest kann auch hier auf die Inverse Normalverteilung zurückgegriffen werden. Die Eingabeparameter sind die gleichen, wie beim linksseitigen Test. In Abhängigkeit vom TR ist auf folgenden Unterschied zu achten:

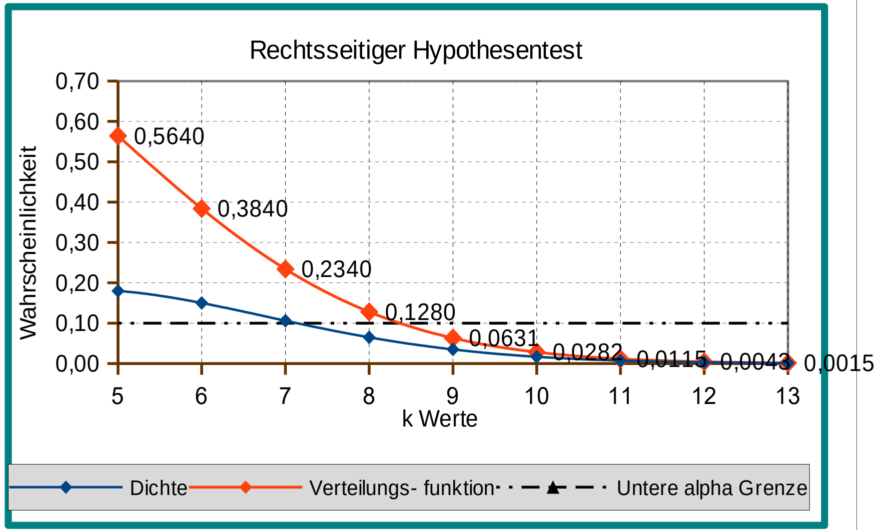
Der TR lässt bei der Eingabe der Grenzwahrscheinlichkeit auch die Eingabe einer Seite „Left“ oder „Right“ zu. Dann ist hier auf „Right“ zu stellen und als Grenzwahrscheinlichkeit 0,1 einzugeben. Er berechnet dann die obere Grenze.
Der TR lässt eine Einstellung „Left“ oder „Right“ nicht zu, dann rechnet er immer mit einer unteren Summe von 0 bis zu dem gesuchten k. Dann ist als Grenzwahrscheinlichkeit 0,9 einzugeben, da er dann das erste k sucht, bei dem die 0,9 überschritten wird, das ist das gleiche k, bei dem die obere Summe kleiner als 0,1 ist.

$n = 100$; $\quad \mu = n \cdot p = 5$
$p = 0{,}05$;
$\alpha = 0{,}10$ $\quad \sigma = \sqrt{n\,p\,(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} = 2{,}179$

InvNorm (0,90 ; 5; 2,18) = 7,79

k = 8 wäre der erste ganzzahlige Wert, bei dem die Grenze von 0,9 überschritten ist. Damit ist k = 8 die obere Grenze des Annahmebereichs und k = 9 der Beginn des Ablehnungsbereichs.

Aber auch in diesem Fall sollte man eine direkte Nachkontrolle über die Binomialverteilung durchführen.



Es wird immer mit der summierten Wahrscheinlichkeit gearbeitet, und damit mit der roten Linie. Zwischen k = 8 und k = 9 wird die Linie mit α = 0,1 unterschritten.

Mathematik - Intensivkurs: Hypothesentest

Thema	Gesetze und Regeln
Hypothesentest	**Alternativer Hypothesentest**

Bei einem solchen Test wird die Aussage einer sogenannten Nullhypothese H_0 gegen eine alternative Hypothese H_1 getestet. Ein solcher Test führt immer dazu, dass es für die eine Hypothese ein linksseitiger Hypothesentest ist und für die andere Hypothese ein rechtsseitiger Hypothesentest ist.

Ein Hypothesentest für die Nullhypothese H_0 gegen die Alternative H_1 basierend auf den Beobachtungswerten $x_1, x_2, ..., x_n$ besteht nun aus der Angabe eines kritischen Bereichs K (Verwerfungsbereich) zusammen mit der Entscheidungsregel:

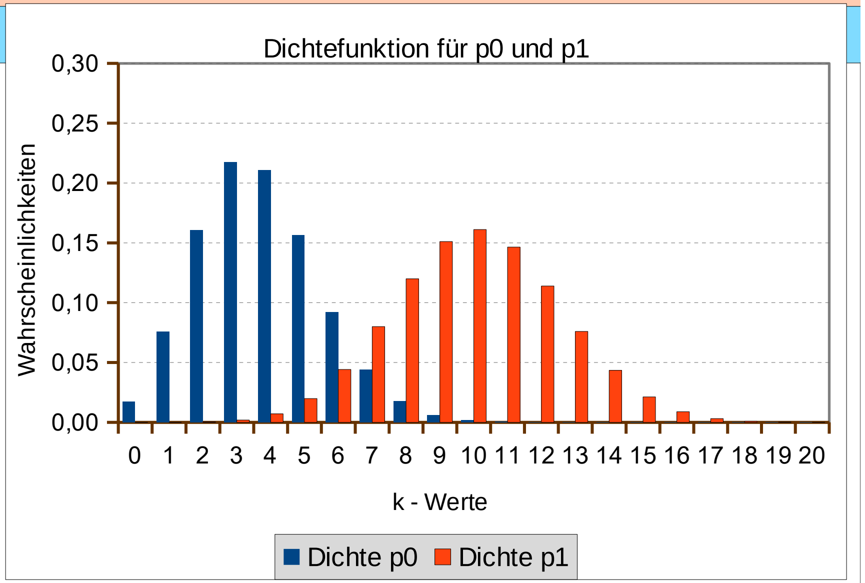
- Verwerfe die Nullhypothese, falls die Beobachtungswerte im kritischen Bereich liegen.
- Belasse die Nullhypothese, falls nicht.

