Der Gauß Algorithmus heißt auch Gauß'sches Eliminierungsverfahren und ist von **CARL FRIEDRICH GAUSS** (1777 - 1855) im Zusammenhang mit seinen astronomischen Forschungen entwickelt worden. Eliminierungsverfahren heißt er deshalb, weil schrittweise unbekannte Größen (Variablen) beseitigt = lateinisch: eliminiert werden.

Ein Gleichungssystem besteht aus mehreren linearen Gleichungen. Dabei muss man beachten, dass die x-Werte mit demselben Index in allen Gleichungen gleich groß sind. Man kann also sagen, dass die x-Werte mit demselben Index dieselben Summanden darstellen. Allerdings kann ein Summand zwar denselben Index, aber verschiedene Koeffizienten haben. Das bedeutet, derselbe Summand hat verschiedene Faktoren.

Auch die rechten Seiten bei einem Gleichungssystem haben verschiedene Werte. Alles in allem geht es ja immer darum, dass durch mehrere verschiedene Gleichungen ein und dieselben x-Werte ermittelt werden können. Man kann sich jede Gleichung vorstellen als eine andere Summe mit anderen Vielfachen derselben x-Werte.

Man kann das Gauß Verfahren als eine Weiterentwicklung des Additionsverfahrens ansehen, das vom Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablem bekannt ist. Man darf Gleichungszeilen multiplizieren und addieren, ohne, dass sich an der Lösungsmenge des Gleichungssystems etwas ändert. Solche Schritte, die die Lösungsmenge eines Systems nicht ändern, bezeichnet man als Äquivalenzumformungen.
Zu solchen Äquivalenzumformungen gehören:

1.) Das Vertauschen von zwei Gleichungen / zwei Zeilen der Matrix

2.) Addition von zwei Gleichungen / Zeilen der Matrix und Ersetzen einer Gleichung / Zeile durch die Summe.

3.) Multiplikation einer Gleichung / Zeile der Matrix mit einer Zahl ungleich Null.

Gauss-Algorithmus zum Herstellen der Zeilenstufenform einer Matrix

- Ganz zu Beginn prüfen wir, ob die Matrix schon Zeilenstufenform hat. Ganz besonders also eine nur aus 0en bestehende Matrix, hat schon Zeilenstufenform.
- Vor der Durchführung - und theoretisch auch während - darf und soll man Zeilen vertauschen, wenn es von Vorteil ist. Das bedeutet, daß die Zeilen so stehen, daß die Pivotelemente der Zeilen von oben nach unten von ganz links immer weiter nach rechts gehen. Das Pivotelement wird das Element genannt, welches von links gesehen in einer Zeile als erstes ungleich 0 ist.
- Für jede Zeile i, startend mit der obersten Zeile mit i = 1 bis zur vorletzten Zeile tue folgendes:
  - für jede Zeile j, wobei j > i – Die Zeile j liegt somit immer unter der Zeile i – addiere oder subtrahiere ein Vielfaches der Zeile i von j, so dass die Variable a_{ji} – i gibt die Spaltennummer an – 0 wird.

Zum Lösen größerer linearer Gleichungssysteme (ab 3 Variablen) ist es angebracht, ein systematisches Lösungsverfahren zu verwenden. Das Gauss-Verfahren stellt ein derartiges Verfahren dar.
Zur Vereinfachung soll im Folgenden die Matrixschreibweise für lineare Gleichungssysteme verwendet werden.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 5 \\ x_1 + + 2x_3 &= 0 \\ -5x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Lineares Gleichungssystem...

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & +3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & -4 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

...in Matrixschreibweise

In der Matrixschreibweise treten nur noch die Koeffizienten von den Variablen auf, aber nicht mehr die Variablen selbst. Es ist leicht einzusehen, dass die Lösung eines solchen Gleichungssystem nicht davon abhängt, ob die erste Variable x_1 oder t heißt. Das benutzt man in der Matrixschreibweise in der Form, dass man den Variablenbezeichner erst gar nicht hinschreibt.

