

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
-------	--------------------	-----------------

Dreiecke

Dreiecke

Das Dreieck ist ein Vieleck. In der Ebene ist es die einfachste Figur, die von geraden Linien begrenzt wird.

Ecken:

Jedes Dreieck hat drei Ecken, die meist mit Großbuchstaben (A, B, C) gegen den Uhrzeigersinn beschriftet werden.

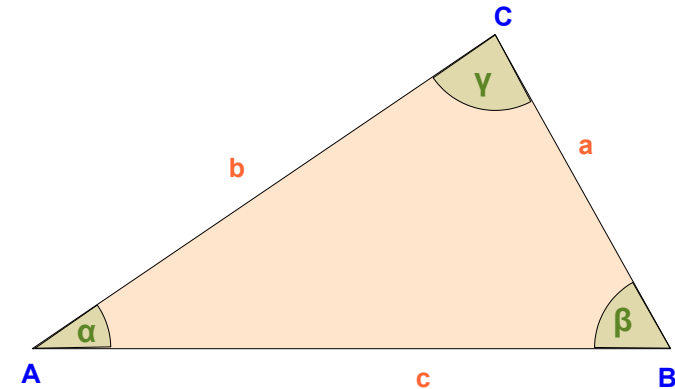
Seiten:

Die drei Begrenzungslinien des Dreiecks nennt man Seiten und werden meist mit Kleinbuchstaben (a, b, c) beschriftet. Die Seite a liegt gegenüber dem Eckpunkt A, die Seite b gegenüber dem Eckpunkt B, usw.

Winkel:

In jedem Dreieck gibt es drei Innenwinkel, die meist mit griechischen Buchstaben bezeichnet werden:

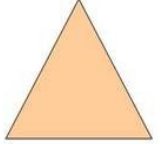
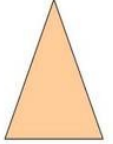
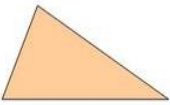
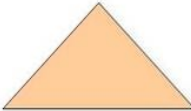
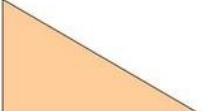
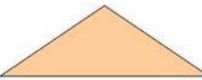
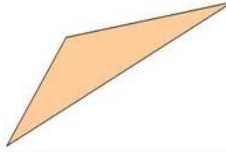
Winkel α beim Eckpunkt A, Winkel β beim Eckpunkt B und Winkel γ beim Eckpunkt C



Dreiecksarten



Nach den Seiten:

		Gleichseitiges Δ (alle 3 Seiten sind gleich lang)	Gleichschenkliges Δ (2 Seiten sind gleich lang)	ungleichseitiges Δ (3 verschieden lange Seiten)
Nach den Winkeln:	Spitzwinkliges Δ			
	Rechtwinkliges Δ			
	Stumpfwinkliges Δ			

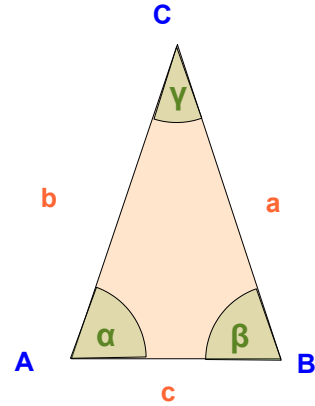
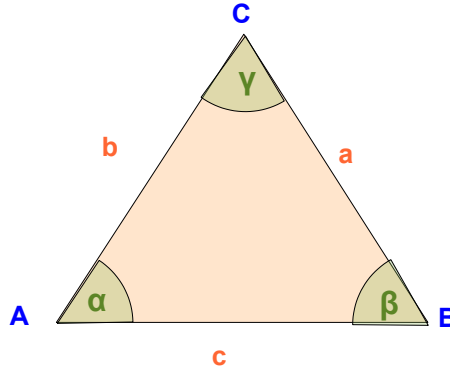
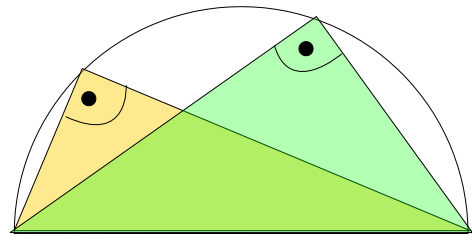
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Bezeichnungen	a, b, c ... Seiten A, B, C ... Eckpunkte α, β, γ ... Winkel α', β', γ' ... Komplementwinkel $\omega' = 90^\circ - \omega$ $\alpha'', \beta'', \gamma''$... Supplementwinkel $\omega'' = 180^\circ - \omega$ s_a, s_b, s_c ... Seitenhalbierende M_a, M_b, M_c ... Mittelpunkte der Seiten S ... Schwerpunkt, Schnittpunkt der Seitenhalbierenden U ... Umkreismittelpunkt, Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_a, m_b, m_c ... Mittelsenkrechte, Lote von O auf die Seiten R ... Umkreisradius I ... Inkreismittelpunkt, Schnittpunkt der Winkelhalbierenden I_a, I_b, I_c ... Fußpunkte der Lote von I auf die Seiten (Berührungspunkte des Inkreises) $i_{Ba}, i_{Ca}, i_{Ab}, i_{Cb}, i_{Bc}, i_{Ac}$... Seitenabschnitte an den Fußpunkten der Lote von I auf die Seiten w_A, w_B, w_C ... Winkelhalbierende $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$... Winkelhalbierendenabschnitte, AI, BI, CI W_a, W_b, W_c ... Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit der Seite r ... Inkreisradius I_A, I_B, I_C ... Mittelpunkt der Ankreise über BC, AC, AB r_a, r_b, r_c ... Radien der Ankreise $I_{Aa}, I_{Bb}, I_{Cc}, I_{Bc}, I_{Ca}$... Berührungspunkte der Ankreise mit den Seiten I_{Ab} : Der Ankreis um I_A berührt die Seite b $a_{AB}, a_{AC}, a_{BC}, a_{BA}, a_{CB}, a_{CA}$... Abstände der Ankreismittelpunkte zu den Eckpunkten a_{AB} : Abstand von I_A (erster Buchstabe) zum Eckpunkt B H ... Schnittpunkt der Höhen h_A, h_B, h_C ... Höhen $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$... obere Höhenabschnitte, AH, BH, CH h_a, h_b, h_c ... untere Höhenabschnitte, Lote von H auf die Seiten H_A, H_B, H_C ... Fußpunkte der Höhen $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$... die Halbierungspunkte von $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$ $a_B, a_C, b_A, b_C, c_B, c_A$... Seitenabschnitte an den Fußpunkten der Höhen	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Bezeichnungen F $F[ABC]$ R_F $e = HU$ $R_F = R/2$ $s = \frac{1}{2} (a + b + c)$ $2s = a + b + c$	... Mittelpunkt des Feuerbachschen- (9-Punkte-) Kreises ... Flächeninhalt (aus dm Zusammenhang wird klar, welches F gemeint ist!) ... Radius des Feuerbachkreises ... Eulersche Gerade (Länge der Strecke) ... Radius des Feuerbachschen Kreises ... Halber Dreiecksumfang ... Dreiecksumfang	

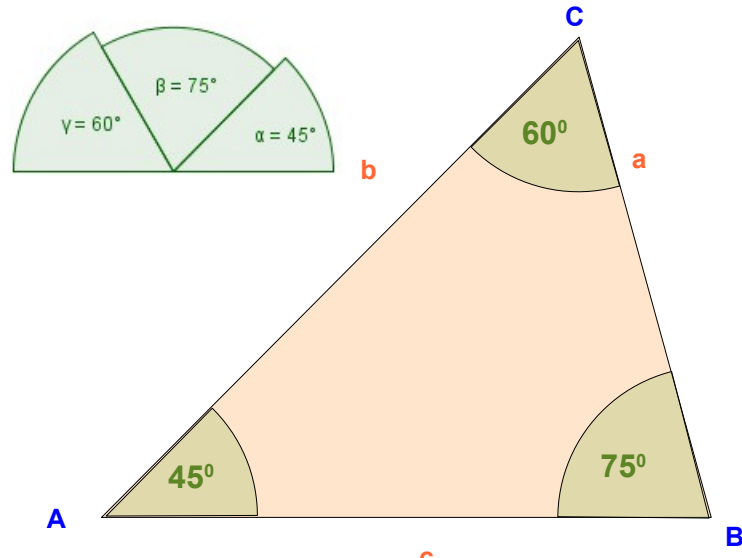
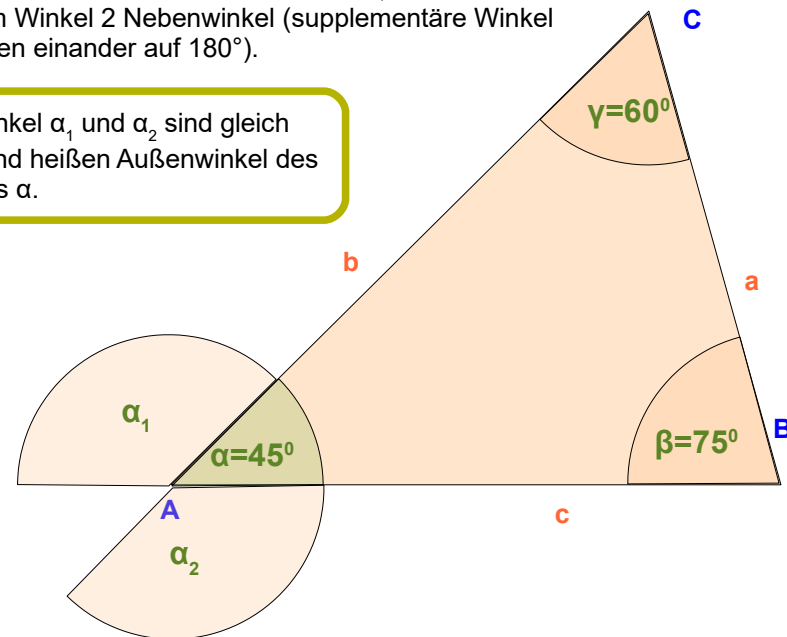
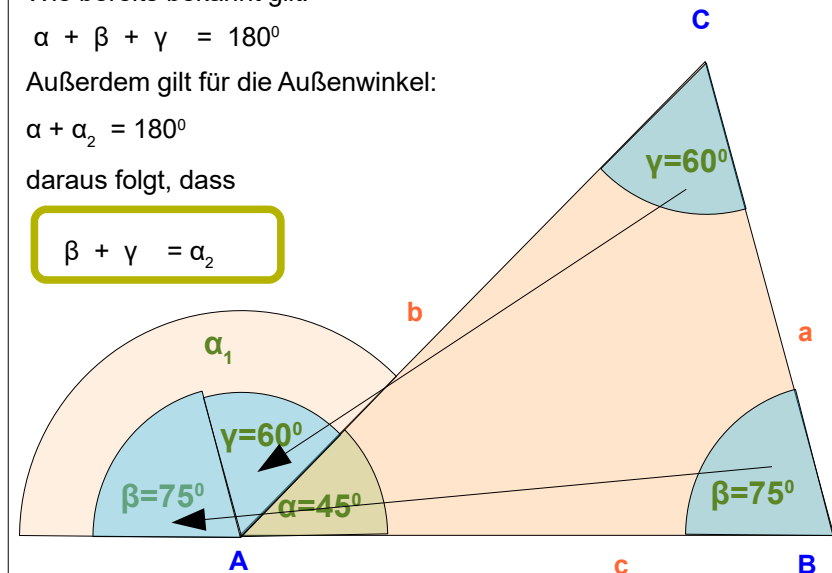
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Dreiecke	• Gleichschenkliges Dreieck Ein gleichschenkliges Dreieck wird durch eine Symmetrieachse (= Höhe auf die Basis) in zwei gleich große Teile (zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke) geteilt. In der Praxis findet man gleichschenklige Dreiecke oft bei Kirchtürmen oder Giebeldächern. Die Schenkel sind gleich lang: $a = b$ Die Basiswinkel sind gleich groß: $\alpha = \beta$	$A = \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4a^2 - c^2}$ $= \frac{c}{4} \cdot \sqrt{4a^2 - c^2}$ $U = 2 \cdot a + c$ 
	• Gleichseitiges Dreieck Gleichseitige Dreiecke kommen in der Natur sehr häufig vor, z.B. haben viele Verkehrszeichen die Form eines gleichseitigen Dreiecks. Wie der Name schon sagt, sind alle 3 Seiten dieses Dreiecks gleich lang. Daraus folgt, dass auch alle 3 Winkel gleich groß sein müssen. Die Winkelsumme jedes Dreiecks beträgt immer 180°, dividiert durch 3 ergibt das eine Winkelgröße von 60°. Alle Seiten sind gleich lang: $a = b = c$ Alle Winkel sind gleich groß: $\alpha = \beta = \gamma$	$A = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ $= \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$ $U = 3 \cdot a$ 
	• Satz von Thales Ist eine Dreiecksseite der Durchmesser eines Kreises und der dritte Punkt des Dreiecks liegt auf der Peripherie des Kreises, dann ist das Dreieck ein rechtwinkliges Dreieck	

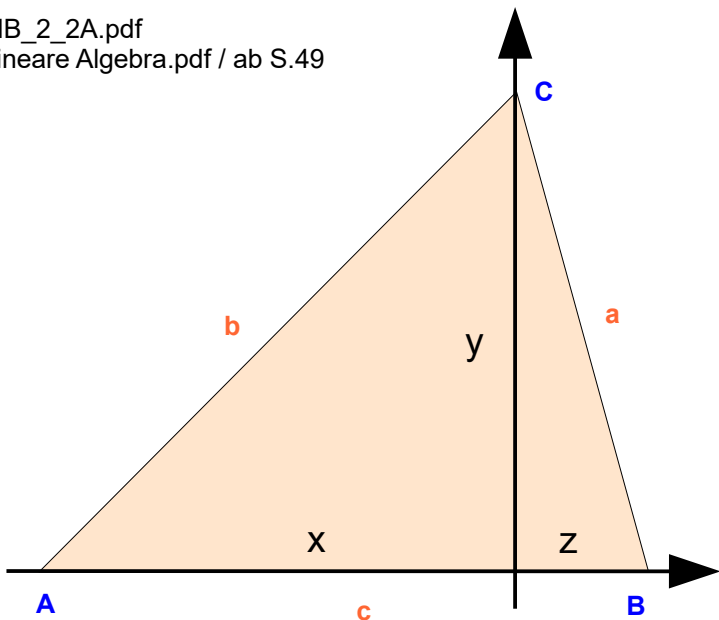
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Dreiecke	Rechtwinkliges Dreieck Da ein rechtwinkliges Dreieck einen rechten Winkel ($= 90^\circ$) hat und die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt, bleibt für die anderen beiden Winkel noch genau 90° übrig. Zwei Winkel, die zusammen 90° ergeben, nennt man Komplementärwinkel. Die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck heißt Hypotenuse. Sie liegt gegenüber des rechten Winkels. Die beiden kürzeren Seiten heißen die Katheten. Sie schließen den rechten Winkel ein. $A = \frac{1}{2} a b$	
	Spitzwinkliges Dreieck Bei einem spitzwinkligen Dreieck sind alle 3 Winkel kleiner als 90° (= spitze Winkel).	
	Stumpfwinkliges Dreieck Das nebenstehende Dreieck ist ein stumpfwinkliges Dreieck, weil der Winkel β größer als 90° ist. Ein Sonderfall davon wäre ein gleichschenkelig-stumpfwinkliges Dreieck (2 Seiten sind gleich lang und jener Winkel, den sie einschließen, ist ein stumpfer Winkel).	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Dreiecke	Die Innenwinkel eines Dreiecks Wir konstruieren ein beliebiges Dreieck. Die 3 Winkel werden nun abgeschnitten. Legt man nun die 3 Winkel so nebeneinander, dass sie denselben Scheitelpunkt haben, so beträgt ihre Summe immer 180°. Die Winkelsumme der drei Innenwinkel beträgt immer 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$	
	Die Außenwinkel eines Dreiecks Verlängert man die Seiten eines Dreiecks, so entstehen bei jedem Winkel 2 Nebenwinkel (supplementäre Winkel = ergänzen einander auf 180°). Die Winkel α_1 und α_2 sind gleich groß und heißen Außenwinkel des Winkels α. 	Wie bereits bekannt gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ Außerdem gilt für die Außenwinkel: $\alpha + \alpha_2 = 180^\circ$ daraus folgt, dass $\beta + \gamma = \alpha_2$ 

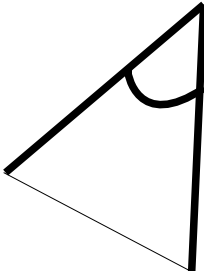
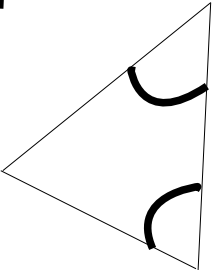
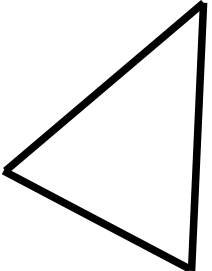
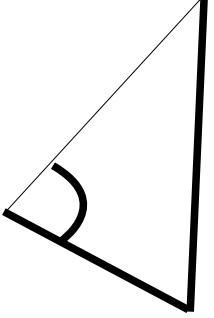
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Dreiecke	★ Umwandlung eines Dreiecks aus Seiten in Eckpunktkoordinaten Gegeben ist ein Dreieck mit seinen Seiten a, b und c. Zur Berechnung verschiedener Werte des Dreiecks, soll das Dreieck in die Vektorrechnung überführt werden. Dazu müssen die Koordinaten der Eckpunkte bestimmt werden. Vernünftigerweise legt man den Punkt A auf die x – Achse in den negativen Bereich der Achse, so dass seine Koordinaten heißen : A (x 0) Der Punkt B liegt ebenfalls auf der x – Achse, aber im positiven Bereich. : B (z 0) Für den Punkt C wählt man die Koordinaten C (0 y) auf der y – Achse. Wie kann man die Werte für x, y und z mit den Seitenlängen a, b und c berechnen ? Nach dem Pythagoras gilt : $x^2 + y^2 = b^2$ und $(c-x)^2 + y^2 = a^2$ $\begin{aligned} (c-x)^2 + y^2 &= a^2 \\ c^2 - 2cx + x^2 + y^2 &= a^2 \\ c^2 - 2cx + b^2 &= a^2 \\ b^2 + c^2 - a^2 &= 2cx \end{aligned}$ $x = - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$ $z = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$ Der Wert für x muss negativ sein. $\begin{aligned} &= \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc - 2bc}{2c} \\ &= \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{2c} - \frac{2bc}{2c} \\ &= \frac{2s \cdot 2(s - a)}{2c} - \frac{2bc}{2c} \end{aligned}$ $x = \frac{2s(s - a)}{c} - b$ x und z sind die Seitenabschnitte, in die der Höhenfußpunkt der Seite c die Seite c teilt. Berechnung erfolgt weiter hinten im Kapitel Höhen auf der Seite Seitenabschnitte	MB_2_2A.pdf Lineare Algebra.pdf / ab S.49  unter Benutzung der Formeln für den halben Umfang: $\begin{aligned} 2s &= a + b + c \\ 2(s - a) &= b + c - a \\ 2(s - b) &= c + a - b \\ 2(s - c) &= a + b - c \end{aligned}$ $\begin{aligned} (s - c) + (s - a) &= b \\ (s - a) + (s - b) &= c \end{aligned}$