Ein statistischer Nachweis/Beweis gelingt bloß dann, wenn die Nullhypothese verworfen wird. Belassen der Nullhypothese bedeutet dagegen **nicht**, daß H_0 damit statistisch bewiesen ist!
Am besten lässt sich die Problematik an einem Bild veranschaulichen.
(s. nebenstehendes Diagramm)

Die Nullhypothese entspricht den blauen Balken im Diagramm, die Alternativhypothese den roten Balken. In beiden Fällen handelt es sich um die Dichtefunktion, dh. die Angabe der Wahrscheinlichkeit für jeweils einen Wert k (P(X=k)).
Die Nullhypothese gilt für k=0 bis k = 9 (oder10). Die Alternativhypothese von k=3 bist k = 17.

Was bedeutet das für den Test:

Werte von k > 10 werden wohl nicht auftreten, denn dann wäre die Summe der Wahrscheinlichkeiten bereits so nahe bei 1, dass man sie als sicher ansehen kann. Bei Werten k < 3 ist die Sache auch soweit klar, dass in diesem Bereich H_1 kaum auftreten kann. Was ist aber mit k = 6 oder k = 7. Ist diese Anzahl H_0 oder H_1 zuzuordnen.



Und an dieser Stelle kommt genau der α – Fehler zum Tragen:

Legt man die Grenze für k_0 zur Bestätigung oder Verwerfung von H_0 auf den Wert k= 6, dann gehören die Werte k > 6 zum α – Fehler. Man lehnt H_0 ab, obwohl es noch richtig sein könnte und entscheidet sich für H_1 . H_1 hat dort bereits eine höhere Wahrscheinlichkeit als H_0, trotzdem kann auch H_0 noch existieren.

> Die Hypothese H_0 wird **abgelehnt, obwohl sie richtig ist**.
> In diesen Fällen spricht man von einem α – Fehler oder Fehler 1. Art

Was ist andererseits mit k = 5.

Bei k=5 glaubt man, sich im Bereich von H_0 zu befinden, weil dort H_0 eine höhere Wahrscheinlichkeit wie H_1 hat. Aber H_1 ist auch mit k = 5 und k = 4 möglich. In diesem Fall spricht man von einem β – Fehler, man nimmt H_0 an, obwohl H_1 richtig wäre.

> Die Hypothese H_0 wird **angenommen, obwohl sie falsch ist**.
> In diesen Fällen spricht man von einem β – Fehler oder Fehler 2. Art

β – Fehler setzen immer eine zweite Hypothese voraus und sind für das Abitur nicht relevant.

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Mathematik - Intensivkurs: Hypothesentest

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

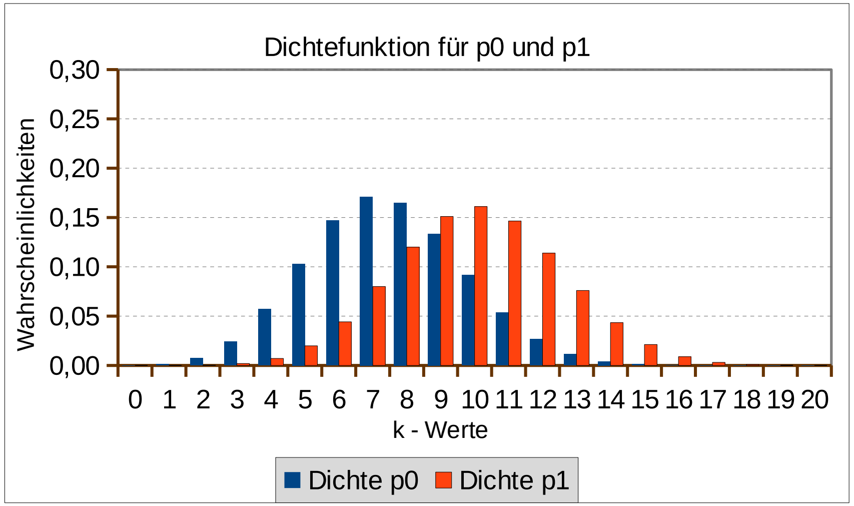
Hypothesentest

Die Nullhypothese und Alternative sind nicht gleichwertig:

- Wir wollen unbedingt vermeiden, daß wir die Nullhypothese verwerfen, obwohl sie wahr ist ("peinlicher Irrtum", Fehler 1. Art).
- Wenn unsere Untersuchung nicht genau genug ist (z.B. aufgrund einer zu geringen Stichprobengröße), kann es aber durchaus passieren, daß wir einen vorhandenen Effekt nicht
- entdecken, also die Nullhypothese belassen,obwohl sie falsch ist (Fehler 2. Art)

Bei einem Hypothesentest beschreibt das Signifikanzniveau die **(maximale) Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art**, die wir zulassen wollen. Für unseren Test soll also auf jeden Fall gelten:
P_{H0} [(X_1,X_2, ...,X_n) liegt im Verwerfungsbereich] $\leq \alpha$.
Das bedeutet für einen rechtsseitigen Test, dass die aufsummierte Wahrscheinlichkeit ab einem Wert k_0 kleiner als α sein muss

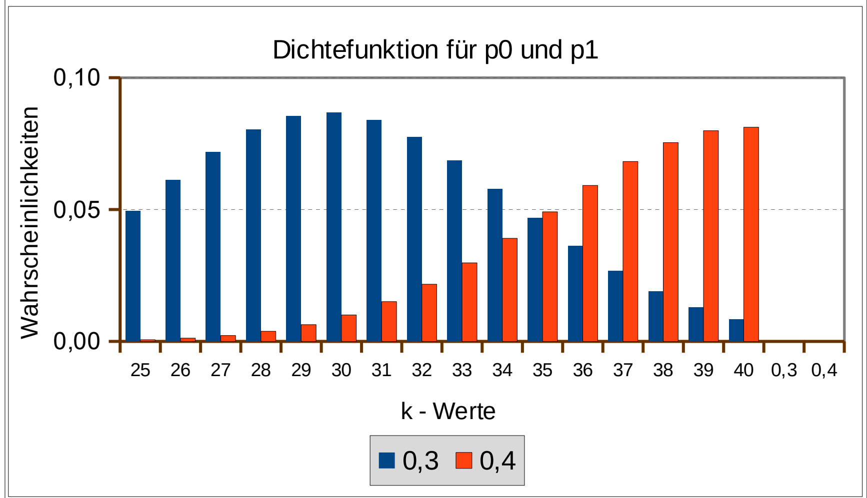
n = 25; p_0 = 0,3; p_1 = 0,4



Aus den beiden Dichtfunktionen wird ein weiteres Problem sichtbar, dass man aus den Eigenschaften der Binomialverteilung ableiten kann:
Liegen für ein Festes n die Wahrscheinlichkeiten dicht beieinander, dann sind die beiden Dichtefunktionen sehr ähnlich.
Das rechte Bild zeigt die Dichtefunktionen für n=25 und p_0 =0,3 und p_1 = 0,4.
Der Überlappungsbereich ist sehr groß, von k=4 bis k=14, bei k=8 und k= 9 sind die Wahrscheinlichkeiten annähernd gleich, aber sehr hoch. Damit wird kaum eine brauchbare Aussage möglich sein.

Das zweite Bild zeigt die Dichtefunktionen für die gleichen Wahrscheinlichkeiten, aber für n = 100. Man erkennt deutlich, dass die beiden Dichtefunktionen weiter auseinandergezogen sind und die Wahrscheinlichkeiten an der Grenze (Balken von H_1 größer als der von H_0) bei 0,05 liegen, während sie bei n=25 bei 0,15 liegen, also wesentlich größer. Daraus ergeben sich zwei wesentliche Merkmale:

1. Je näher die Wahrscheinlichkeiten beieinander liegen, desto schlechter die Trennung in H0 und H1
2. Je kleiner der Stichprobenumfang, desto schlechter die Trennung in H0 und H1



Bei welchem k legt man die kritische Zahl fest. Klar ist bei allen Fällen, wenn man den α – Fehler verkleinern will, erhöht man den β – Fehler und umgekehrt.
Je größer das k, desto kleiner der α –Fehler , und desto größer der β – Fehler
Je kleiner das k, desto kleiner der β – Fehler und desto größer der α –Fehler

Eine sinnvolle Trennstelle ist offenbar dasjenige k, an dem die Säule für die Hypothese H_0 kleiner wird, als die Säule für H_1. In diesem Beispiel ist das genau zwischen den Werten k = 34 und k = 35 der Fall. Also ist einer dieser Werte eine gut geeignete Trennstelle.

Mathematik - Intensivkurs: Hypothesentest

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Hypothesentest	**Zweiseitiger Hypothesentest**	**Zweiseitiger Hypothesentest**

Bei einem **zweiseitigen Test** lautet die Hypothese:

> Liegt die Anzahl der Ereignisse **unter einer Schranke** <u>*oder*</u> **über einer Schranke**, dann ist die Hypothese abzulehnen.
> *(Zumindest für das Abitur nicht relevant)*

Wie beim alternativen Hypothesentest setzt sich auch dieser Test als einem linksseitigen und einen rechtsseitigen Test zusammen. Zu beachten ist dabei, daß die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit zu halbieren ist und für jeden Teiltest die Irrtumswahrscheinlichkeit von α/2 zu benutzen ist.

Zweiseitiger Hypothesentest