Rechenschema für den Gauß Algorithmus

Beim Gauß Algorithmus werden schrittweise zwei Rechenschritte mehrfach ausgeführt.

a) Eine Gleichung wird mit einem Faktor multipliziert, es wird also ein Vielfaches der Gleichung gebildet.

b) Das Vielfache der Gleichung wird zu einer anderen Gleichung (oder zu mehreren Gleichungen) addiert.

zu a)
Man beginnt grundsätzlich mit der Gleichung in der ersten Zeile. Es kann durchaus sinnvoll sein, dass man die Zeilen vertauscht, damit der manuelle Rechenaufwand klein bleibt. Für maschinelles Rechnen hat das keine Bedeutung.

Die Idee der Vervielfachung ist folgende: Wenn man alle Glieder der Gleichung, also alle Summanden und **auch** die rechte Seite mit ein und demselben Faktor multipliziert, dann ändert sich der Gesamtwert der Gleichung nicht. Wird die erste Gleichung aus dem Beispiel mit (-3) multipliziert, ändert sich zwar die Form der Summanden und die Summe, aber nicht der Gesamtwert der Gleichung.

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad -6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = -15$$

Dieses Vorgehen ist bereits vom Lösen linearer Gleichungssysteme mit 2 Variablen bekannt. Zur Anwendung des Additionsverfahrens oder auch für das Gleichsetzungsverfahren ist es oftmals notwendig die gesamte Gleichung zu multiplizieren.

Bestimmung der Faktoren

Bevor man mit dem Gauß'schen Algorithmus beginnt, ist es möglich Zeilen zu vertauschen. Für die Rechnung mit der Hand ist es vorteilhaft, wenn in der ersten Zeile und ersten Spalte als Koeffizient eine „1“ stehen könnte. Wenn diese Möglichkeit besteht, sollte man die unbedingt nutzen. Die Berechnung beginnt mit der ersten Zeile und der ersten Spalte. Ab diesem Zeitpunkt darf die erste Zeile nicht mehr vertauscht werden.
Man muss die erste Gleichungszeile und/oder die darunter liegenden Gleichungszeilen so multiplizieren, dass in in jeder Zeile in der ersten Spalte eine 0 entsteht. Die erste Spalte darf dann nur noch in der ersten Zeile einen Wert ungleich 0 haben.
Im nachfolgenden Beispiel muss die zweite Gleichung mit -2 multipliziert werden und anschließend zur ersten Zeile addiert werden, damit in der ersten Spalte der zweiten Zeile eine 0 erscheint.

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_1 + \quad\quad + 2x_3 = 0 \quad | \cdot -2 \quad \downarrow + \\ \hline 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ \mathbf{0} \quad + 3x_2 - 8x_3 = 5 \end{array}$$

Jede weitere Gleichungen wird auf diese Weise bearbeitet. Dabei wird für jede Zeile ein eigener Faktor zu finden sein, der es sichert, dass in der ersten Spalte dieser Zeile eine 0 entsteht.

Eine Veranschaulichung des Gaussalgorithmusses:

Der Gauß'sche Algorithmus arbeitet spaltenweise.
Zuerst werden **alle Zeilen** so umgeformt, dass **in jeder Zeile** in der **ersten Spalte eine 0** steht.
Damit ist der erste Durchlauf beendet und es ist eine neue Matrix entstanden, mit der weiter gerechnet wird.

Als nächstes sind in **allen Zeilen nach der zweiten Zeile** in der **zweiten Spalte 0** nach dem gleichen Schema zu erzeugen und das Fortsetzen, bis man in der letzten Zeile und vorletzten Spalte angelangt ist. Auf diese Art und Weise entsteht eine sogenannte Zeilenstufenform. Unterhalb der Diagonale entstehen alles Nullen.

Erster Durchlauf i = 1:

$$\begin{array}{rcccc} \text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} \text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & X & X & X & X \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} \text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \end{array}$$

Zweiter Durchlauf i = 2:

$$\begin{array}{rcccc} & X & X & X & X \\ \text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\ & 0 & X & X & X \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} & X & X & X & X \\ \text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & 0 & 0 & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \end{array}$$

Dritter Durchlauf i = 3:

$$\begin{array}{rcccc} & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & 0 & X \end{array}$$

Aus der so gewonnenen Zeilenstufenform der Matrix lassen sich die Lösungen berechnen. Das macht man, indem man das Gleichungssystem in Matrixschreibweise wieder in einzelne Gleichungen umformt und von unten beginnend nach der jeweils nächsten Variablen auflöst. bereist aus Gleichungssystemen mit zwei Variablen ist bekannt, dass Gleichungssysteme eindeutig lösbar sein können, unlösbar sein können oder unendlich viele Lösungen besitzen kann. Das trifft natürlich auch auf größere Gleichungssysteme zu und es ist zu klären, woran erkennt man nach Beendigung des Verfahrens, welchen Typ von Gleichungssystem man vorliegen hat. Das ist für die Arbeit mit dem gaußschen Algorithmus eine entscheidende Frage.