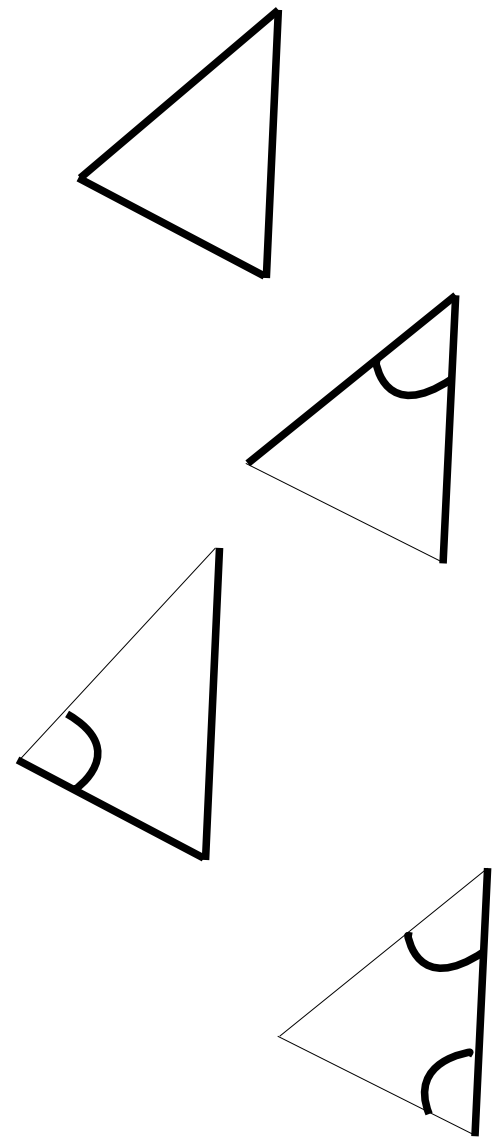
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Dreiecke	$x^2 + y^2 = b^2$ $y^2 = b^2 - x^2$ $y^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)^2$ $= \left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right) \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)$ $= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} \cdot \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c}$ $= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2c} \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c}$ $= \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c+a)(b+c-a)}{4c^2}$ $= \frac{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)}{4c^2}$ $= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}$ $y = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2}{c} F$ Der y Wert für den Punkt C entspricht der Höhe auf die Seite c.	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Dreiecke	• Ähnliche Dreiecke Zwei Dreiecke heißen ähnlich, wenn ihre Seitenlängen in dem gleichen proportionalen Verhältnis stehen (zentrische Streckung) und ihre Innenwinkel gleich sind. <i>Erster Ähnlichkeitssatz</i> Seite - Winkel - Seite Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen <i>Zweiter Ähnlichkeitssatz</i> Winkel – Winkel – (Winkel) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen Wenn zwei Winkel gleich sind, muss wegen der Winkelsumme auch der dritte Winkel gleich sein. <i>Dritter Ähnlichkeitssatz</i> Seite - Seite - Seite Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis aller drei Seiten übereinstimmen <i>Vierter Ähnlichkeitssatz</i> Winkel - Seite - Seite Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.	   

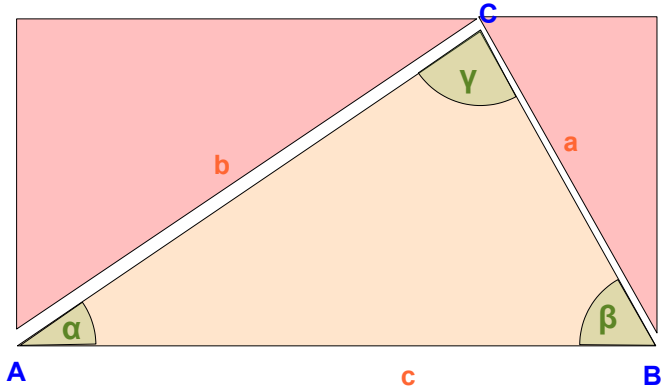
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Dreiecke	Kongruente Dreiecke Zwei Dreiecke heißen <i>Kongruent</i> (Deckungsgleich), wenn sie völlig übereinstimmen und übereinandergelegt werden können, so dass keines der Dreiecke unter dem anderen herauschaut. Der Unterschied zu den Ähnlichkeitssätzen besteht darin, dass bei Ähnlichkeit die Seiten in einem gleich Verhältnis stehen, während bei kongruent die Seiten gleich lang sein müssen <i>Erster Kongruenzsatz</i> Seite - Seite - Seite Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in drei Seiten übereinstimmen <i>Zweiter Kongruenzsatz</i> Seite – Winkel - Seite Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem dazwischenliegenden Innenwinkel übereinstimmen <i>Dritter Kongruenzsatz</i> Seite - seite - Winkel Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen. <i>Vierter Kongruenzsatz</i> Winkel - Seite - Winkel Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Innenwinkeln übereinstimmen	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele			
Formeln	• Allgemeines Dreieck Das wohl am häufigsten vorkommende Dreieck ist das ungleichseitige (oder auch unregelmäßige Dreieck). Ein ungleichseitiges Dreieck hat 3 verschieden lange Seiten und demnach auch 3 verschieden große Winkel. $U = a + b + c$ In vielen Formeln häufig benutzte Abkürzung s für die Hälfte des Umfangs des Dreiecks $s = \frac{1}{2} (a + b + c) = \frac{1}{2} U$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%; vertical-align: top;"> $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ $s-a = \frac{b+c-a}{2}$ $2(s-a) = b+c-a$ $(s-b) + (s-c) = a$ </td><td style="width: 33%; vertical-align: top;"> $\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$ $\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$ $\tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$ $s-b = \frac{c+a-b}{2}$ $2(s-b) = c+a-b$ $(s-c) + (s-a) = b$ </td><td style="width: 33%; vertical-align: top;"> $\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ $\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$ $\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$ $s-c = \frac{a+b-c}{2}$ $2(s-c) = a+b-c$ $(s-a) + (s-b) = c$ </td></tr> </table> $s = 4 R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ $s-a = 4 R \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$	$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ $s-a = \frac{b+c-a}{2}$ $2(s-a) = b+c-a$ $(s-b) + (s-c) = a$	$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$ $\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$ $\tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$ $s-b = \frac{c+a-b}{2}$ $2(s-b) = c+a-b$ $(s-c) + (s-a) = b$	$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ $\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$ $\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$ $s-c = \frac{a+b-c}{2}$ $2(s-c) = a+b-c$ $(s-a) + (s-b) = c$	
$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ $s-a = \frac{b+c-a}{2}$ $2(s-a) = b+c-a$ $(s-b) + (s-c) = a$	$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$ $\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$ $\tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$ $s-b = \frac{c+a-b}{2}$ $2(s-b) = c+a-b$ $(s-c) + (s-a) = b$	$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ $\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$ $\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$ $s-c = \frac{a+b-c}{2}$ $2(s-c) = a+b-c$ $(s-a) + (s-b) = c$			

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Formeln	★ Flächenformeln für das Dreieck Koeffizient * Grundlinie * Höhe $F = \frac{1}{2} c h_c$ Der Flächeninhalt des Dreiecks ist halb so groß wie der Flächeninhalt des Rechtecks $F = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$ Flächenformeln, in denen alle drei Winkel oder Seiten auftreten: Heronsche Formel $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $F = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$ $F = \frac{1}{4} \sqrt{2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}$ $F = 2 \cdot R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \quad (R \text{ Umkreisradius: siehe Mittelsenkrechte})$ $F = s^2 \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2}$ $F = \frac{abc}{4R}$ $F = rs$ $F = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$ $F = 4 \cdot r \cdot R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$ Flächenformeln, in denen ein Winkel oder eine Seiten auftritt: $F = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin \beta} = \frac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \cdot \sin \gamma}$ $F = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ca \sin \beta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ $F = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$ $F = r_a (s - a) = r_b (s - b) = r_c (s - c)$	 Wir konstruieren ein beliebiges Dreieck ABC: (Alle Angaben in cm) Dreieck ergänzt zu einem Viereck Nun ergänzen wir das Dreieck zu einem Rechteck. Flächeninhaltsformel des Rechtecks:

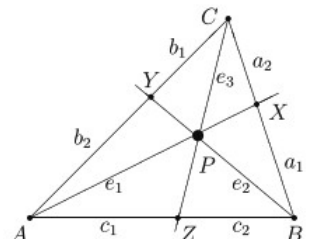
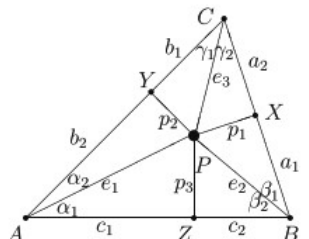
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Formeln	Berechnung fehlender Dreiecksstücke	
	★ 1 Seite und 2 Winkel (= 3 Winkel) bekannt (WWS, WSW, SSW)	
	Bekannt: α, β, γ und die Seite a $b = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad c = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$ b $a = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad c = b \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$ c $a = c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad b = c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$	
	★ 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel (SWS)	
	Bekannt: Seite b, c Winkel α $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$ Seite a, c Winkel β $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta}$ Seite a, b Winkel γ $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$ $a^2 + bc \cos \alpha = b^2 + ca \cos \beta = c^2 + ab \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$ die Winkelberechnung erfolgt wie unter: drei Seiten gegeben	$a = b \cos \gamma + c \cos \beta$ $b = c \cos \alpha + a \cos \gamma$ $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$ $2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$ $2ca \cos \beta = c^2 + a^2 - b^2$ $2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2$
	★ 1 große Seite, 1 kleine Seite und an die kleine Seite angrenzender Winkel (SsW oder WsS)	
	Bekannt: Berechnet den der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel Seite a, b Winkel α $\beta = \arcsin\left(b \cdot \frac{\sin \alpha}{a}\right)$ Seite a, b Winkel β $\alpha = \arcsin\left(a \cdot \frac{\sin \beta}{b}\right)$ Seite a, c Winkel α $\gamma = \arcsin\left(c \cdot \frac{\sin \alpha}{a}\right)$ Seite a, c Winkel γ $\alpha = \arcsin\left(a \cdot \frac{\sin \gamma}{c}\right)$ Seite b, c Winkel β $\gamma = \arcsin\left(c \cdot \frac{\sin \beta}{b}\right)$ Seite a, b Winkel γ $\beta = \arcsin\left(b \cdot \frac{\sin \gamma}{c}\right)$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Formeln	★ 3 Seiten $\alpha = \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right) \quad \beta = \arccos\left(\frac{b^2 - c^2 - a^2}{-2ca}\right) \quad \gamma = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right)$	$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}U$ In vielen Formeln häufig benutzte Abkürzung s für die Hälfte des Umfangs des Dreiecks
	★ Mollweidsche Formeln $\frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad \frac{c+a}{b} = \frac{\cos \frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$ $\frac{b-c}{a} = \frac{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin \frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$	★ Formeln mit Benutzung des halben Umfangs s $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ $\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}} \quad \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$ $\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$
	★ Tangenssatz $\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan \frac{\beta-\gamma}{2}}$	$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ $\tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$ $\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$
	★ Weitere Formeln für allgemeine Dreiecke $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + 1$ $-\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$ $-\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - 1$ $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ $-\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$ $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1$ $-\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + 1$	$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma$ $\cot \beta \cot \gamma + \cot \gamma \cot \alpha + \cot \alpha \cot \beta = 1$ $\tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = 1$ $\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} = \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} \cot \frac{\gamma}{2}$ $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 2$ $-\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$ $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = -2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1$ $-\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = -2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + 1$ $-\sin^2 2\alpha + \sin^2 2\beta + \sin^2 2\gamma = -2 \cos 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma$ $-\cos^2 2\alpha + \cos^2 2\beta + \cos^2 2\gamma = 2 \cos 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma + 1$

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Punkte im Dreiecke	● Eck – Seiten – Transversale Geraden, die ein Dreieck schneiden, heißen Transversalen. Geraden, die eine Dreiecksseite und den gegenüberliegenden Eckpunkt schneiden, heißen Ecktransversalen. Zwei willkürlich gewählte Geraden schneiden sich – wenn nicht der Ausnahmefall der Parallelität gegeben ist – in genau einem Punkt. Drei willkürlich gewählte Geraden schneiden sich im allgemeinen in drei Punkten. Beim Dreieck kommt es aber häufig vor (man hat sogar den Eindruck, es ist die Regel), daß sich drei Geraden (z.B. drei Ecktransversalen) in einem Punkt schneiden. Im Falle der Mittelsenkrechten (die keine Ecktransversalen sind) oder der Winkelhalbierenden fällt der Beweis dafür nicht schwer, weil die entsprechenden Punkte (Umkreis- bzw. Inkreismittelpunkt) besondere waren. Aber schon für die Höhen, deren Schnittpunkt nur dadurch ausgezeichnet ist, daß sich in ihm die Höhen schneiden, ist so ein Beweis wesentlich schwieriger. Es gibt aber einen Satz, der den Fall, daß sich drei Ecktransversalen in einem Punkt schneiden, auszeichnet. Das ist der Satz von Ceva. Schnittpunkte dreier Geraden im Dreieck Legt man je einen Punkt (X, Y und Z) auf den Dreiecksseiten fest, entstehen Seitenabschnitte ($a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$). Wählt man die Punkte nicht unabhängig voneinander sondern mit einer Zusatzbedingung, kann man erreichen, daß bestimmte interessante Sonderfälle eintreten. Insbesondere kann man feststellen, ob sich drei Geraden, die durch die drei Punkte definiert wurden (z.B. die Ecktransversalen durch diese Punkte oder die Senkrechten in diesen Punkten), in einem Punkt schneiden. Im linken Fall handelt es sich um Ecktransversalen, die von einem Eckpunkt des Dreiecks bis zur gegenüberliegenden Seite reichen. Im zweiten Fall handelt es sich um die Lote vom Punkt P auf die Dreiecksseiten und es gibt keine Verbindungsgerade von den Eckpunkten zu X,Y oder Z, sondern nur eine Verbindung von P zu diesen Punkten, deren Verbindung dann senkrecht auf der Seite auftrifft.	  Weiter sei im linken Fall $d_1 = \overline{YZ}$; $d_2 = \overline{ZX}$; $d_3 = \overline{XY}$ und im rechten Fall $f_1 = \overline{YZ}$; $f_2 = \overline{ZX}$; $f_3 = \overline{XY}$ Das sind die Seitenlängen des Fußpunktdreiecks. Im rechten Fall (Lotfußpunktdreieck) gilt $f_1 = e_1 \sin \alpha$; $f_2 = e_2 \sin \beta$; $f_3 = e_3 \sin \gamma$ (Diagonalen im rechtwinkligen Sehnenviereck). Außerdem gilt $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \sin \beta$, $c = 2R \sin \gamma$ Hieraus folgt $f_1 = \frac{e_1 a}{2R}$, $f_2 = \frac{e_2 b}{2R}$, $f_3 = \frac{e_3 c}{2R}$ Für die Winkel erhält man: $\frac{\cos \alpha_1 \cdot \cos \beta_1 \cdot \cos \gamma_1}{\cos \alpha_2 \cdot \cos \beta_2 \cdot \cos \gamma_2} = \frac{\frac{c_1}{e_1} \cdot \frac{a_1}{e_2} \cdot \frac{b_1}{e_3}}{\frac{c_2}{e_1} \cdot \frac{a_2}{e_2} \cdot \frac{b_2}{e_3}} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2}$ $\frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \gamma_1}{\sin \alpha_2 \cdot \sin \beta_2 \cdot \sin \gamma_2} = \frac{\frac{p_3}{e_1} \cdot \frac{p_1}{e_2} \cdot \frac{p_2}{e_3}}{\frac{p_2}{e_1} \cdot \frac{p_3}{e_2} \cdot \frac{p_1}{e_3}} = 1$
	© Dipl.-Math. Armin Richter Treffo Lernen CHRISTINA STRAUCH	

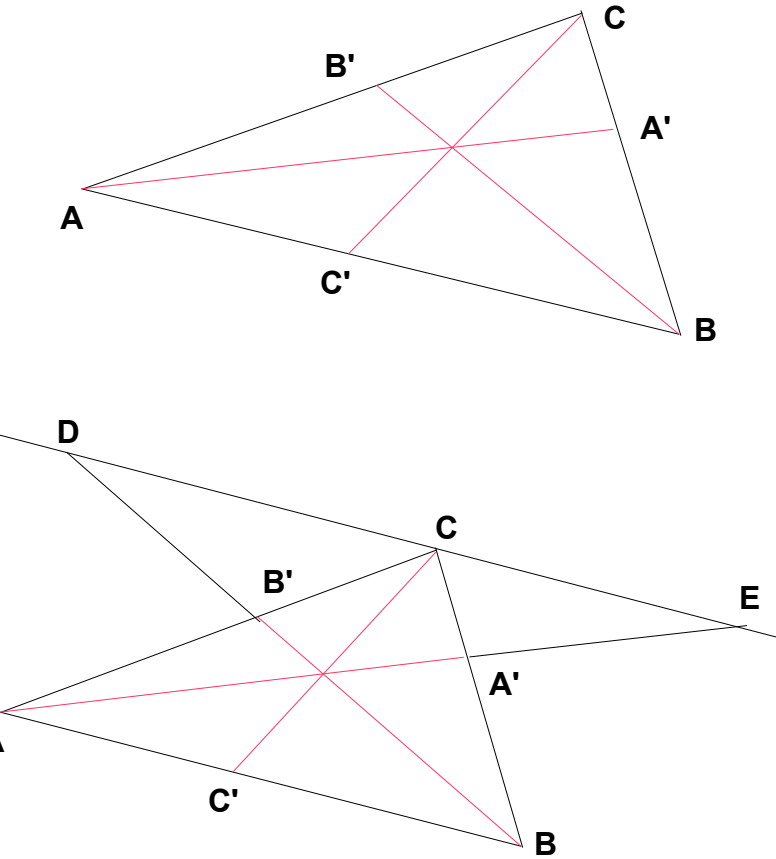
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

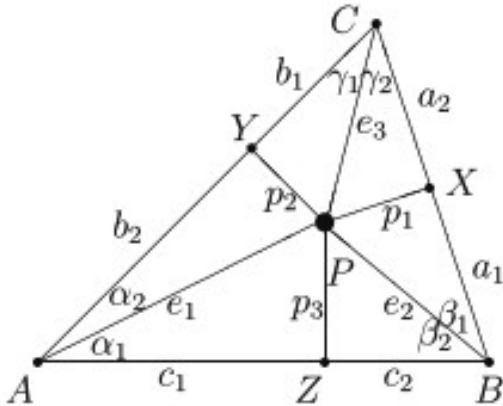
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Punkte im Dreiecke	Eck-Seiten-Transversale im allgemeinen Dreieck (übernommen von Arnold Fehring) Die Eck-Seiten-Transversalen sind die interessanteren im Dreieck, da sie eine Verbindung des Eckpunktes mit der gegenüberliegenden Seite herstellen. Seien AS und BT zwei Eck-Seiten-Transversalen eines Dreiecks ABC, welche die Seiten a, b im Verhältnis $x:(1-x)$ und $y:(1-y)$ mit $0 < x, y < 1$ teilen, so teilen sich die Eck-Seiten-Transversalen im Verhältnis $p:(1-p)$ und $q:(1-q)$ mit $p = \frac{y}{x + y - xy}$ bzw. $q = \frac{x}{x + y - xy}$ $\frac{p}{1-p} = \frac{y}{x(1-y)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{q}{1-q} = \frac{x}{y(1-x)}$ Die Längen der Eck-Seiten-Transversalen sind: $ AS = \sqrt{(a^2x^2 + (b^2 - c^2 - a^2)x + c^2)} \quad BT = \sqrt{(b^2y^2 + (a^2 - c^2 - b^2)y + c^2)}$ Beweis: 1. Fall: Dreieck ABC spitzwinklig Die Streckenlängen der grün gezeichneten Linien folgen aus dem Strahlensatz. Ausgangslinie ist die Linie h als Höhe auf die Seite c: Die senkrechte Linie von S auf die Seite c (hier bezeichnet mit H): $\frac{h}{a} = \frac{H}{xa} \quad H = x \cdot h$ Analoges gilt für die senkrechte Linie von T auf c, womit diese Streckenlänge dann $y \cdot h$ ergibt. Die senkrechte Linie vom Schnittpunkt der beiden Transversalen auf die Seite c (Die gesuchte Strecke wieder mit H bezeichnet): $\frac{ AS }{xh} = \frac{p \cdot AS }{H} \quad H = p \cdot x \cdot h$ Analoges gilt, wenn man von dem Eckpunkt B die Transversale zum Punkt T betrachtet: $H = q \cdot y \cdot h$	
	Die Längen der Eck-Seiten-Transversalen sind: $ AS = \sqrt{(a^2x^2 + (b^2 - c^2 - a^2)x + c^2)} \quad BT = \sqrt{(b^2y^2 + (a^2 - c^2 - b^2)y + c^2)}$ Beweis: 1. Fall: Dreieck ABC spitzwinklig Die Streckenlängen der grün gezeichneten Linien folgen aus dem Strahlensatz. Ausgangslinie ist die Linie h als Höhe auf die Seite c: Die senkrechte Linie von S auf die Seite c (hier bezeichnet mit H): $\frac{h}{a} = \frac{H}{xa} \quad H = x \cdot h$ Analoges gilt für die senkrechte Linie von T auf c, womit diese Streckenlänge dann $y \cdot h$ ergibt. Die senkrechte Linie vom Schnittpunkt der beiden Transversalen auf die Seite c (Die gesuchte Strecke wieder mit H bezeichnet): $\frac{ AS }{xh} = \frac{p \cdot AS }{H} \quad H = p \cdot x \cdot h$ Analoges gilt, wenn man von dem Eckpunkt B die Transversale zum Punkt T betrachtet: $H = q \cdot y \cdot h$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

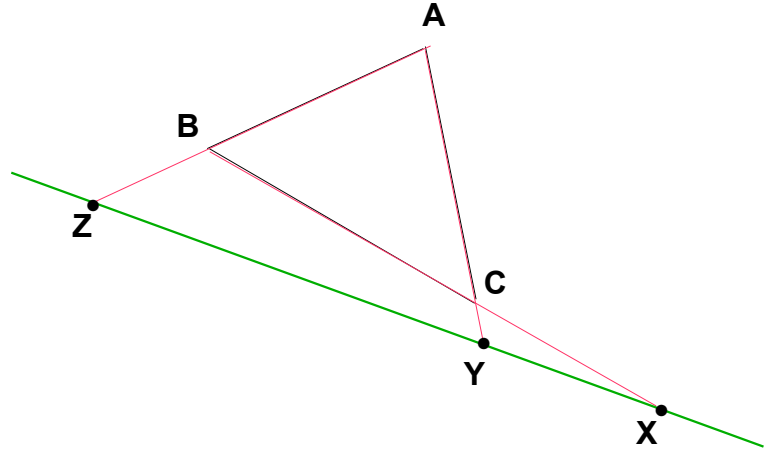
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Punkte im Dreiecke	Betrachten wir jetzt die Teilung auf der Seite c. Die beiden Bezeichnungen p und q wurden in Analogie zum Pythagoras gewählt. Der Abschnitt der Seite c bis zum Fußpunkt des Lotes vom Punkt S (hier bezeichnet mit L): $\frac{h}{xh} = \frac{p}{L} \quad L = x \cdot p$ Analoges erhält man für den Abschnitt vom Eckpunkt A zum Fußpunkt des Lotes vom Punkt T: $L = y \cdot q$ Die Streckenabschnitte von den Eckpunkten A und B bis zum Fußpunkt des Lotes des Schnittpunktes der beiden Transversalen (hier wieder mit L bezeichnet). Betrachtet wird die Transversale von B nach T: $\frac{yh}{c-yq} = \frac{tyh}{L} \quad L = t \cdot (c - y \cdot q)$ Analoges erhält man für die Transversale von A nach S: $L = s(c - x \cdot p)$. Gesucht sind die Werte s und t in Abhängigkeit von x und y. Dafür stehen folgende Gleichungen zur Verfügung: (1) $p + q = c$ (2) $sxh = tyh \Rightarrow sx = ty$ (3) $t(c - yq) + s(c - xp) = c$ Setze Gleichung (2) in Gleichung (3) ein mit der Umstellung von Gleichung (2) $t = \frac{sx}{y}$ (3) $\Rightarrow \frac{sx}{y}(c - yq) + s(c - xp) = c$ $\begin{aligned} s(cx - xyq) + s(cy - xyp) &= cy \\ s(cx - xyq + cy - xyp) &= cy \\ s(cx + cy - xy(p+q)) &= cy \\ s(cx + cy - xyc) &= cy \\ s(x + y - xy) &= y \end{aligned}$ $s = \frac{y}{x + y - xy}$	Fortsetzung des Beweises: Löst man die Gleichung (2) nach s statt nach t auf, oder setzte das berechnete s in Gleichung (3) ein, erhält man die Gleichung für die Variable t: $t = \frac{x}{x + y - xy}$ Betrachtet man die Strecke AS als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so gilt nach dem Pythagoras: $\begin{aligned} AS ^2 &= (xh)^2 + (c - xp)^2 \\ AS ^2 &= x^2h^2 + c^2 - 2cxp + x^2p^2 \\ AS ^2 &= x^2(h^2 + p^2) + c^2 - 2cxp \\ AS ^2 &= x^2a^2 + c^2 - 2cxp \end{aligned}$ Für allgemeine Dreiecke gelten folgende Formeln (weiter vorn bereits bewiesen): $p = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2c} \quad \Leftrightarrow \quad 2pc = a^2 + c^2 - b^2$ $q = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2c}$ $\begin{aligned} AS ^2 &= x^2a^2 + c^2 - x(a^2 + c^2 - b^2) \\ AS ^2 &= x^2a^2 + x(b^2 - c^2 - a^2) + c^2 \end{aligned}$ Schlußfolgerung aus dem Satz: Seitenhalbierende teilen die Seite im Verhältnis 1:1. Für den Satz angewandt bedeutet das, $x = 0,5$, $y = 0,5$, $1 - x = 0,5$ und $1 - y = 0,5$. Für das Teilungsverhältnis s bzw. t der Seitenhalbierenden ergibt sich somit: $s = \frac{y}{x + y - xy} = \frac{0,5}{0,5 + 0,5 - 0,25} = \frac{0,5}{0,75} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$ und das heißt, der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1 .

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

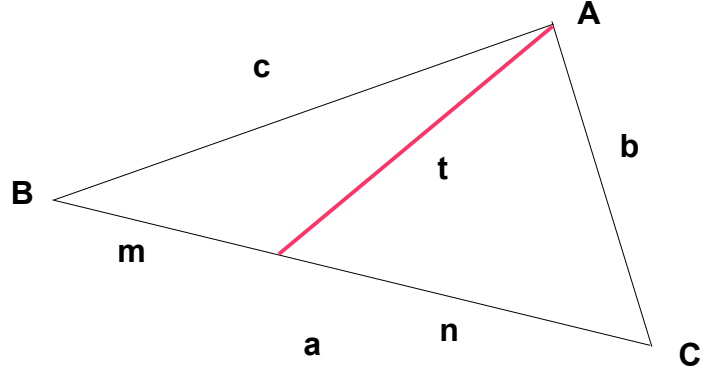
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck	Satz von Ceva Die drei nicht parallelen Ecktransversalen AA', BB' und CC' des Dreiecks ABC schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn für die Teilverhältnisse auf den Dreiecksseiten gilt: $\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \times \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = 1.$ Beweis: Die Gerade DE sei zu AB parallel. Dann folgt aus dem Strahlensatz $\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}, \quad \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CE}}, \quad \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ Das Produkt dieser drei Gleichungen liefert die Behauptung. $a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2$ Die Formulierung „genau dann“ bedeutet, dass die Aussage des Satzes auch umkehrbar ist. Eine Aussage darüber, wann sich drei Ecktransversalen in einem Punkt schneiden, liefert die <u>Umkehrung:</u> Kann man die Gleichung für die Streckenverhältnisse nachweisen, dann schneiden sich die Ecktransversalen auch in einem Punkt.	

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck	● Analogon des Satzes von Ceva Interessiert man sich für Senkrechte in den Punkten X, Y und Z, so gilt folgender Satz: Schneiden sich drei Senkrechte auf den Dreiecksseiten in einem Punkt, so ist die Summe der Quadrate der Abschnitte gleich. $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \quad (6)$ <u>Beweis:</u> Die drei Vierecke $\square AZPY$, $\square BXPZ$ und $\square CYPX$ sind rechtwinklige Sehnenvierecke. Damit gilt für die Diagonale e_1, e_2 und e_3 $\begin{aligned} e_1^2 &= c_1^2 + p_3^2 = b_2^2 + p_2^2 \\ e_2^2 &= a_1^2 + p_1^2 = c_2^2 + p_3^2 \\ e_3^2 &= b_1^2 + p_2^2 = a_2^2 + p_1^2 \end{aligned}$ Addition dieser Gleichungen liefert die Behauptung. <u>Umkehrung des Satzes:</u> Gilt für 6 Seitenabschnitte in einem Dreieck Gleichung $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$ so schneiden sich die drei Senkrechten in den Punkten in einem Punkt.	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck	Satz von Menelaus Liegen die Punkte X, Y und Z auf den geeignet verlängerten Seite BC, CA und AB des Dreiecks ABC auf einer Geraden dann gilt : $\frac{BX}{CX} \times \frac{CY}{AY} \times \frac{AZ}{BZ} = 1.$ Die Stecken im Zähler und Nenner eines Bruches liegen jeweils auf der gleichen Verlängerung der Dreiecksseiten. Bei zwei Verhältnissen steht die längere Seite im Zähler und die kürzere im Nenner; Bei einem Verhältnis sieht die kürzere Seite im Zähler und die längere im Nenner. Die Umkehrung des Satzes lautet: Gilt die Gleichung $\frac{BX}{CX} \times \frac{CY}{AY} \times \frac{AZ}{BZ} = 1$ für die Punkte X, Y und Z auf den verlängerten Dreiecksseiten, dann liegen diese drei Punkte auf einer Geraden.	

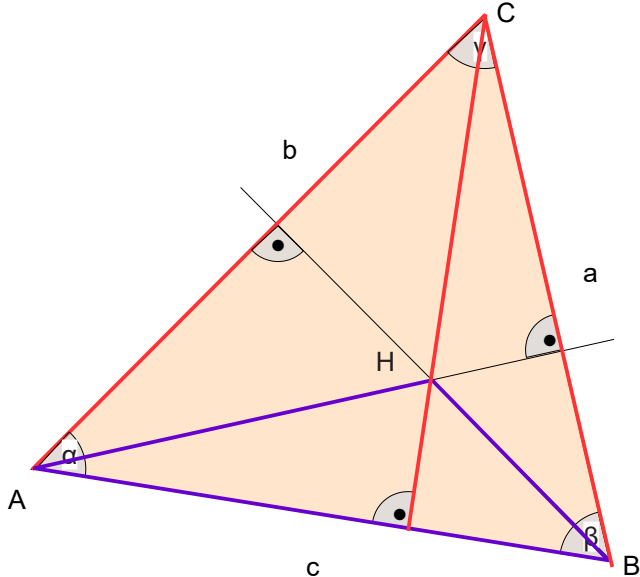
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck	Satz von Stewart Sei AX eine Ecktransversale der Länge p, die die Strecke BC in zwei Strecken mit den Längen BX = m und XC = n teilt. Dann gilt: $a (t^2 + mn) = b^2 m + c^2 n.$ oder aufgelöst nach der Transversalen p : $t^2 = \frac{m}{a} b^2 + \frac{n}{a} c^2 - mn .$ Es ist darauf zu achten, dass die Seitenabschnitte n und m jeweils zu Dreiecksseite b² und c² gehören, auf der sich der Seitenabschnitt nicht befindet.	

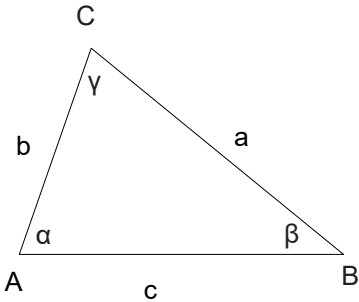
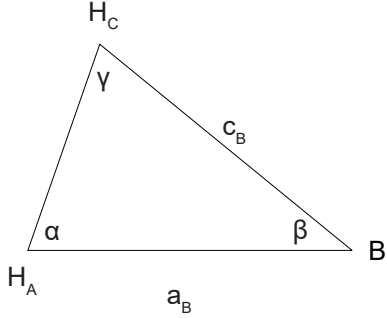
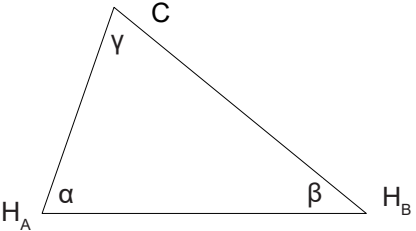
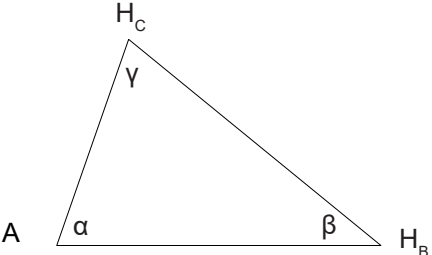
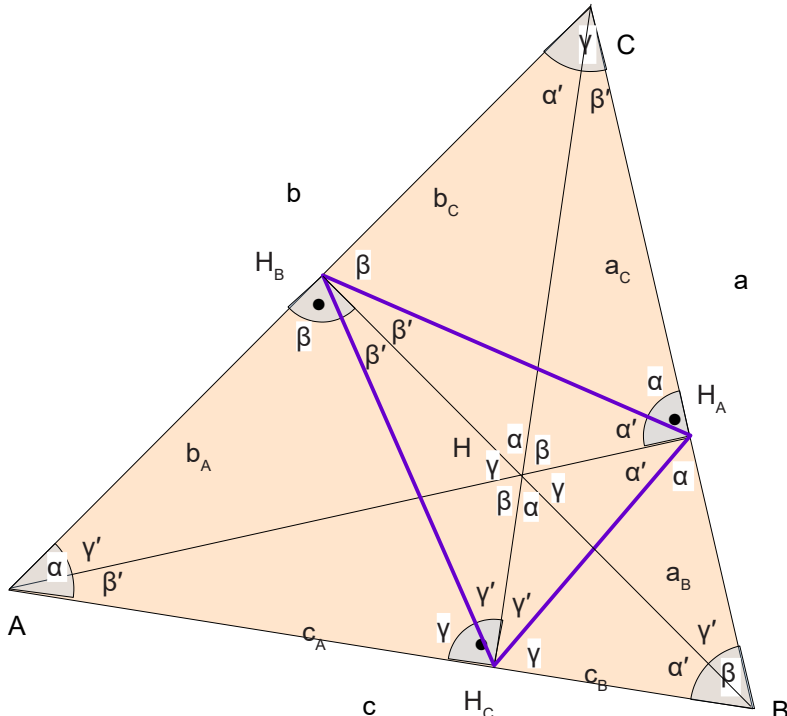
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	Die Höhenlinien	
	Konstruktion	
	Die Konstruktion der Höhen erfolgt nach den gleichen Schritten, wie sie weiter vorn in den Grundkonstruktionen zum Lot angegeben sind. Man kann eine Höhe als das Lot von einem Eckpunkt auf die gegenüberliegende Seite ansehen: - Man konstruiert die Höhe, indem man um den Eckpunkt einen Kreisbogen schlägt, der die gegenüberliegende Seite zweimal schneidet. - Zu diesen beiden Schnittpunkten konstruiert man die Mittelsenkrechte. Diese Mittelsenkrechte ist die Höhe auf die Dreiecksseite. - Der erste Kreisbogen erzeugt eine Kreissehne auf der Dreiecksseite, deren Mittelsenkrechte gleichzeitig Radius des Kreises ist und durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft, der in diesem Fall der gegenüberliegende Eckpunkt des Dreiecks ist.	
	Schnittpunkt der Höhenlinien	
	Unter einer Höhe versteht man die kürzeste Entfernung (=Normalabstand) eines Eckpunktes zur gegenüberliegenden Seite. Es ist die Strecke, die senkrecht auf einer Dreiecksseite steht und zu dem gegenüberliegenden Eckpunkt führt. - Die Höhengengeraden schneiden sich in einem Punkt. - Dieser Schnittpunkt kann innerhalb, außerhalb des Dreiecks oder auf einem Eckpunkt (rechtwinkliges Dreieck) liegen. - Beim rechtwinkligen Dreieck sind die am rechten Winkel anliegenden Seiten (Katheten) gleichzeitig die Höhen. - Höhen können im Dreieck, auf den Seiten oder außerhalb des Dreiecks liegen. Sie enden im letzten Fall auf der Verlängerung der entsprechenden Seite.	h_A, h_B, h_C ist jeweils die gesamte Höhenlinie zum angegebenen Punkt

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

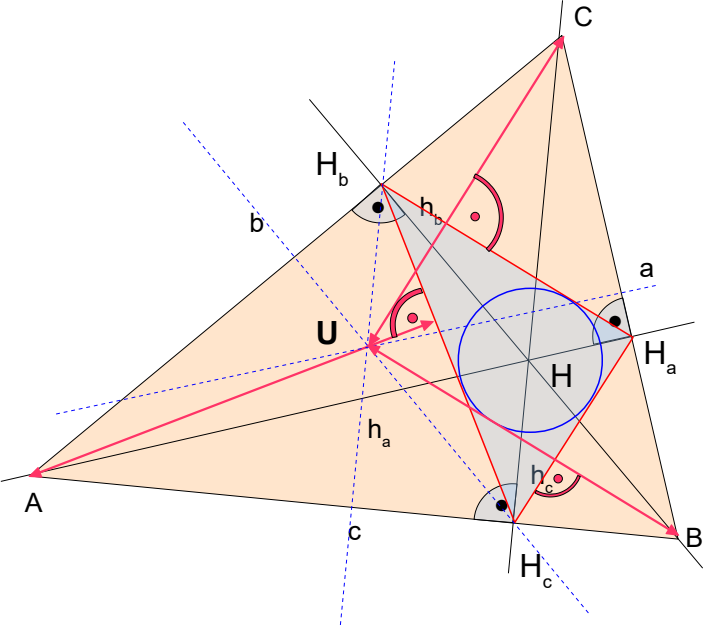
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Vertauschbarkeit von Eckpunkt und Höhenschnittpunkt Wenn H der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ABC ist, dann ist C der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABH. Die Seite b des Dreiecks ABC ist die Höhe der Seite BH im Dreieck ABH Die Seite a des Dreiecks ABC ist die Höhe der Seite AH im Dreieck ABH Die Seite c ist sowohl im Dreieck ABC als auch im Dreieck ABH vorhanden. Die Höhe von c geht durch den Punkt C.	