Eindeutig lösbares Gleichungssystem

Das folgende System soll mit dem GAUSS-Verfahren gelöst werden.

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= -3\\
-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 7\\
3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 0\\
x_1 \phantom{{}+ x_2} + 4x_3 - x_4 &= 4
\end{aligned}
$$

Lösung:
Zunächst wird das gegebene Gleichungssystem in das GAUSS-Schema übertragen. Dabei werden die Koeffizienten jeder Gleichung in eine Zeile und die zu gleichen Variablen gehörigen in eine Spalte eingetragen. Tritt eine der Variablen in einer Gleichung nicht auf, so wird an die Stelle ihres Koeffizienten eine Null geschrieben. Unbekannte, die im System ohne Koeffizienten erscheinen, erhalten im Schema die Eins als Koeffizient. Somit ergibt sich die nachfolgende Tabelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
2	−3	4	1	−3
−1	2	2	−3	7
3	1	−2	4	0
1	0	4	−1	4

Nun kann mit der Elimination begonnen werden. Zunächst werden die erste und zweite Zeile vertauscht, um die nachfolgende Rechnung zu erleichtern. Steht nämlich in der Zeile, deren Vielfaches zu den weiteren dazuaddiert wird, in der ersten Position eine 1 oder −1, so braucht nur diese mit einem Faktor multipliziert zu werden. Dann werden die Zeilen (Gleichungen) einschließlich der rechten Seite so kombiniert, dass sich in der ersten Spalte ab Zeile 2 Nullen ergeben. Im zweiten Eliminationsschritt werden dann in der zweiten Spalte unterhalb der Zeile 2 Nullen erzeugt. Nach dem dritten Schritt ist die gewünschte Dreiecksform erzeugt. Die verwendeten Koeffizienten werden wieder rechts neben dem Schema angegeben.

x_1	x_2	x_3	x_4	b		
−1	2	2	−3	7	| · 2 | · 3 | · 1	
2	−3	4	1	−3	| · 1	
3	1	−2	4	0	| · 1	
1	0	4	−1	4	| · 1	
					1. Eliminationsschritt	
−1	**2**	**2**	**−3**	**7**	**Übernehmen 1. Zeile**	**unantastbar**
0	1	8	−5	11	| · (−7) | · (−2)	
0	7	4	−5	21	| · 1	
0	2	6	−4	11	| · 1	
					2. Eliminationsschritt	
−1	**2**	**2**	**−3**	**7**	**Übernehmen 1. Zeile**	**unantastbar**
0	**1**	**8**	**−5**	**11**	**Übernehmen 2. Zeile**	
0	0	−52	30	−56	(3) : (2)	
0	0	−10	6	−11		
−1	2	2	−3	7		
0	1	8	−5	11		
0	0	−26	15	−28	| · 5	
0	0	−10	6	−11	| · (−13)	
					3. Eliminationsschritt	
−1	**2**	**2**	**−3**	**7**	**Übernehmen 1. Zeile**	
0	**1**	**8**	**−5**	**11**	**Übernehmen 2. Zeile**	**unantastbar**
0	**0**	**−26**	**15**	**−28**	**Übernehmen 3. Zeile**	
0	0	0	−3	3	(4)	

In den Gleichungen (1) bis (4) ist die Dreiecksform hergestellt. Nun kann die Lösung durch Rückwärtseinsetzen gewonnen werden. Man beginnt mit der Gleichung (4).