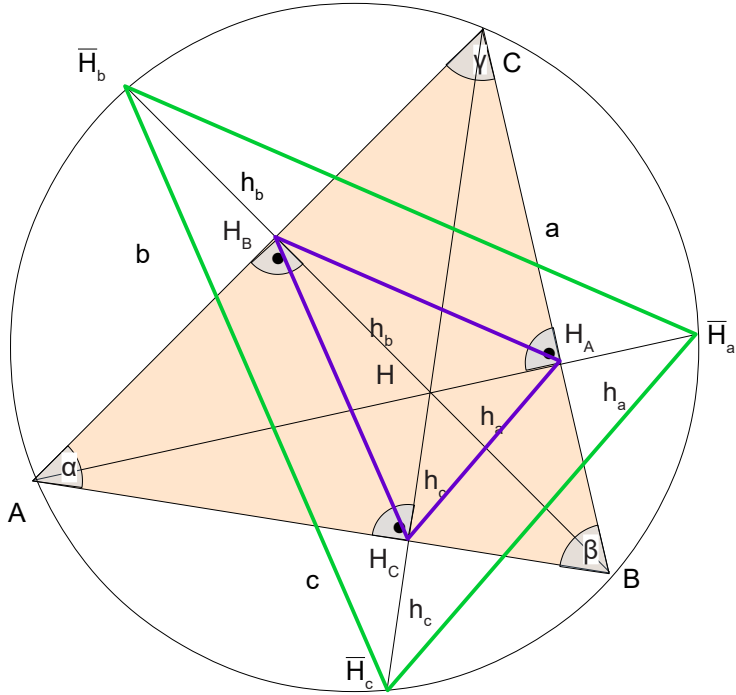
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Das Höhenfußpunktdreieck Die Dreiecke $\triangle AH_C H$ und $\triangle AH_B H$ sind rechtwinklige Dreiecke über der gemeinsamen Hypotenuse AH. Also ist das Viereck $\square AH_C H H_B$ ein Sehnenviereck. Der Mittelpunkt seines Umkreises halbiert $AH = h_a$. Analog sind $\square BH_A H H_C$ und $\square BH_B H H_A$ Sehnenvierecke. Es ergeben sich zwei rechtwinklige Dreiecke über zwei Thaleskreisen. Die Höhen eines Dreiecks ABC sind die Winkelhalbierenden seines Höhenfußpunktdreiecks. Es gelten die Ähnlichkeiten $\triangle ABC \approx \triangle H_A B H_C \approx \triangle A H_B H_C \approx \triangle H_A H_B C \Leftrightarrow 1 : \cos \beta : \cos \alpha : \cos \gamma$  $\triangle ABC$  $\triangle H_A B H_C$  $\triangle A H_B H_C$  $\triangle H_A H_B C$	 Aus der Ähnlichkeitsbeziehung der Dreiecke $\triangle ABC \approx \triangle H_A B H_C$ $\frac{a}{c_B} = \frac{c}{a_B}$ mit $c_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$ und $a_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$ (siehe „Seitenabschnitte der Höhen“) folgt: $\frac{c}{a_B} = \frac{2ac}{a^2 - b^2 + c^2} = \frac{2ac}{2ac \cos \beta} = \frac{1}{\cos \beta}$ $\frac{a}{c_B} = \frac{2ac}{a^2 - b^2 + c^2} = \frac{2ac}{2ac \cos \beta} = \frac{1}{\cos \beta}$ Damit ist das Verhältnis der Seiten der beiden Dreiecke $1 : \cos \beta$.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Das Höhenfußpunktdreieck Die Fußpunkte der Höhen H_A, H_B und H_C bilden ein besonderes Dreieck – das Höhenfußpunktdreieck. Seine Innenwinkel lassen sich leicht bestimmen: Die Dreiecke $\triangle AH_CH$ und $\triangle AH_BH$ sind rechtwinklige Dreiecke über der gemeinsamen Hypotenuse AH. Also ist das Viereck $\square AH_CHH_B$ ein Sehnenviereck. Der Mittelpunkt seines Umkreises halbiert $AH = h_a$. Analog sind $\square BH_AHH_C$ und $\square BH_BHH_A$ Sehnenvierecke. Nach dem Peripheriewinkelsatz ist $\sphericalangle AHH_C = \sphericalangle AH_BH_C = \beta$ und damit $\sphericalangle H_CH_BH = \beta'$. Analog gilt $\sphericalangle H_AH_BH = \beta'$, $\sphericalangle H_BH_AH = \sphericalangle H_CH_AH = \alpha'$ und $\sphericalangle H_AH_CH = \sphericalangle H_BH_CH = \beta'$. Damit folgt für die Innenwinkel des Höhenfußpunktdreiecks $\sphericalangle H_BH_AH_C = 2\alpha'$, $\sphericalangle H_CH_BH_A = 2\beta'$, $\sphericalangle H_AH_CH_B = 2\gamma'$. Außerdem folgt aus dieser Herleitung Satz: Ist das Dreieck ABC spitzwinklig, dann ist • der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC der Inkreismittelpunkt des Höhenfußpunktdreiecks $H_AH_BH_C$, und • die Ecken A, B und C des Dreiecks ABC sind die Ankreismittelpunkte des Höhenfußpunktdreiecks $H_AH_BH_C$. Es gelten die Ähnlichkeiten $\triangle ABC \approx \triangle H_ABH_C \approx \triangle AH_BH_C \approx \triangle H_AH_BC \Leftrightarrow 1 : \cos \beta : \cos \alpha : \cos \gamma$ Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgen die Längen $d_a = H_BH_C = a \cos \alpha, \quad d_b = H_AH_C = b \cos \beta, \quad d_c = H_AH_B = c \cos \gamma$ und die Winkel $\alpha_f = 2\alpha' = \pi - 2\alpha, \quad \beta_f = 2\beta' = \pi - 2\beta, \quad \gamma_f = 2\gamma' = \pi - 2\gamma$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

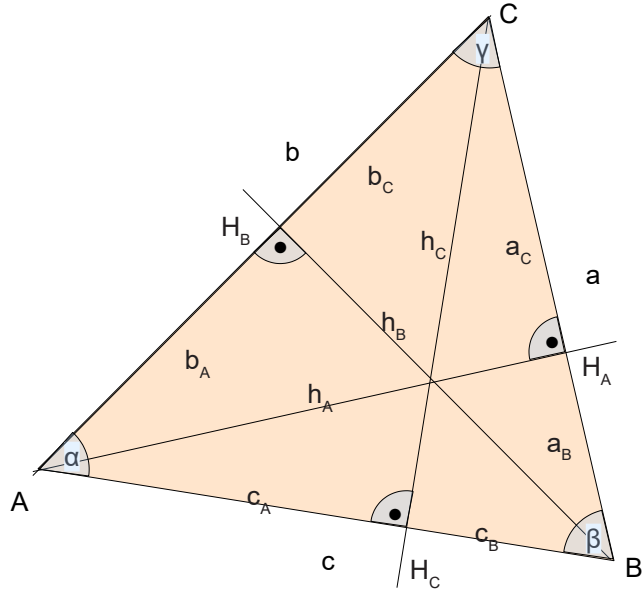
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	Die Höhen Im Dreieck $\triangle ABC$ sind die Winkelhalbierenden im Höhenfußpunkttriangleck $\triangle H_A H_B H_C$ und deren Schnittpunkt damit der Mittelpunkt des Inkreises des Höhenfußpunkttrianglecks. Ist U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC, dann ist $AU \perp H_B H_C$, $BU \perp H_C H_A$ und $CU \perp H_A H_B$ Der Feuerbachsche Kreis ist der Umkreis des Höhenfußpunkttrianglecks. Die Vierecke $\square AH_C H H_B$, $\square BH_A H H_C$ und $\square CH_B H H_A$ sind Sehnenvierecke.	

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Spiegelung des Höhenschnittpunkts Spiegelt man in einem spitzwinkligen Dreieck den Höhenschnittpunkt an den Seiten, so liegen die Bildpunkte auf dem Umkreis des Dreiecks. Die Entfernung von H zum Schnittpunkt der Höhen mit der gegenüberliegenden Seite ist genau so groß, wie der Abstand dieser Schnittpunkte zum Umkreis des Dreiecks. Die Dreiecke $H_A H_B H_C$ und $\bar{H}_a \bar{H}_b \bar{H}_c$ sind ähnlich mit dem Längenverhältnis 1:2. Beide Dreiecke haben den gleichen Höhenschnittpunkt.	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Die Dreiecke ABH , BCH und CAH $\triangle ABH$ (grün) $\triangle BCH$ (rot) $\triangle CAH$ (blau) $\triangle ABH$ (grün) Der Höhenfußpunkt der Seite AB ist H_C Der Höhenfußpunkt der Seite BH ist H_B Der Höhenfußpunkt der Seite AH ist H_A Das lässt sich analog für die anderen Dreiecke auch durchführen. Die Höhenfußpunkte aller vier Dreiecke (einschließlich ABC) ist gleich. Die Seitenmitten der drei Dreiecke sind entweder die Seitenmitten des Ausgangsdreiecks ABC : M_a , M_b , M_c oder die Mittelpunkte der oberen Höhen des Dreieck ABC: H_a , H_b , H_c Alle diese Punkte liegen auf dem Feuerbachkreis des Dreiecks ABC. Da aber die Mittelpunkte aller Dreiecke auf dem Feuerbachkreis des jeweiligen Dreiecks liegen, müssen auch die drei anderen Dreiecke den gleichen Feuerbachkreis liegen. Durch jeweils drei Punkte ist ein Kreis eindeutig bestimmt.	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Berechnung der Länge der Höhen h_A, h_B, h_C Nach dem Pythagoras gilt: $a^2 = h_C^2 + c_B^2$ und $b^2 = h_C^2 + c_A^2$ Löst man die erste Gleichung nach c_B auf $c_B = \sqrt{a^2 - h_C^2}$ $h_C^2 = b^2 - c_B^2$ $h_C^2 = b^2 - (c - \sqrt{a^2 - h_C^2})^2$ $= b^2 - c^2 + 2c\sqrt{a^2 - h_C^2} - a^2 + h_C^2$ Damit hebt sich auf beiden Seiten h_C^2 weg und der Wurzelausdruck kann auf die linke Seite gebracht werden: $-2c\sqrt{a^2 - h_C^2} = b^2 - c^2 - a^2 \quad \text{ beide Seiten quadrieren}$ $4c^2(a^2 - h_C^2) = b^4 - 2b^2c^2 + c^4 - 2b^2a^2 + a^4 + 2c^2a^2$ $-h^2 = \frac{b^4 - 2b^2c^2 + c^4 - 2b^2a^2 + a^4 + 2c^2a^2}{4c^2} - \frac{4c^2a^2}{4c^2}$ $h_C = \frac{\sqrt{2(b^2c^2 + b^2a^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{2c}$ Das entscheidende ist nicht die Kompliziertheit dieses Ausdruckes, sondern, dass man jede Dreieckshöhe aus der Kenntnis der Seitenlängen berechnen kann. Dabei ist der Wurzelausdruck im Zähler für alle Höhen identisch, die Unterscheidung ist nur im Nenner. $h_C = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	 $h_A = c \sin \beta = b \sin \gamma = \frac{\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{2a}$ $h_B = a \sin \gamma = c \sin \alpha = \frac{\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{2b}$ $h_C = b \sin \alpha = a \sin \beta = \frac{\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{2c}$

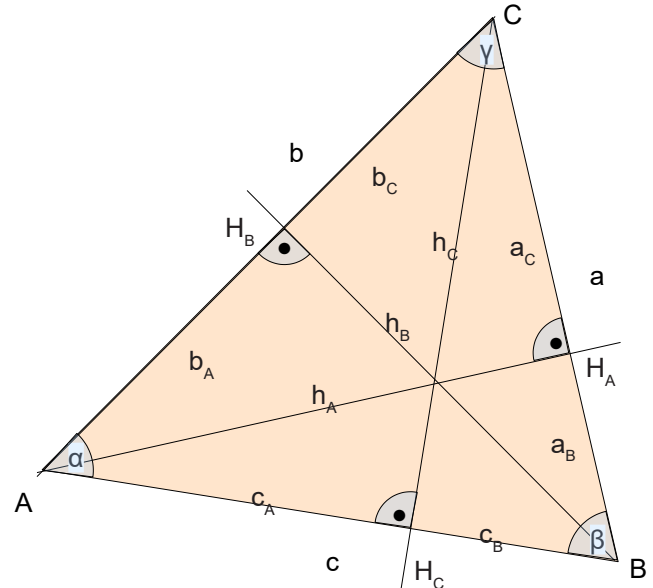
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	$h_A = c \sin \beta = b \sin \gamma = 2R \sin \beta \sin \gamma = \frac{2A}{a} = \frac{a}{\cot \beta + \cot \gamma}$ $h_B = a \sin \gamma = c \sin \alpha = 2R \sin \gamma \sin \alpha = \frac{2A}{b} = \frac{b}{\cot \gamma + \cot \alpha}$ $h_C = b \sin \alpha = a \sin \beta = 2R \sin \alpha \sin \beta = \frac{2A}{c} = \frac{c}{\cot \alpha + \cot \beta}$ $h_A + h_B + h_C = \frac{s^2 + 4Rr + r^2}{2R}$ $h_A h_B + h_B h_C + h_C h_A = \frac{2rs^2}{R}$ $h_A \cdot h_B \cdot h_C = \frac{2r^2 s^2}{R}$	
	★ Verwendete Umrechnungen und Vereinfachungen $F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ $= \frac{s(s-a)}{1/2(a+b+c)} \frac{(s-b)(s-c)}{1/2(a-b+c)} \frac{1/2(a-b+c)}{1/2(a+b-c)}$ $= \frac{1}{4} (-a^2 + \cancel{ab} + \cancel{ac} - \cancel{ab} + b^2 + bc - \cancel{ac} + bc + c^2)$ $\cdot \frac{1}{4} (a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ac} - \cancel{ab} - b^2 + bc + \cancel{ac} + bc - c^2)$ $= \frac{1}{4} (-a^2 + b^2 + 2bc + c^2) \frac{1}{4} (a^2 - b^2 + 2bc - c^2)$ $= \frac{1}{16} (-a^4 + a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2 + a^2b^2 - b^4 + 2b^3c - b^2c^2 + 2a^2bc - 2b^3c + 4b^2c^2 - 2bc^3 + a^2c^2 - b^2c^2 + 2bc^3 - c^4)$ $= \frac{1}{16} (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)$ $= \frac{1}{16} (2(b^2c^2 + b^2a^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4))$ $16 F^2 = 16 s(s-a)(s-b)(s-c)$ $= 2(b^2c^2 + b^2a^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	Hieraus folgt $\frac{a}{b} = \frac{h_B}{h_A} = \frac{\frac{1}{h_A}}{\frac{1}{h_B}}, \quad \frac{b}{c} = \frac{h_C}{h_B} = \frac{\frac{1}{h_B}}{\frac{1}{h_C}}$ das heißt, die Seitenlängen verhalten sich wie die Kehrwerte der Höhenlängen Man kann das auch als $a : b : c = \frac{1}{h_A} : \frac{1}{h_B} : \frac{1}{h_C}$ schreiben. Die Größe ah_A ist eine zyklische Invariante. Es ist der doppelte Flächeninhalt $2F = ah_A = bh_B = ch_C$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Die Seitenabschnitte $a_B, a_C, b_A, b_C, c_A, c_B$ Weiter ergibt sich aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $\frac{a}{b_C} = \frac{b}{a_C}, \quad \frac{b}{c_A} = \frac{c}{b_A}, \quad \frac{c}{a_B} = \frac{a}{c_B} \quad (12)$ oder äquivalent $\frac{a}{b} = \frac{b_C}{a_C}, \quad \frac{b}{c} = \frac{c_A}{b_A}, \quad \frac{c}{a} = \frac{a_B}{c_B} \quad (13)$ Diese Formeln kann man zum Beweis dafür verwenden, daß sich die Höhen in einem Punkt schneiden. Für die Abschnitte, in die die Höhen die Seiten teilen, gilt nämlich $\frac{a_B \cdot b_C \cdot c_A}{a_C \cdot b_A \cdot c_B} = \frac{a_B \cdot b_C \cdot c_A}{c_B \cdot a_C \cdot b_A} = \frac{a \cdot b \cdot c}{b \cdot c \cdot a} = 1$ woraus nach der Umkehrung des Satzes von Ceva die Behauptung folgt. Gesucht ist die Länge der Seitenabschnitte. Nach dem Pythagoras gilt: $a^2 = h_C^2 + c_B^2$ und $b^2 = h_C^2 + c_A^2$ Löst man diese Gleichungen nach h_C auf: $h_C^2 = a^2 - c_B^2 \quad h_C^2 = b^2 - c_A^2$ $a^2 - c_B^2 = b^2 - c_A^2$ $= b^2 - (c - c_B)^2$ $a^2 - c_B^2 = b^2 - c^2 + 2 c c_B - c_B^2$ $a^2 - b^2 + c^2 = 2 c c_B$ oder: $a_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \quad b_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b} \quad c_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$ $a_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \quad b_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \quad c_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$	 und $a^2 = h_B^2 + b_C^2 \quad h_B^2 = a^2 - b_C^2$ $c^2 = h_B^2 + b_A^2 \quad h_B^2 = c^2 - b_A^2$ $a^2 - b_C^2 = c^2 - b_A^2$ $= c^2 - (b - b_C)^2$ $a^2 - b_C^2 = c^2 - b^2 + 2 b b_C - b_C^2$ $a^2 + b^2 - c^2 = 2 b b_C$ und $b^2 = h_A^2 + a_C^2 \quad h_A^2 = b^2 - a_C^2$ $c^2 = h_A^2 + a_B^2 \quad h_A^2 = c^2 - a_B^2$ $b^2 - a_C^2 = c^2 - a_B^2$ $= c^2 - (a - a_C)^2$ $b^2 - a_C^2 = c^2 - a^2 + 2 a a_C - a_C^2$ $a^2 + b^2 - c^2 = 2 a a_C$

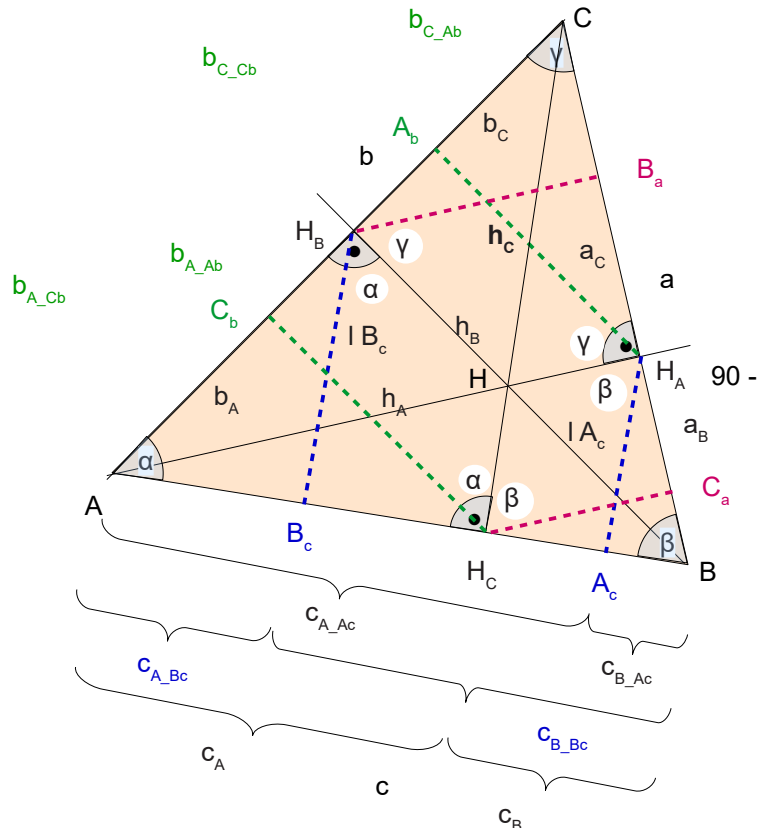
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	Aus den Formeln der Seitenabschnitte der Höhen : $b_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b} \quad c_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$ $c_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} \quad a_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$ $a_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \quad b_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$ folgen die Gleichungen: $b b_A = c c_A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$ $c c_B = a a_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}$ $a a_C = b b_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$ $a^4 - (b^2 - c^2)^2 = (a^2 - (b^2 - c^2)) (a^2 + (b^2 - c^2))$ $= (a^2 - b^2 + c^2) (a^2 + b^2 - c^2)$ $= a^4 - b^4 - c^4 + a^2 b^2 - a^2 c^2 - a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2$ $a^4 - (b^2 - c^2)^2 = a^4 - b^4 - c^4 + 2 b^2 c^2$	$a^4 - b^4 - c^4 + 2 b^2 c^2 = (a^2 - b^2 + c^2) (a^2 + b^2 - c^2)$ $(a^2 - b^2 + c^2) (a^2 + b^2 - c^2) = 2 a a_B \cdot 2 a a_C = 4 \cdot a^2 \cdot a_B \cdot a_C$
	★ Berechnung der Höhenrechtecke F_A, F_B, F_C Aus (12) ergibt sich außerdem $c_A \cdot c = b_A \cdot b$, $a_B \cdot a = c_B \cdot c$ und $b_C \cdot b = a_C \cdot a$. Das heißt, daß die Flächeninhalte der Rechtecke an den Eckpunkten, die von den Höhen aus den Quadraten über den Seiten herausgeschnitten wurden, gleiche Flächeninhalte haben. Wir führen deshalb folgende Bezeichnungen ein: $F_A = c_A \cdot c = b_A \cdot b$ $F_B = a_B \cdot a = c_B \cdot c$ $F_C = b_C \cdot b = a_C \cdot a$ Dies Größen hängen offensichtlich so mit den Seitenquadraten zusammen: $a^2 = F_B + F_C$ $b^2 = F_A + F_C$ $c^2 = F_A + F_B$ Diese Gleichungssystem lässt sich lösen : $F_A = \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2)$ $F_B = \frac{1}{2} (c^2 + a^2 - b^2)$ $F_C = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - c^2)$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Die Höhen im stumpfwinkligen Dreieck Für stumpfwinklige Dreieck ergibt sich der nebenstehende Sachverhalt. Der Höhenschnittpunkt liegt außerhalb des Dreiecks und bei den Höhenabschnitten sind zwei größer als die zugehörige Seite, so daß der zweite Höhenabschnitt als negative Entfernung zu werten ist, sonst gibt die Summe nicht mehr die Seitenlänge. Die Dreieckshöhen sind kleiner als die Strecke vom Eckpunkt bis zum Höhenschnittpunkt. Damit müssen bei der Unterteilung der Höhen in die zwei Abschnitte wieder negative Werte auftreten. Der obere Abschnitt geht vom Eckpunkt bis zum Höhenschnittpunkt. Für die Höhen, bei denen im Eckpunkt spitze Winkel auftreten ist dieser Abschnitt größer als die Höhe selbst, da der Abschnitt die Verlängerung der ist. In dem Eckpunkt, in dem der stumpfe Winkel liegt ist dieser Wert negativ, da die Strecke auf der anderen Seite des Eckpunktes liegt. Der untere Abschnitt geht vom Eckpunkt bis zum Höhenfußpunkt. Für die Höhen, bei denen im Eckpunkt spitze Winkel auftreten ist dieser Abschnitt kleiner als die Höhe selbst. Diese Werte sind negativ, da sie der Richtung der Höhe (vom Eckpunkt zur Seite) entgegenlaufen. In dem Eckpunkt, in dem der stumpfe Winkel liegt ist dieser Wert positiv, da die Strecke die gleiche Richtung hat, wie die Höhe selbst vom Eckpunkt zur Seite.	Das Diagramm zeigt ein stumpfwinkliges Dreieck ABC mit dem stumpfen Winkel bei A. Die Höhen h_a, h_b und h_c sind eingezeichnet. Die Höhen h_b und h_c schneiden die gegenüberliegenden Seiten AC und AB in den Punkten H_c und H_a. Die Höhe h_a fällt auf die Verlängerung der Seite BC. Der Höhenschnittpunkt H liegt außerhalb des Dreiecks. Die Abschnitte der Höhen sind wie folgt beschriftet: b_c (von C nach unten), h_c (von C nach unten bis H_c), H_c (von H_c nach unten bis H), c_a (von A nach unten bis H), b_a (von A nach unten bis H), h_a (von A nach unten bis H_a), c_b (von B nach unten bis H), h_b (von B nach unten bis H_b), H_b (von H_b nach unten bis H).

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele					
Besondere Linien im Dreieck Die Höhen	★ Die Lotfußpunkte der Höhenfußpunkte auf den anderen Seiten Die Lotfußpunkte der Höhen treten beim Taylorkreis wieder auf. Alle Lotfußpunkte der Höhen auf den anderen beiden Seiten liegen auf dem Taylorkreis. Wegen der komplexen Formel der Höhenberechnung ist es nicht möglich für die Abstände und Längen praktikable Formeln zu finden, die nur die Seitenlängen benutzen. Es werden deshalb hier Formeln angegeben, die auf andere Dreiecksstücke zurückgreifen. Für den Lotfußpunkt A_c wurden mehrere Formeln angegeben <table><thead><tr><th colspan="2">Lotfußpunkte auf c</th></tr><tr><th>Lot von H_A auf die Seite c</th><th>Lot von H_B auf die Seite c</th></tr></thead><tbody><tr><td> Länge des Lotes $A_c = h_A \cos(\beta) = h_A \frac{a_B}{c} = \frac{h_A a_B}{c}$ $\frac{h_C}{a} = \frac{ A_c }{a_B} \quad A_c = \frac{a_B}{a} h_C$ Abstand A_c von A $c_{A_{Ac}} = h_A \sin(\beta) = h_A \frac{h_A}{c} = \frac{h_A^2}{c}$ $\frac{c_{A_{Ac}}}{h_A} = \frac{c_A}{h_A} \quad c_{A_{Ac}} = \frac{h_A}{h_A} c_A$ $= \frac{h_A^2}{c c_A} c_A$ $= \frac{h_A^2}{c} = \frac{c^2 - a_B^2}{c}$ Abstand A_c von B $c_{B_{Ac}} = a_B \cos(\beta) = a_B \frac{a_B}{c} = \frac{a_B^2}{c}$ $\frac{h_C}{c_B} = \frac{ A_c }{c_{B_{Ac}}} \quad c_{A_{Ac}} = \frac{h_A}{h_A} c_A$ $= \frac{h_A^2}{c c_A} c_A$ $= \frac{h_A^2}{c} = \frac{c^2 - a_B^2}{c}$ </td></tr></tbody></table>	Lotfußpunkte auf c		Lot von H_A auf die Seite c	Lot von H_B auf die Seite c	Länge des Lotes $A_c = h_A \cos(\beta) = h_A \frac{a_B}{c} = \frac{h_A a_B}{c}$ $\frac{h_C}{a} = \frac{ A_c }{a_B} \quad A_c = \frac{a_B}{a} h_C$ Abstand A_c von A $c_{A_{Ac}} = h_A \sin(\beta) = h_A \frac{h_A}{c} = \frac{h_A^2}{c}$ $\frac{c_{A_{Ac}}}{h_A} = \frac{c_A}{h_A} \quad c_{A_{Ac}} = \frac{h_A}{h_A} c_A$ $= \frac{h_A^2}{c c_A} c_A$ $= \frac{h_A^2}{c} = \frac{c^2 - a_B^2}{c}$ Abstand A_c von B $c_{B_{Ac}} = a_B \cos(\beta) = a_B \frac{a_B}{c} = \frac{a_B^2}{c}$ $\frac{h_C}{c_B} = \frac{ A_c }{c_{B_{Ac}}} \quad c_{A_{Ac}} = \frac{h_A}{h_A} c_A$ $= \frac{h_A^2}{c c_A} c_A$ $= \frac{h_A^2}{c} = \frac{c^2 - a_B^2}{c}$	 $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2$$4a^2c$ $p(h_A) = \frac{b a_B}{h_A^2}$
Lotfußpunkte auf c							
Lot von H_A auf die Seite c	Lot von H_B auf die Seite c						
Länge des Lotes $A_c = h_A \cos(\beta) = h_A \frac{a_B}{c} = \frac{h_A a_B}{c}$ $\frac{h_C}{a} = \frac{ A_c }{a_B} \quad A_c = \frac{a_B}{a} h_C$ Abstand A_c von A $c_{A_{Ac}} = h_A \sin(\beta) = h_A \frac{h_A}{c} = \frac{h_A^2}{c}$ $\frac{c_{A_{Ac}}}{h_A} = \frac{c_A}{h_A} \quad c_{A_{Ac}} = \frac{h_A}{h_A} c_A$ $= \frac{h_A^2}{c c_A} c_A$ $= \frac{h_A^2}{c} = \frac{c^2 - a_B^2}{c}$ Abstand A_c von B $c_{B_{Ac}} = a_B \cos(\beta) = a_B \frac{a_B}{c} = \frac{a_B^2}{c}$ $\frac{h_C}{c_B} = \frac{ A_c }{c_{B_{Ac}}} \quad c_{A_{Ac}} = \frac{h_A}{h_A} c_A$ $= \frac{h_A^2}{c c_A} c_A$ $= \frac{h_A^2}{c} = \frac{c^2 - a_B^2}{c}$							

© Dipl.-Math. Armin Richter



Treffo Lernen

CHRISTINA STRAUCH

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele																
Besondere Linien im Dreieck Die Höhen	Lotfußpunkte auf a <table><tr><th>Lot von HB auf die Seite a</th><th>Lot von HC auf die Seite a</th></tr><tr><td>Länge des Lotes</td><td>Länge des Lotes</td></tr><tr><td>Abstand B_a von C $a_{C_Ba} = b_C \cos (\gamma) = b_C \frac{b_C}{a} = \frac{b_C^2}{a}$</td><td>Abstand C_a von C $a_{C_Ca} = h_C \sin (\beta) = h_C \frac{h_C}{a} = \frac{h_C^2}{a}$</td></tr><tr><td>Abstand B_a von B $a_{B_Ba} = h_B \sin (\gamma) = h_B \frac{h_B}{a} = \frac{h_B^2}{a}$</td><td>Abstand C_a von B $a_{B_Ca} = c_B \cos (\beta) = c_B \frac{c_B}{a} = \frac{c_B^2}{a}$</td></tr></table> Lotfußpunkte auf b <table><tr><th>Lot von HA auf die Seite b</th><th>Lot von HC auf die Seite b</th></tr><tr><td>Länge des Lotes</td><td>Länge des Lotes</td></tr><tr><td>Abstand A_b von C $b_{C_Ab} = a_C \cos (\gamma) = a_C \frac{a_C}{b} = \frac{a_C^2}{b}$</td><td>Abstand C_b von A $b_{A_Bc} = c_A \cos (\alpha) = c_A \frac{c_A}{b} = \frac{c_A^2}{b}$</td></tr><tr><td>Abstand A_b von A $b_{A_Ab} = h_A \sin (\gamma) = h_A \frac{h_A}{b} = \frac{h_A^2}{b}$</td><td>Abstand C_b von C $b_{B_Bc} = h_C \sin (\alpha) = h_C \frac{h_C}{b} = \frac{h_C^2}{b}$</td></tr></table>	Lot von HB auf die Seite a	Lot von HC auf die Seite a	Länge des Lotes	Länge des Lotes	Abstand B _a von C $a_{C_Ba} = b_C \cos (\gamma) = b_C \frac{b_C}{a} = \frac{b_C^2}{a}$	Abstand C _a von C $a_{C_Ca} = h_C \sin (\beta) = h_C \frac{h_C}{a} = \frac{h_C^2}{a}$	Abstand B _a von B $a_{B_Ba} = h_B \sin (\gamma) = h_B \frac{h_B}{a} = \frac{h_B^2}{a}$	Abstand C _a von B $a_{B_Ca} = c_B \cos (\beta) = c_B \frac{c_B}{a} = \frac{c_B^2}{a}$	Lot von HA auf die Seite b	Lot von HC auf die Seite b	Länge des Lotes	Länge des Lotes	Abstand A _b von C $b_{C_Ab} = a_C \cos (\gamma) = a_C \frac{a_C}{b} = \frac{a_C^2}{b}$	Abstand C _b von A $b_{A_Bc} = c_A \cos (\alpha) = c_A \frac{c_A}{b} = \frac{c_A^2}{b}$	Abstand A _b von A $b_{A_Ab} = h_A \sin (\gamma) = h_A \frac{h_A}{b} = \frac{h_A^2}{b}$	Abstand C _b von C $b_{B_Bc} = h_C \sin (\alpha) = h_C \frac{h_C}{b} = \frac{h_C^2}{b}$	
Lot von HB auf die Seite a	Lot von HC auf die Seite a																	
Länge des Lotes	Länge des Lotes																	
Abstand B _a von C $a_{C_Ba} = b_C \cos (\gamma) = b_C \frac{b_C}{a} = \frac{b_C^2}{a}$	Abstand C _a von C $a_{C_Ca} = h_C \sin (\beta) = h_C \frac{h_C}{a} = \frac{h_C^2}{a}$																	
Abstand B _a von B $a_{B_Ba} = h_B \sin (\gamma) = h_B \frac{h_B}{a} = \frac{h_B^2}{a}$	Abstand C _a von B $a_{B_Ca} = c_B \cos (\beta) = c_B \frac{c_B}{a} = \frac{c_B^2}{a}$																	
Lot von HA auf die Seite b	Lot von HC auf die Seite b																	
Länge des Lotes	Länge des Lotes																	
Abstand A _b von C $b_{C_Ab} = a_C \cos (\gamma) = a_C \frac{a_C}{b} = \frac{a_C^2}{b}$	Abstand C _b von A $b_{A_Bc} = c_A \cos (\alpha) = c_A \frac{c_A}{b} = \frac{c_A^2}{b}$																	
Abstand A _b von A $b_{A_Ab} = h_A \sin (\gamma) = h_A \frac{h_A}{b} = \frac{h_A^2}{b}$	Abstand C _b von C $b_{B_Bc} = h_C \sin (\alpha) = h_C \frac{h_C}{b} = \frac{h_C^2}{b}$																	
© Dipl.-Math. Armin Richter 																		

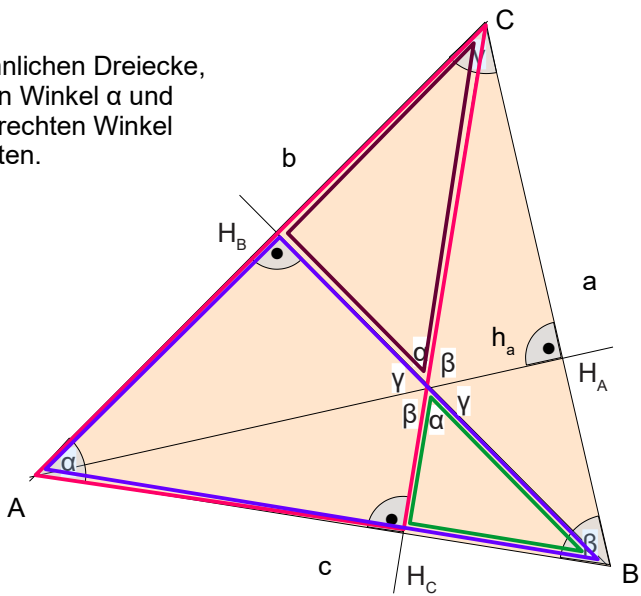
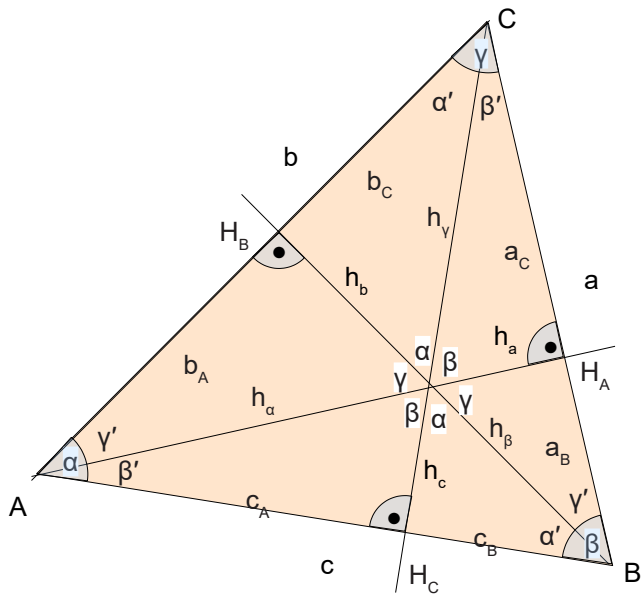
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Die oberen Höhenabschnitte h_a, h_b, h_c Weiter vorn in diesem Dokument konnten für die Höhen folgende Gleichungen nachgewiesen werden: $h_a = \frac{\sqrt{2(b^2c^2 + b^2a^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{2a}$ $h_b = \frac{\sqrt{2(b^2c^2 + b^2a^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{2b}$ Gesucht ist der Wert x (y) in Abhängigkeit von den Seitenlängen a (b): Herleitung beispielhaft für die Seite a: Nach dem Pythagoras gilt: $b^2 = h_a^2 + ((1-x)a)^2$ und $c^2 = h_a^2 + (xa)^2$ Löst man diese Gleichungen nach h auf: $h^2 = b^2 - ((1-x)a)^2$ $h^2 = b^2 - (a^2 - 2a^2x + a^2x^2)$ $h^2 = c^2 - a^2x^2$ oder: $b^2 - a^2 + 2a^2x - a^2x^2 = c^2 - a^2x^2$ $2a^2x = c^2 - b^2 + a^2$ bzw. für die Seite b: $x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a^2} \quad y = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b^2}$ Die für die Teilungsverhältnisse von Transversalen bereits vorher bewiesenen Formeln (siehe dieses Dokument weiter vorn) $p(hA) = \frac{y}{x + y - xy} \quad \text{bzw.} \quad p(hB) = \frac{x}{x + y - xy}$ $p(hA) = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b^2} \cdot \frac{4a^2b^2}{2a^2(c^2 + b^2 - a^2) + 2b^2(c^2 + a^2 - b^2) - (c^2 + b^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}$ Zusammenfassung des Nenners: $2a^2(c^2 + b^2 - a^2) + 2b^2(c^2 + a^2 - b^2) - (c^2 + b^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)$ Erster Teil : $2a^2(c^2 + b^2 - a^2) + 2b^2(c^2 + a^2 - b^2)$ $= 2(a^2c^2 + a^2b^2 - a^4 + b^2c^2 + a^2b^2 - b^4)$ $= 2(b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2) + 2a^2b^2 - 2a^4 - 2b^4$ Zweiter Teil : $(c^2 + b^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)$ $= c^4 + a^2c^2 - b^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2 - b^4 - a^2c^2 - a^4 + a^2b^2$ $= 2a^2b^2 - a^4 - b^4 + c^4$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