(4) $-3x_4 = 3$ $\Rightarrow$ $\mathbf{x_4 = -1}$

(3) $-26x_3 - 15 = -28$ $\Rightarrow -26x_3 = -13$ $\Rightarrow$ $\mathbf{x_3 = 0.5}$

(2) $x_2 + 4 + 5 = 11$ $\Rightarrow x_2 = \mathbf{2}$

(1) $-x_1 + 4 + 1 + 3 = 7$ $\Rightarrow -x1 = -1$ $\Rightarrow x1 = \mathbf{1}$

Parameterlösung eines Gleichungssystems

Die in den bisherigen Beispielen betrachteten Aufgaben waren eindeutig lösbar. Ist dies nicht der Fall, so lässt sich mit dem GAUSS-Verfahren entweder die Nichtlösbarkeit zeigen oder eine unendliche Lösungsmenge bestimmen.

$$\begin{aligned} 4x - 3y + z &= 14 \\ 5x - 4y - 2z &= 10 \\ 11x - 9y - 7z &= 16 \end{aligned}$$

Lösung:
Wie in den bisher betrachteten Aufgaben werden die Koeffizienten des Systems in das GAUSS-Schema übertragen. Anschließend wird die Transformation auf Dreiecksgestalt vorgenommen.

$$\begin{array}{rrr|rll}
4 & -3 & 1 & 14 & \mid \cdot (-5) & \mid \cdot (-11) \\
5 & -4 & -2 & 10 & \mid \cdot 4 & \\
11 & -9 & -7 & 16 & & \mid \cdot 4 \\
\hline
4 & -3 & 1 & 14 & & \\
0 & -1 & -13 & -30 & \mid \cdot (-3) & \\
0 & -3 & -39 & -90 & \mid \cdot 1 & \\
\hline
4 & -3 & 1 & 14 & (1) & \\
0 & -1 & -13 & -30 & (2) & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (3) &
\end{array}$$

Beim Versuch, die letzte Zeile so umzuformen, dass der Koeffizient vor y zu null wird, ergibt sich eine vollständige Nullzeile. Offenbar sind nach dem ersten Eliminationsschritt die zweite und die dritte Gleichung Vielfache voneinander. Damit sind nur zwei linear unabhängige Gleichungen vorhanden, sodass die Lösung nicht eindeutig bestimmt werden kann.
Im Lösungsschema zeigt sich dies so, dass die Koeffizientenmatrix nicht in eine „echte“ Dreiecksform umgewandelt werden kann. Vielmehr entsteht nach Beendigung der Eliminationsphase eine Trapezgestalt der Zeilen (1) und (2). Da sich in Gleichung (3) auch auf der rechten Seite eine Null ergibt, tritt kein Widerspruch auf, das System kann also gelöst werden. Die verbliebene Systemmatrix besitzt zwei Zeilen, während die Anzahl der Unbekannten drei ist. Es muss somit ein Parameter in die Lösungsdarstellung eingeführt werden. Setzt man z = t, so können durch Rückwärtseinsetzen auch x und y in Abhängigkeit vom Parameter t angegeben werden:

$$\begin{array}{lllll}
(3) & z = t & & & \\
(2) & -y - 13t = -30 & \Rightarrow\ -y = 13t - 30 & \Rightarrow & y = 30 - 13t \\
(1) & 4x - 3(30 - 13t) + t = 14 & \Rightarrow\ 4x = 104 - 40t & \Rightarrow & x = 26 - 10t.
\end{array}$$

Die erhaltene Lösung lautet damit:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 - 10t \\ 30 - 13t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wenn nach dem Gaus'schen Algorithmus komplette Nullzeilen auftreten, dann ist für jede Nullzeile eine Variable beliebig wählbar, das müssen nicht unbedingt die in den letzten Spalten stehenden Variablen sein.

Unlösbares Gleichungssystem

Am Ergebnis des GAUSS-Verfahrens lässt sich auch ableiten, wenn ein Gleichungssystem nicht lösbar ist.

$$\begin{aligned} 5x - 7y + 3z &= 8 \\ 2x - 3y + 4z &= 9 \\ -3x + 5y - 13z &= 10 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	b		
5	−7	3	8	| · (−2)	| · 3
2	−3	4	9	| · 5	
−3	5	−13	10		| · 5
5	−7	3	8		
0	−1	14	29	| · 4	
0	4	−56	74	| · 1	
5	−7	3	8		
0	−1	14	29		
0	**0**	**0**	**190**		

Wie im vorangegangenen Beispiel lässt sich auch hier die Koeffizientenmatrix nicht in eine Dreiecksform überführen. Die dritte Zeile der transformierten Matrix enthält nur Nullen.
Während jedoch im zweiten Beispiel auch die rechte Seite null wurde, ist dies im aktuellen Fall nicht so. Die letzte Zeile zeigt einen Widerspruch an:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 190.$$

Diese Gleichung kann niemals erfüllt werden. Das Gleichungssystem hat somit keine Lösung.
Dabei können durchaus auch komplette Nullzeilen auftreten.