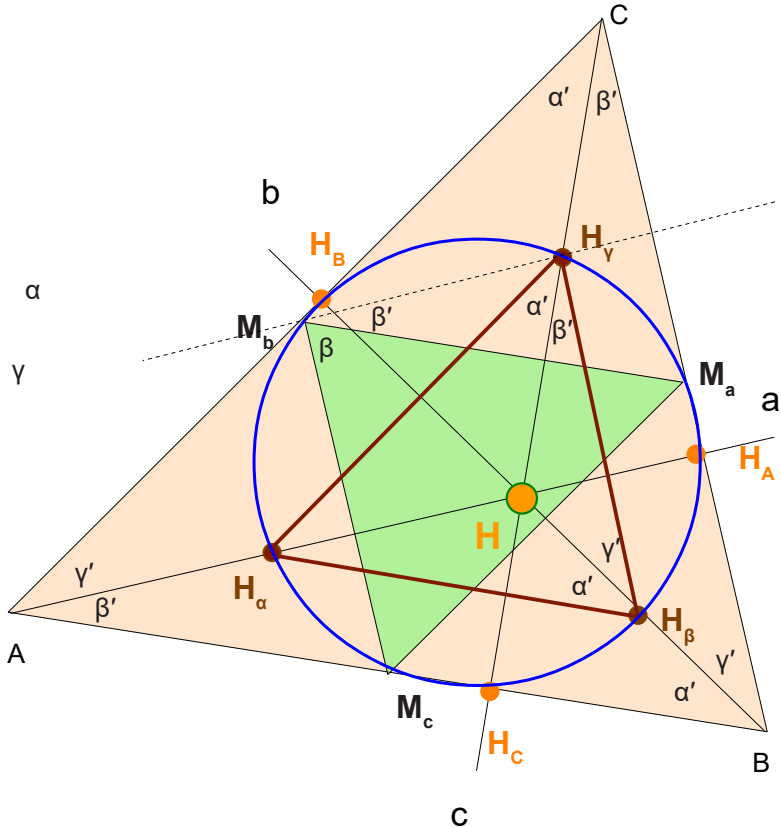
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	vor dem zweiten Teil steht ein Minuszeichen: $- 2 a^2 b^2 + a^4 + b^4 - c^4$ Fasst man beide Ausdrücke zusammen, ergibt sich : $\frac{2 (b^2 c^2 + a^2 b^2 + a^2 c^2) + 2 a^2 b^2 - 2 a^4 - 2 b^4 - 2 a^2 b^2 + a^4 + b^4 - c^4}{2(b^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}$ Das ist der gleiche Ausdruck, der bei h_A unter der Wurzel steht. Damit ergibt sich für p : $p(h_A) = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b^2} \cdot \frac{4a^2 b^2}{2(b^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}$ $p(h_A) = \frac{2a^2 (c^2 + b^2 - a^2)}{2(b^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}$ und für $p \cdot h_A$: $\frac{2a^2 (c^2 + b^2 - a^2)}{2(b^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)} \cdot \frac{\sqrt{2(b^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{2a}$ Länge der Strecke vom Eckpunkt A zum Schnittpunkt der Höhen ($p \cdot h_A$): $h_\alpha = p \cdot h_A = \frac{a(c^2 + b^2 - a^2)}{\sqrt{2(b^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}} = \frac{(c^2 + b^2 - a^2)}{2 h_A}$ $h_\beta = q \cdot h_B = \frac{b(c^2 + a^2 - b^2)}{\sqrt{2(b^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}} = \frac{(c^2 + a^2 - b^2)}{2 h_B}$ $h_\gamma = t \cdot h_C = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{\sqrt{2(b^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}} = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2 h_C}$	$b_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b} \quad c_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$ $2b b_A = -a^2 + b^2 + c^2 \quad 2c c_A = -a^2 + b^2 + c^2$ $\sqrt{2(b^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)} = 2a h_A = 4F$ Damit ergibt sich für p(hA) : $p(h_A) = \frac{2a^2 (c^2 + b^2 - a^2)}{2(b^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}$ $= \frac{2 a^2 \cdot 2b b_A}{4 a^2 h_A^2}$ $p(h_A) = \frac{b b_A}{h_A^2}$ $h_\alpha = \frac{b b_A}{h_A} = \frac{c c_A}{h_A}$ $h_\beta = \frac{c c_B}{h_B} = \frac{a a_B}{h_B}$ $h_\gamma = \frac{a a_C}{h_C} = \frac{b b_C}{h_C}$

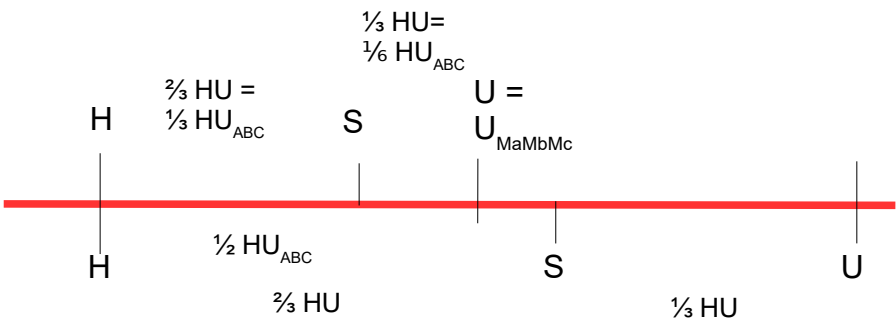
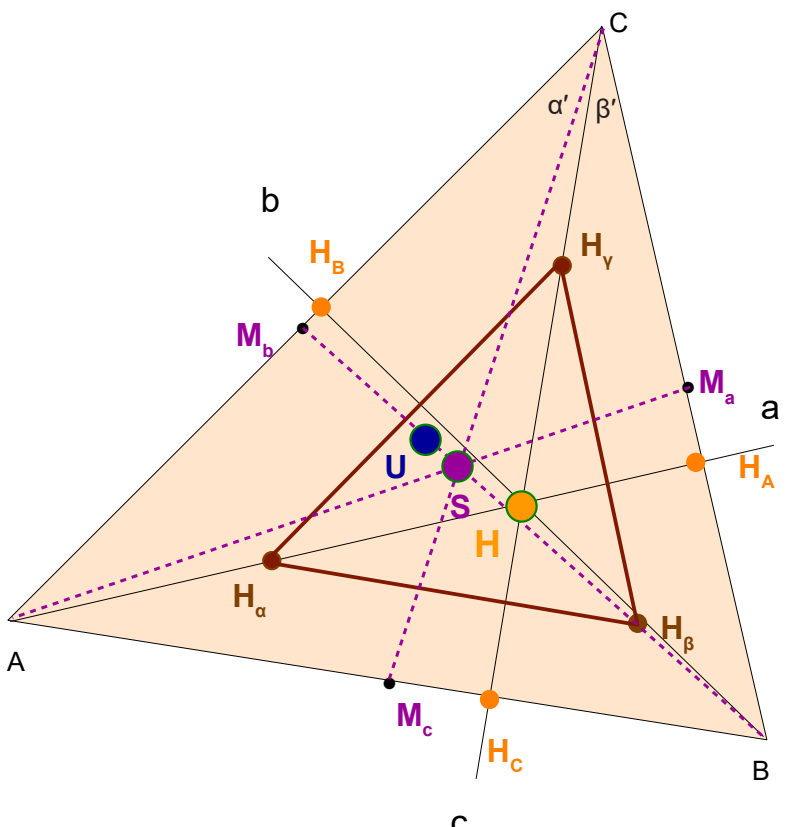
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Die oberen Höhenabschnitte h_a, h_b, h_c Wie man leicht sieht, schneiden sich die Höhen untereinander in den Dreieckswinkeln. Das ergibt die Ähnlichkeitsbeziehungen Winkel α : $\triangle AH_C C \sim \triangle AH_B B \sim \triangle HH_C B \sim \triangle HH_B C$ Winkel β : $\triangle BH_A A \sim \triangle BH_C C \sim \triangle HH_A C \sim \triangle HH_C A$ Winkel γ : $\triangle CH_B B \sim \triangle CH_A A \sim \triangle HH_B A \sim \triangle HH_A B$ Für den oberen Höhenabschnitt h_a erhält man deshalb $h_a = \frac{a \cdot c_A}{h_C} = \frac{a \cdot \frac{F_A}{c}}{\frac{2F}{c}} = \frac{a \cdot F_A}{2F}$ außerdem gelten die folgenden Beziehungen: $F_A = \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2) = c_A \cdot c = b_A \cdot b$ $2F = a h_A$ $h_a = \frac{a \cdot b \cdot b_A}{a h_A} = \frac{b \cdot b_A}{h_A} = \frac{c \cdot c_A}{h_A}$ $h_a = \frac{\frac{1}{2} a (b^2 + c^2 - a^2)}{a h_A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 h_A}$ wendet man das analog auf die anderen Seiten an, erhält man folgende Formeln $h_a = \frac{a \cdot F_A}{2F} = \frac{b \cdot b_A}{h_A} = \frac{c \cdot c_A}{h_A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 h_A}$ $h_b = \frac{b \cdot F_B}{2F} = \frac{a \cdot a_B}{h_B} = \frac{c \cdot c_B}{h_B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 h_B}$ $h_c = \frac{c \cdot F_C}{2F} = \frac{b \cdot b_C}{h_C} = \frac{a \cdot a_C}{h_C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 h_C}$	Die ähnlichen Dreiecke, die den Winkel α und einen rechten Winkel enthalten.  

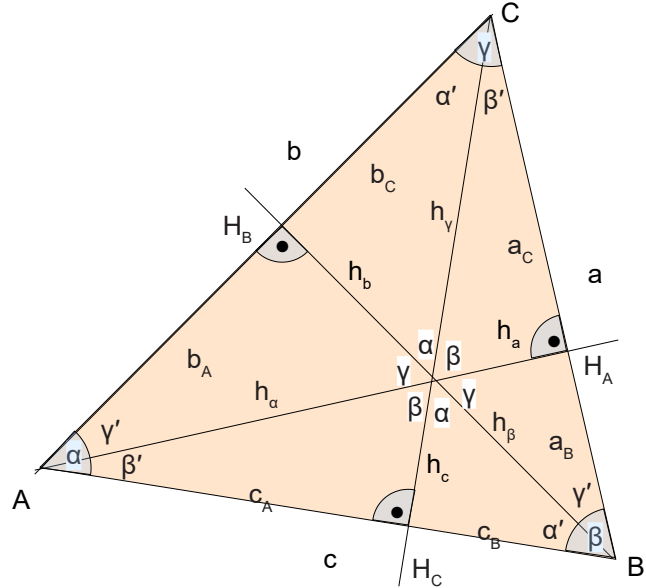
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Mittelpunkt der oberen Höhenabschnitte Halbiert man die Strecke zwischen Eckpunkt und Höhenschnittpunkt, erhält man den Mittelpunkt des oberen Höhenabschnittes. Schlägt man um diese Punkte Kreise jeweils mit dem Radius des Mittelpunktes bis zu Höhenschnittpunkt, erhält man drei Kreise mit folgenden Eigenschaften: Jeder Kreis um den Mittelpunkt eines oberen Höhenabschnittes mit dem Radius vom Mittelpunkt bis zum Höhenschnittpunkt enthält außer dem Höhenschnittpunkt aller drei Höhen noch die beiden anderen Höhenschnittpunkte mit den anliegenden Dreiecksseiten. - Die Dreiecke ABC und $H_\alpha H_\beta H_\gamma$ sind einander ähnlich. - Die Seiten besitzen das Verhältnis $2 : 1$ - Die Dreiecke besitzen die gleichen Höhenlinien und damit den gleichen Höhenschnittpunkt. - Das Dreieck der oberen Höhenmittelpunkt und das Mittendreieck besitzen den gleichen Umkreismittelpunkt und den gleichen Umkreis. (Beweis auf der nächsten Seite) - Die Länge der halben oberen Höhenabschnitte ist identisch mit der Länge der Mittelsenkrechten. (wird bei den Seitenhalbierenden gezeigt) - Das Dreieck $CM_a M_b$ ist ähnlich zum Dreieck ABC. Der Höhenschnittpunkt im Dreieck $CM_a M_b$ ist der obere Halbierungspunkt H_γ.	

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	Die Dreiecke $H_\gamma H H_\beta$ und $C H B$ sind ähnlich. Sie besitzen einen gemeinsamen Winkel und die Seiten vom Punkt H ausgehend: $HH_\gamma : HC$ und $HH_\beta : HB$ besitzen das gleiche Verhältnis 1:2. Damit ist das Verhältnis $H_\gamma H H_\beta : CB$ ebenfalls 1:2. Die Dreiecksseiten des Höhen obere Halbierungsdreiecks sind halb so groß, wie die Seiten des Dreieck ABC und parallel zu den Seiten von ABC. Vom Mittendreieck sind die Seiten ebenfalls halb so groß, wie die Seiten von ABC und die Seiten sind ebenfalls parallel zu den Seiten von ABC. $CH_\gamma = H_\gamma H$ da der Halbierungspunkt der oberen Höhe ist. $CM_b = M_b A$, da M_b der Halbierungspunkt der Seiten AC ist. Damit sind die geraden AH_α und $M_b H_\gamma$ parallel. Aus der Berechnung der Höhen sind die beiden Winkel, in die die Höhe den Winkel in der Ecke teilt angegeben und berechnet. $\alpha' = \frac{1}{2} (\beta + \gamma - \alpha)$ $\beta' = \frac{1}{2} (\gamma + \alpha - \beta)$ $\gamma' = \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma)$ Im Eckpunkt M_b ist der Winkel $\beta' + \beta$ zu berechnen. $\beta' + \beta = \frac{1}{2} (\gamma + \alpha - \beta) + \beta = \frac{1}{2} (\gamma + \alpha + \beta) = 90^\circ$ Dieser Winkel ist ein rechter Winkel. Damit ist das Viereck $M_b H_\gamma H_\beta M_c$ ein Rechteck. Ein Rechteck besitzt einen Umkreis und der Mittelpunkt dieses Umkreises ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen. Damit haben das obere Höhen Halbierungsdreieck und das Mittendreieck den gleichen Umkreismittelpunkt und damit auch den gleichen Umkreis.	

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	Da der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC und der Höhenschnittpunkt $H_\alpha H_\beta H_\gamma$ der gleiche Punkt sind, der Umkreismittelpunkt des Dreiecks identisch ist mit dem Umkreismittelpunkt des Mittendreiecks und damit auf der Euler Geraden des Dreiecks ABC liegt, müssen auch alle Punkte des Dreiecks $H_\alpha H_\beta H_\gamma$ auf der Eulergeraden des Dreiecks ABC liegen. Dreieck $H_\alpha H_\beta H_\gamma$  Dreieck ABC	

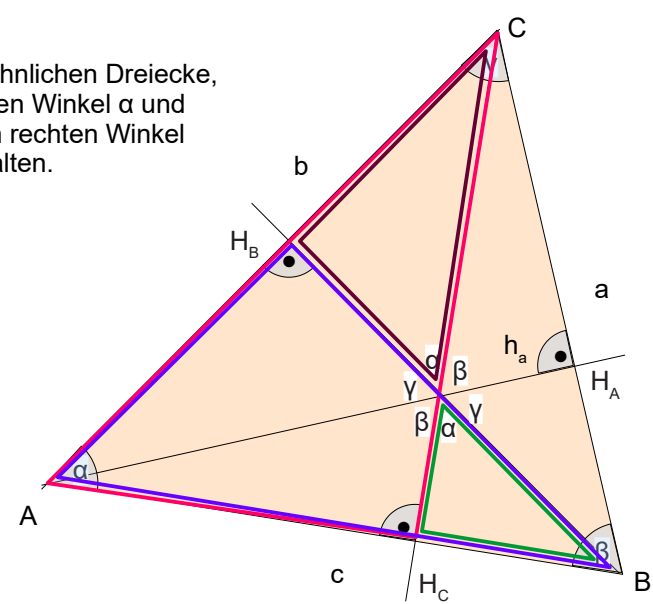
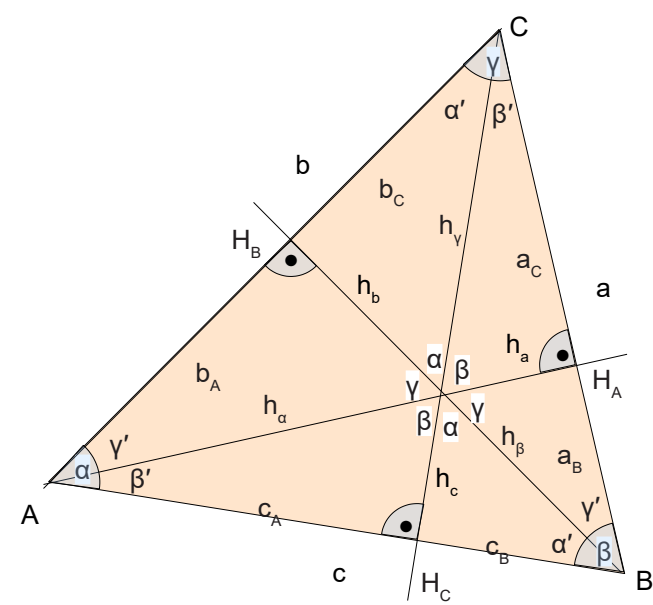
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

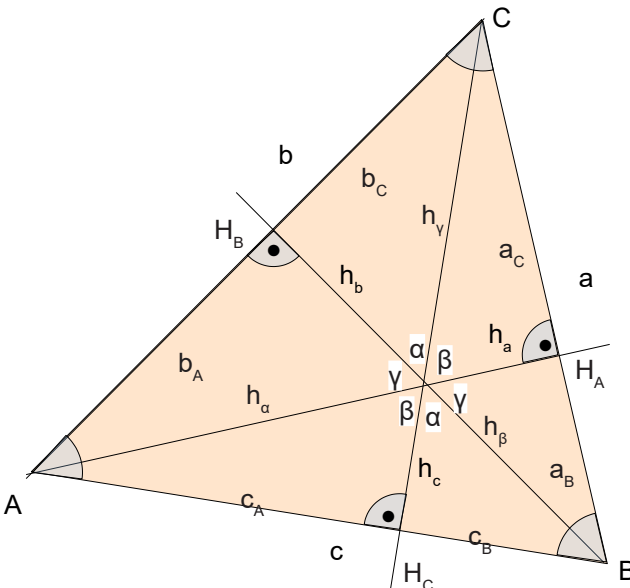
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Winkelteilung durch die Höhen Aus den rechtwinkligen Dreiecken lassen sich auch Formeln für die geteilten Winkel herleiten. (Für die Formeln der unteren Teilabschnitte h_a, h_b und h_c siehe nachfolgende Seiten.) $h_b = \frac{F_A \cdot F_C}{2bF}$ $\sin \alpha' = \frac{h_b}{h_\gamma} = \frac{\frac{F_A \cdot F_C}{2bF}}{\frac{c \cdot F_C}{2F}} = \frac{F_A \cdot F_C}{2bF} \cdot \frac{2F}{c \cdot F_C} = \frac{F_A}{bc}$ $\sin \alpha' = \frac{h_b}{h_\gamma} = \frac{F_A}{bc} \quad \sin \beta' = \frac{h_c}{h_\alpha} = \frac{F_B}{ca} \quad \sin \gamma' = \frac{h_a}{h_\beta} = \frac{F_C}{ab}$ Aus der nebenstehenden Darstellung lässt sich aber auch folgendes Gleichungssystem herleiten: $\begin{aligned} \alpha' + \beta' &= \gamma & (1) \\ \beta' + \gamma' &= \alpha & (2) \\ \alpha' + \gamma' &= \beta & (3) \end{aligned}$ Dieses Gleichungssystem ist lösbar: $\begin{aligned} (1^*) \quad \alpha' &= \gamma - \beta' \\ (3^*) \quad \alpha' &= \beta - \gamma' \\ \gamma - \beta' &= \beta - \gamma' \\ \beta' &= \gamma - \beta + \gamma' \end{aligned}$ $\begin{aligned} (2^*) \quad \gamma - \beta + \gamma' + \gamma' &= \alpha \\ \gamma' &= \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma) \end{aligned}$ Einsetzen in (3*) $\begin{aligned} \alpha' &= \beta - \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma) \\ \alpha' &= \frac{1}{2} (\beta + \gamma - \alpha) \end{aligned}$ $\begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{2} (\beta + \gamma - \alpha) \\ \beta' &= \frac{1}{2} (\gamma + \alpha - \beta) \\ \gamma' &= \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma) \end{aligned}$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Die unteren Höhenabschnitte h_a, h_b, h_c Aus $p = \frac{y}{x+y-xy}$ folgt $1-p = \frac{x+y-xy-y}{x+y-xy} = \frac{x-xy}{x+y-xy} = x(1-y) \cdot \frac{1}{x+y-xy}$ unter Benutzung der vorhergehenden Formeln $x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a^2} \quad y = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b^2}$ ergibt sich für den ersten Faktor (oder Zähler) $x(1-y) = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a^2} \left(1 - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b^2}\right)$ $x(1-y) = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a^2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b^2}$ $= \frac{c^2 a^2 + c^2 b^2 - c^4 + a^4 + a^2 b^2 - a^2 c^2 - a^2 b^2 - b^4 + b^2 c^2}{4 a^2 b^2}$ $= \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2}{4 a^2 b^2}$ $x(1-y) \cdot \frac{1}{x+y-xy} = \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2}{4 a^2 b^2} \cdot \frac{1}{x+y-xy}$ der Nenner $x+y-xy$ wurde vorher umgerechnet $= \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2}{4 a^2 b^2} \cdot \frac{4 a^2 b^2}{2(b^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}$ $1-p = x(1-y) \cdot \frac{1}{x+y-xy} = \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2}{2(b^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}$ $h_a = (1-p) \cdot h_A = \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2}{2(b^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)} \cdot \frac{\sqrt{2(b^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{2a}$ $= \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2(b^2 c^2 + b^2 a^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	$h_a = (1 - p) \cdot h_A = \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2}{2a \sqrt{2(b^2c^2 + b^2a^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}$ außerdem erhält man für den unteren Höhenabschnitt h_a aus den Ähnlichkeitsbeziehungen $h_a = \frac{a_C a_B}{h_A} = \frac{\frac{F_C}{a} \frac{F_B}{a}}{\frac{2F}{a}} = \frac{F_B \cdot F_C}{2aF}$ und deren analoge Umsetzung auf die anderen Höhen: $h_a = \frac{F_B \cdot F_C}{2aF} = \frac{a_B \cdot a_C}{h_A} = \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2}{4a^2 h_A}$ $h_b = \frac{F_A \cdot F_C}{2bF} = \frac{b_C \cdot b_A}{h_B} = \frac{b^4 - c^4 - a^4 + 2c^2a^2}{4b^2 h_B}$ $h_c = \frac{F_A \cdot F_B}{2cF} = \frac{c_A \cdot c_B}{h_C} = \frac{c^4 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2}{4c^2 h_C}$ (15)	Die ähnlichen Dreiecke, die den Winkel α und einen rechten Winkel enthalten.  

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Berechnung der Teilung der Höhen Gesucht sind die Anteile h_a und h_a in denen H die Höhe h_A teilt. Für die Seitenabschnitte a_B und a_C wurden weiter vorn folgende Beziehung gezeigt: $h_a = \frac{a \cdot F_A}{2F} \quad h_a = \frac{F_B \cdot F_C}{2aF}$ die beiden Größen ins Verhältnis gesetzt liefert: $\frac{h_a}{h_a} = \frac{a \cdot F_A}{2F} \cdot \frac{2aF}{F_B \cdot F_C} = \frac{a^2 \cdot F_A}{F_B \cdot F_C} = \frac{a^2 \cdot \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2)}{\frac{1}{4} (c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$ Umformung des Nenners $(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$ $a^2c^2 + b^2c^2 - c^4 + a^4 + a^2b^2 - a^2c^2 - a^2b^2 - b^4 + b^2c^2$ $a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2$ $\frac{h_a}{h_a} = a^2 \frac{F_A}{F_B \cdot F_C} = 2a^2 \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$ und unter Benutzung des umgestellten Kosinussatzes: $2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$ $2ca \cos \beta = c^2 + a^2 - b^2$ $2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2$ und der Seitenabschnitte der Höhen $\frac{h_a}{h_a} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} = \frac{b \cdot b_A}{a_B \cdot a_C} = \frac{c \cdot c_A}{a_B \cdot a_C}$	

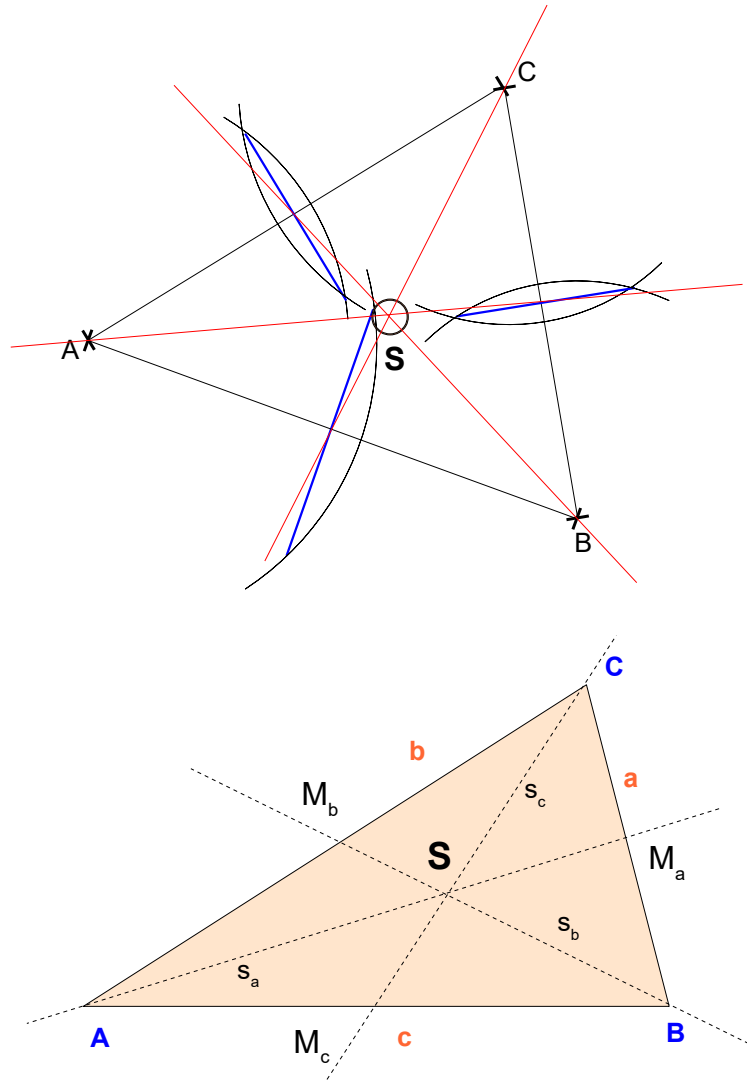
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Zusammenhang der Seitenabschnitte Kombiniert man die Formeln (14) und (15), erhält man : $h_a \cdot h_a = h_b \cdot h_b = h_c \cdot h_c = \frac{F_A \cdot F_B \cdot F_C}{4F^2}$ Das heißt, $h_a \cdot h_a$ ist eine Invariante, da sich die rechte Seite bei zyklischem Vertauschen nicht ändert. Das kann man auch geometrisch leicht einsehen: Das Viereck $\square ABH_A H_B$ ist ein Sehnenviereck (zwei rechtwinklige Dreiecke über einem gemeinsamen Durchmesser AB). Nach dem Sehnensatz gilt für die Abschnitte der beiden sich schneidenden Sehnen (Höhen) $h_a \cdot h_a = h_b \cdot h_b$. Aus den Ähnlichkeitsbeziehungen ergibt sich weiter $h_A \cdot h_a = a_B \cdot a_C, \quad h_B \cdot h_b = b_C \cdot b_A, \quad h_C \cdot h_c = c_A \cdot c_B$ Hieraus erhält man leicht $F_C = h_A \cdot h_a + a_C^2, \quad F_B = h_A \cdot h_a + a_B^2$ $F_A = h_B \cdot h_b + b_A^2, \quad F_C = h_B \cdot h_b + b_C^2$ $F_B = h_C \cdot h_c + c_B^2, \quad F_A = h_C \cdot h_c + c_A^2.$ Durch Addition dieser Gleichungen folgt $a_C^2 + b_A^2 + c_B^2 = a_B^2 + b_C^2 + c_A^2$ (16)	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Höhen</i>	★ Die ähnlichen Dreiecke Der Höhenschnittpunkt H erzeugt eine ganze Menge ähnlicher Dreiecke. In einem ähnlichen Dreieck stehen alle Seiten im gleichen Verhältnis (Strahlensatz) und die Innenwinkel der Dreiecke sind gleich. (1) Alle Dreiecke, die in H einen gleichen Scheitelwinkel besitzen sind ähnlich. Da Scheitelwinkel immer gleich groß sind und alle Dreiecke zusätzlich über einen rechten Winkel verfügen sind damit alle Winkel gleich groß, so dass nach dem Ähnlichkeitssatz WWW die Dreiecke ähnlich sind. $AHH_B \approx BHH_A$; $AHH_C \approx CHH_A$; $CHH_B \approx BHH_C$; (2) Alle Dreiecke besitzen einen rechten Winkel, wenn sie einen zweiten Winkel besitzen, der gleich ist, dann sind alle drei Winkel gleich und die Dreiecke somit ähnlich. Dazu soll als Beispiel das Dreieck ABH_C und das Dreieck $HH_C B$ betrachte werden. Beide Dreiecke besitzen im Punkt B den gleichen Winkel, also sind sie ähnlich: $ABH_B \approx BHH_C; ABH_A \approx AHH_C; \quad \quad ACH_C \approx CHH_B; ACH_A \approx AHH_B;$ $BCH_B \approx BHH_A; CBH_C \approx CHH_A;$ (3) Betrachtet man das gelbe Dreieck und den markierten Winkel α, so gilt, dass der Scheitelwinkel gegenüber die gleiche Größe besitzt. Und damit der Winkel HBH_C (Winkel in der Ecke B) die Größe $90^\circ - \alpha$. Gleichzeitig ist dieser Winkel aber auch Winkel des grünen Dreiecks $\Delta AH_B B$. Damit ergibt sich für den Winkel $\beta = 90^\circ - (90^\circ - \alpha)$. Da das Dreieck bereits einen rechten Winkel hat, ist der Winkel nur noch von 90° zu subtrahieren. daraus folgt schließlich, dass $\beta = \alpha$. Damit sind zwei Winkel in den beiden Dreiecken gleich, also auch der dritte Winkel, so dass die Dreiecke ähnlich sind, somit ist die Ähnlichkeit folgender Dreieck bewiesen: $ABH_B \approx CHH_B \approx BHH_C$; $ABH_B \approx CHH_B \approx BHH_C; \quad ACH_C \approx BHH_C \approx CHH_B;$ damit gilt die Ähnlichkeit für vier Dreiecke $ABH_B \approx CHH_B \approx BHH_C \approx ACH_C$ grünes Dreieck gelbes Dreieck blaue Umrandung rote Umrandung	
	© Dipl.-Math. Armin Richter Treffo Lernen CHRISTINA STRAUCH	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Seitenhalbierenden</i>	Die Seitenhalbierenden	
	Konstruktion - Man konstruiert zunächst die Mittelsenkrechten, wie oben beschrieben, markiert aber nur den Schnittpunkt mit der Dreiecksseite. - Danach verbindet man diesen Schnittpunkt mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt. - Die beiden Winkel im Eckpunkt und die Schnittwinkel mit der Dreiecksseite sind unbestimmt und können nicht angegeben werden.	
	Schnittpunkt der Seitenhalbierenden Eine Seitenhalbierende verläuft durch den Mittelpunkt einer Dreiecksseite und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt. Diese Seitenhalbierende steht nicht notwendig senkrecht auf der Seite. Nur bei einem rechten Winkel und gleichschenkligen Dreiecken. - Die Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt im Inneren des Dreiecks. - Die Seitenhalbierenden liegen immer im Inneren des Dreiecks. - Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Verhältnis 1:2. - Die Seitenhalbierenden sind die Schwerlinien des Dreiecks, ihr Schnittpunkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks.	

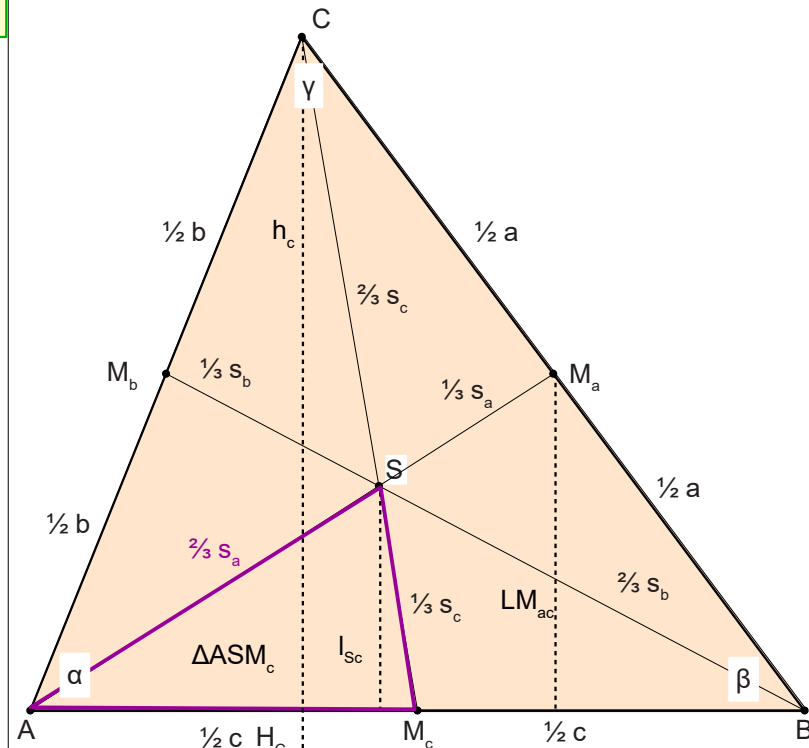
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Seitenhalbierenden</i>	★ Berechnung der Länge der Seitenhalbierenden Aus dem Lehrsatz und der Schlußfolgerung ergibt sich für das Teilungsverhältnis der Seitenhalbierenden: $s : (1-s) = 2 : 1$ Allgemein ergibt sich die Länge der Transversalen zu: $ AM_a = \sqrt{(a^2x^2 + (b^2 - c^2 - a^2)x + c^2)} \quad BM_b = \sqrt{(b^2y^2 + (a^2 - c^2 - b^2)y + c^2)}$ Die Teilungsverhältnisse x der Seite a ergeben sich für Seitenhalbierende: $x : (1-x) = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ und $y : (1-y) = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ Wird in der obigen Formel vor x und y der Wert $\frac{1}{2}$ eingesetzt ergibt sich: $ AM_a = \sqrt{(a^2 \frac{1}{4} + (b^2 - c^2 - a^2) \frac{1}{2} + c^2)} \quad BM_b = \sqrt{(b^2 \frac{1}{4} + (a^2 - c^2 - b^2) \frac{1}{2} + c^2)}$ $ AM_a = \frac{\sqrt{(a^2 + 2b^2 - 2c^2 - 2a^2 + 4c^2)}}{2} \quad BM_b = \frac{\sqrt{(b^2 + 2a^2 - 2c^2 - 2b^2 + 4c^2)}}{2}$ $s_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \quad s_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$ Für die Längen der Seitenhalbierenden s_a, s_b, s_c gilt: (20) $s_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha} = \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + bc \cos \alpha}$ (21) $s_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + a^2 + 2ca \cos \beta} = \sqrt{\frac{1}{4} b^2 + ca \cos \beta}$ (22) $s_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma} = \sqrt{\frac{1}{4} c^2 + ab \cos \gamma}$ Wegen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ $\begin{aligned} & 2(b^2 + c^2) - a^2 \\ &= 2(b^2 + c^2) - (b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha) \\ &= b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha \end{aligned}$ $a^2 + 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2$ $\begin{aligned} & 2(b^2 + c^2) - a^2 \\ &= 2(a^2 + 2bc \cos \alpha) - a^2 \\ &= a^2 + 4bc \cos \alpha \\ &= 4(\frac{1}{4} a^2 + bc \cos \alpha) \end{aligned}$ $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2)$	