Existiert auch nur eine Zeile, bei der im Koeffizientenbereich nur Nullen auftreten, aber auf der rechten Seite nicht, ist das Gleichungssystem unlösbar.

Besitzt die transformierte Systemmatrix am Ende der Eliminationsphase

• Dreiecksform, so ist das System ***eindeutig lösbar***,

• Trapezform (eine oder mehrere Nullzeilen in der transformierten Matrix), so gilt:
– Ist die rechte Seite in den Positionen der Matrixnullzeilen ebenfalls null, so hat das System ***unendlich viele Lösungen***.
Ist k die Anzahl der verbliebenen Nichtnullzeilen, so enthält die Lösung n−k freie Parameter.

– Steht auf der rechten Seite einer Nullzeile der transformierten Matrix keine Null, so zeigt dies einen Widerspruch an. Das System besitzt dann ***keine Lösung***.

Fortsetzung des gaußschen Algorithmus

Mit der Erzeugung der Zeilenstufenform muss man den Gaußschen Algorithmus nicht beenden. Es gibt die Möglichkeit, weiter zu rechnen, so dass nicht nur unterhalb der Diagonale Nullen entstehen, sondern auch oberhalb. Dazu führt man den Gauß'schen Algorithmus noch einmal von unten nach oben durch.
Diese Möglichkeit besteht aber nur, wenn in der letzten Zeile nicht alles Nullen entstanden sind.
Jetzt bleibt die letzte Zeile fest und man versucht in der vorletzten und allen darüberliegenden Zeilen in der letzten Spalte Nullen zu erzeugen. Dann ab der vorletzten Zeile in der vorletzen Spalte aller darüber liegenden Zeilen usw.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &= -6 \end{aligned}$$

in Matrixschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ -2 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -3 & \\ & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -11 & -23 \\ 0 & 11 & -7 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 11 \\ -10 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -11 & -23 \\ 0 & 0 & -51 & -153 \end{array}\right)$$

Die unterste Matrix ist jetzt in Stufenform. Jetzt kann man schrittweise nach den Variablen auflösen:

Aus (III) $-51x3 = -153$ folgt: $x_3 = 3$
eingesetzt in (II) ergibt sich: $10x_2 - 33 = -23$; daraus folgt: $x_2 = 1$
x_2 und x_3 in (I) eingesetzt ergibt: $3x_1 + 4 - 6 = 4$; daraus folgt $x_1 = 2$

Der Algorithmus soll jetzt fortgesetzte werden, um von einer Dreiecksmatrix zu einer Diagonalmatrix zu kommen. Eine Diagonalmatrix besitzt nur noch in der Diagonale Werte die verschieden von 0 sind. Oberhalb und unterhalb der Diagonale treten nur noch Nullen auf.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -11 & -23 \\ 0 & 0 & -51 & -153 \end{array}\right) \begin{array}{cc} & 51 \\ 51 & \\ -11 & -2 \end{array}$$

Um die Zahlen zu verkleinern wurde jede Zeile entsprechend dividiert.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 153 & 204 & 0 & 510 \\ 0 & 510 & 0 & 510 \\ 0 & 0 & -51 & -153 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 51 & 68 & 0 & 170 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -17 & -51 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \\ 68 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -51 & 0 & 0 & -102 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -17 & -51 \end{array}\right)$$

Damit ist eine Diagonalmatrix entstanden, dh. eine Matrix, die nur noch in der Hauptdiagonale Zahlen hat und alle anderen Einträge sind 0. Jetzt ist jede Zeile durch den Wert, der in der Hauptdiagonale steht zu dividieren und man erhält auf der rechten Seite die Werte der einzelnen Variablen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{array}$$

Das ist der Rechenweg, den der GTR benutzt und die Lösung des Gleichungssystems in der rechten Seite steht.