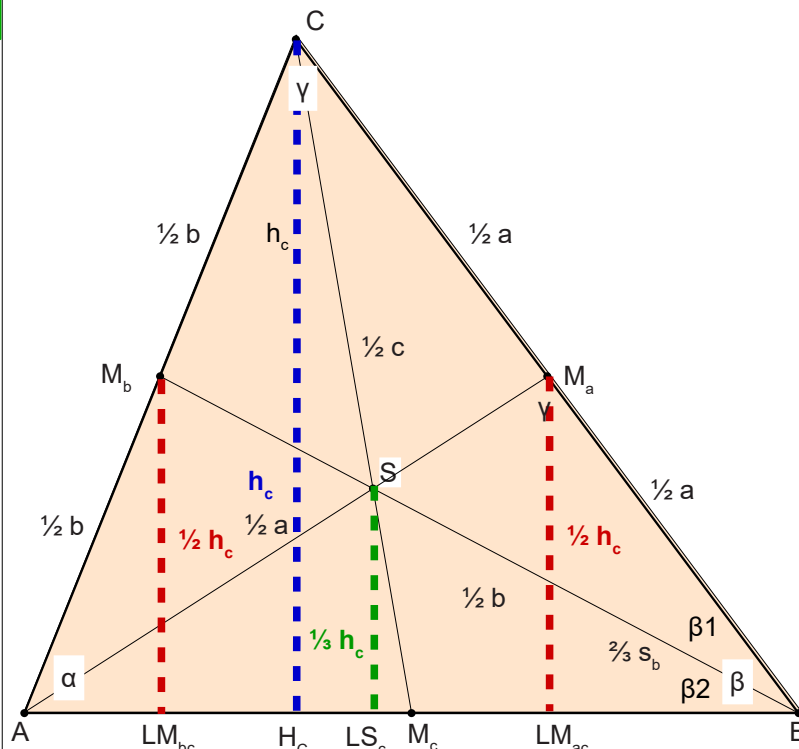
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Seitenhalbierenden</i>	★ Berechnung der Teilung der Seitenhalbierenden Aus dem Lehrsatz und der Schlußfolgerung ergibt sich für das Teilungsverhältnis der Seitenhalbierenden: $s : (1-s) = 2 : 1$. Damit ergibt sich die Länge der Seitenhalbierenden vom Eckpunkt bis zum Schnittpunkt als: $AS = \frac{1}{3} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$ $BS = \frac{1}{3} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$ Der Schwerpunkt S erzeugt mit den Seitenhalbierenden 6 Dreiecke innerhalb des Dreiecks ABC. Es gilt dabei folgender Satz: Die durch den Schwerpunkt und die drei Seitenhalbierenden erzeugten sechs Dreiecke sind flächengleich. Der Flächeninhalt dieser Dreiecke ist damit $\frac{1}{6} F$. Das bedeutet aber auch, daß die Seitenhalbierenden nicht nur die Dreiecksseiten in zwei gleich große Teile teilen, sondern auch die Fläche. Außerdem wurde erst im Jahr 2000 ! folgende Beziehung entdeckt: Die Umkreismittelpunkte dieser sechs Kreise liegen ebenfalls auf einem Kreis. Dieser Kreis wird nach seinem Entdecker Lamoienkreis genannt. Aus den Formeln (20) – (22) folgt $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2)$ Außerdem kann man sie verwenden, um die Seitenlängen durch die Längen der Seitenhalbierenden auszudrücken: $a^2 = \frac{8}{9} s_b^2 + \frac{8}{9} s_c^2 - \frac{4}{9} s_a^2 = \frac{4}{9} (2(s_b^2 + s_c^2) - s_a^2)$ $b^2 = \frac{8}{9} s_c^2 + \frac{8}{9} s_a^2 - \frac{4}{9} s_b^2 = \frac{4}{9} (2(s_c^2 + s_a^2) - s_b^2)$ $c^2 = \frac{8}{9} s_a^2 + \frac{8}{9} s_b^2 - \frac{4}{9} s_c^2 = \frac{4}{9} (2(s_a^2 + s_b^2) - s_c^2)$ $a = \frac{2}{3} \sqrt{2(s_b^2 + s_c^2) - s_a^2}$ $b = \frac{2}{3} \sqrt{2(s_c^2 + s_a^2) - s_b^2}$ $c = \frac{2}{3} \sqrt{2(s_a^2 + s_b^2) - s_c^2}$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Seitenhalbierenden</i>	★ Die Höhen der Teildreiecke Dreieck ΔASM_c l_{Sc} : Höhe des Dreiecks ΔASM_c = Lot von S auf c $F[\Delta ASM_c] = \frac{1}{6} F = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} c \cdot l_{Sc} = \frac{1}{4} c \cdot l_{Sc}$ umgestellt nach F ergibt sich : $F = \frac{3}{4} c \cdot l_{Sc} = \frac{1}{2} c \cdot 3 l_{Sc} = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ Die Höhe des Dreiecks ΔASM_c ist $\frac{1}{3}$ der Höhe auf c. $\begin{aligned} l_{Sa} &= \frac{1}{3} h_A \\ l_{Sb} &= \frac{1}{3} h_B \\ l_{Sc} &= \frac{1}{3} h_C \end{aligned}$ Dreieck $\Delta AM_a B$ L_{Sc} : Höhe des Dreiecks $\Delta AM_a B$ = Lot von M_a auf c Das Dreieck fasst 3 der 6 flächengleichen Dreiecke zusammen, deshalb beträgt der Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ des Ausgangsdreiecks. $F[\Delta AM_a B] = \frac{1}{2} F = \frac{1}{2} c \cdot L_{Sc}$ $F = c \cdot L_{Sc} = \frac{1}{2} c \cdot 2 L_{Sc} = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ Die Höhe des Dreiecks $\Delta AM_a B$ ist $\frac{1}{2}$ der Höhe auf c. $\begin{aligned} LM_{ca} &= \frac{1}{2} h_A \\ LM_{ab} &= \frac{1}{2} h_B \\ LM_{ac} &= \frac{1}{2} h_C \end{aligned}$	 $c_A = \frac{c_A^2 - a^2 + b^2 + c^2}{2c}$ $c_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$ Abstand des Höhenfußpunktes vom Seitenmittelpunkt auf Seite c $\frac{1}{2} c - c_A = \frac{c^2}{2c} - \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} = \frac{a^2 - b^2}{2c}$ $\frac{1}{2} c - c_B = \frac{c^2}{2c} - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} = \frac{b^2 - a^2}{2c}$ Einer von beiden Werten muss positiv sein. Das hängt davon ab, auf welcher Seite vom Mittelpunkt der Höhenfußpunkt liegt.

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele																																				
Besondere Linien im Dreieck Die Seitenhalbierenden	★ Projektionen der Seitenhalbierenden Nach der Berechnung der Lote von S um den Seitenmittelpunkten werden hier die Seitenabschnitte der Lote berechnet. Die Berechnungen erfolgen modellhaft an der Seite c in Verbindung mit der Seitenhalbierenden zur Seite a und zur Seite b LM_{ac} : Lotfußpunkt von M_a auf c LM_{bc} : Lotfußpunkt von M_b auf c LS_c : Lotfußpunkt von S auf c H_c : Höhenfußpunkt auf c A H_c : Abstand A zu Höhenfußpunkt H_c : c_A B H_c : Abstand B zu Höhenfußpunkt H_c : c_B <table><tr><td>A LM_{bc} : Abstand A zu LM_{bc} : $\frac{1}{2} c_A$</td><td>$\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4c}$</td></tr><tr><td>B LM_{ac} : Abstand B zu LM_{ac} : $\frac{1}{2} c_B$</td><td>$\frac{a^2 - b^2 + c^2}{4c}$</td></tr><tr><td>A LM_{ac} : Abstand A zu LM_{ac} : $c_A + \frac{1}{2} c_B$</td><td>$\frac{-a^2 + b^2 + 3c^2}{4c}$</td></tr><tr><td>B LM_{bc} : Abstand B zu LM_{bc} : $\frac{1}{2} c_A + c_B$</td><td>$\frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{4c}$</td></tr><tr><td>A LS_c : Abstand A zu LS_c : $\frac{1}{3} (c + c_A)$</td><td>$\frac{-a^2 + b^2 + 3c^2}{6c}$</td></tr><tr><td>B LS_c : Abstand B zu LS_c : $\frac{1}{3} (c + c_B)$</td><td>$\frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{6c}$</td></tr><tr><td>$H_c M_c$: Abstand H_c zu M_c : $\frac{1}{2} c - c_A$</td><td>$\frac{a^2 - b^2}{2c}$</td></tr><tr><td>$H_c LM_{ac}$: Abstand H_c zu LM_{ac} : $\frac{1}{2} c_B$</td><td>$\frac{a^2 - b^2 + c^2}{4c}$</td></tr><tr><td>$H_c LM_{bc}$: Abstand H_c zu LM_{bc} : $\frac{1}{2} c_A$</td><td>$\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4c}$</td></tr><tr><td>$H_c LS_c$: Abstand H_c zu LS_c : $\frac{1}{3} c - \frac{2}{3} c_A$</td><td>$\frac{a^2 - b^2}{3c}$</td></tr></table> In Abhängigkeit vom Dreieck können die Werte auch negative Vorzeichen haben. In diesen Fällen sind die Beträge zu nehmen.	A LM_{bc} : Abstand A zu LM_{bc} : $\frac{1}{2} c_A$	$\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4c}$	B LM_{ac} : Abstand B zu LM_{ac} : $\frac{1}{2} c_B$	$\frac{a^2 - b^2 + c^2}{4c}$	A LM_{ac} : Abstand A zu LM_{ac} : $c_A + \frac{1}{2} c_B$	$\frac{-a^2 + b^2 + 3c^2}{4c}$	B LM_{bc} : Abstand B zu LM_{bc} : $\frac{1}{2} c_A + c_B$	$\frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{4c}$	A LS_c : Abstand A zu LS_c : $\frac{1}{3} (c + c_A)$	$\frac{-a^2 + b^2 + 3c^2}{6c}$	B LS_c : Abstand B zu LS_c : $\frac{1}{3} (c + c_B)$	$\frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{6c}$	$H_c M_c$: Abstand H_c zu M_c : $\frac{1}{2} c - c_A$	$\frac{a^2 - b^2}{2c}$	$H_c LM_{ac}$: Abstand H_c zu LM_{ac} : $\frac{1}{2} c_B$	$\frac{a^2 - b^2 + c^2}{4c}$	$H_c LM_{bc}$: Abstand H_c zu LM_{bc} : $\frac{1}{2} c_A$	$\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4c}$	$H_c LS_c$: Abstand H_c zu LS_c : $\frac{1}{3} c - \frac{2}{3} c_A$	$\frac{a^2 - b^2}{3c}$	 <table><tr><td>$\frac{1}{2} c$</td><td>$\frac{1}{2} c$</td></tr><tr><td>$c_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$</td><td>$c_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$</td></tr><tr><td>A $H_c = c_A$</td><td>$H_c LM_{ac} = \frac{1}{2} c_B$ B $LM_{ac} = \frac{1}{2} c_B$</td></tr><tr><td>$\frac{1}{2} c_A$</td><td>$\frac{1}{2} c_A$ B $H_c = c_B$</td></tr><tr><td>$c_A + \frac{1}{2} c_B$</td><td>B $LM_{ac} = \frac{1}{2} c_B$</td></tr><tr><td>$\frac{1}{2} c_A$</td><td>$\frac{1}{2} c_A + c_B$</td></tr><tr><td>$c_A$</td><td>$\frac{1}{2} c - c_A$ $\frac{1}{2} c$</td></tr><tr><td>$\frac{1}{3} (c + c_A)$</td><td>$\frac{1}{3} (c + c_B)$</td></tr></table>	$\frac{1}{2} c$	$\frac{1}{2} c$	$c_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$	$c_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$	A $H_c = c_A$	$H_c LM_{ac} = \frac{1}{2} c_B$ B $LM_{ac} = \frac{1}{2} c_B$	$\frac{1}{2} c_A$	$\frac{1}{2} c_A$ B $H_c = c_B$	$c_A + \frac{1}{2} c_B$	B $LM_{ac} = \frac{1}{2} c_B$	$\frac{1}{2} c_A$	$\frac{1}{2} c_A + c_B$	c_A	$\frac{1}{2} c - c_A$ $\frac{1}{2} c$	$\frac{1}{3} (c + c_A)$	$\frac{1}{3} (c + c_B)$
A LM_{bc} : Abstand A zu LM_{bc} : $\frac{1}{2} c_A$	$\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4c}$																																					
B LM_{ac} : Abstand B zu LM_{ac} : $\frac{1}{2} c_B$	$\frac{a^2 - b^2 + c^2}{4c}$																																					
A LM_{ac} : Abstand A zu LM_{ac} : $c_A + \frac{1}{2} c_B$	$\frac{-a^2 + b^2 + 3c^2}{4c}$																																					
B LM_{bc} : Abstand B zu LM_{bc} : $\frac{1}{2} c_A + c_B$	$\frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{4c}$																																					
A LS_c : Abstand A zu LS_c : $\frac{1}{3} (c + c_A)$	$\frac{-a^2 + b^2 + 3c^2}{6c}$																																					
B LS_c : Abstand B zu LS_c : $\frac{1}{3} (c + c_B)$	$\frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{6c}$																																					
$H_c M_c$: Abstand H_c zu M_c : $\frac{1}{2} c - c_A$	$\frac{a^2 - b^2}{2c}$																																					
$H_c LM_{ac}$: Abstand H_c zu LM_{ac} : $\frac{1}{2} c_B$	$\frac{a^2 - b^2 + c^2}{4c}$																																					
$H_c LM_{bc}$: Abstand H_c zu LM_{bc} : $\frac{1}{2} c_A$	$\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4c}$																																					
$H_c LS_c$: Abstand H_c zu LS_c : $\frac{1}{3} c - \frac{2}{3} c_A$	$\frac{a^2 - b^2}{3c}$																																					
$\frac{1}{2} c$	$\frac{1}{2} c$																																					
$c_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$	$c_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$																																					
A $H_c = c_A$	$H_c LM_{ac} = \frac{1}{2} c_B$ B $LM_{ac} = \frac{1}{2} c_B$																																					
$\frac{1}{2} c_A$	$\frac{1}{2} c_A$ B $H_c = c_B$																																					
$c_A + \frac{1}{2} c_B$	B $LM_{ac} = \frac{1}{2} c_B$																																					
$\frac{1}{2} c_A$	$\frac{1}{2} c_A + c_B$																																					
c_A	$\frac{1}{2} c - c_A$ $\frac{1}{2} c$																																					
$\frac{1}{3} (c + c_A)$	$\frac{1}{3} (c + c_B)$																																					
© Dipl.-Math. Armin Richter  Treffo Lernen CHRISTINA STRAUCH																																						

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Seitenhalbierenden</i>	★ Die Winkel der Teildreiecke Da es sich hier grundsätzlich um nicht rechtwinklige Dreiecke handelt, bei denen aber die Seitenlängen bekannt sind, bietet sich zur Berechnung der Kosinussatz an. Dreieck ΔASM_c Bezeichnung : α_c Der Teil des Winkels α den die Seitenhalbierende s_a mit der Seite c einschließt. $\cos \alpha_c = \frac{c_A + \frac{1}{2} c_B}{s_a} = \frac{1}{s_a} \frac{-a^2 + b^2 + 3c^2}{4c}$ $\cos \alpha_b = \frac{b_A + \frac{1}{2} b_C}{s_a} = \frac{1}{s_a} \frac{-a^2 + 3b^2 + c^2}{4b}$ $\cos \beta_a = \frac{a_B + \frac{1}{2} a_C}{s_b} = \frac{1}{s_b} \frac{3a^2 - b^2 + c^2}{4a}$ $\cos \beta_c = \frac{c_B + \frac{1}{2} c_A}{s_b} = \frac{1}{s_b} \frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{4c}$ $\cos \gamma_b = \frac{b_C + \frac{1}{2} b_A}{s_c} = \frac{1}{s_c} \frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{4b}$ $\cos \gamma_a = \frac{a_C + \frac{1}{2} a_B}{s_c} = \frac{1}{s_c} \frac{3a^2 + b^2 - c^2}{4a}$	

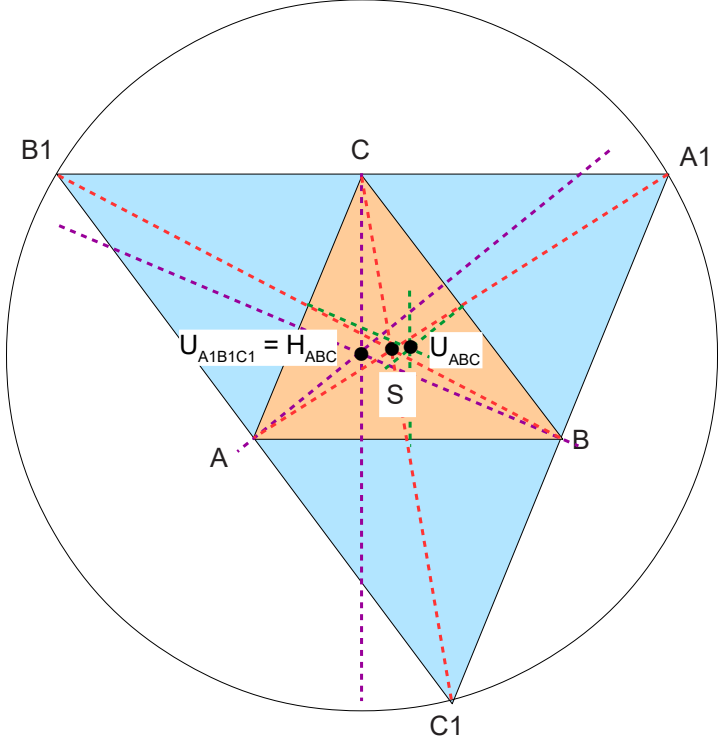
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Seitenhalbierenden</i>	★ Die Lotfußpunkte des Schwerpunktes Auf den vergangenen Seiten wurden die Lotfußpunkte der Seitenmittelpunkte auf die jeweils anderen zwei Seiten bestimmt. Die Abstände der Höhenfußpunkte zu den jeweiligen Eckpunkten sind im Abschnitt „Höhen“ bestimmt worden. Was noch bleibt ist die Bestimmung der Lotfußpunkte des Schwerpunktes auf die Dreiecksseiten. Die Formel soll über das Lot des Schwerpunktes auf die Seite c bestimmt werden. Da der Schwerpunkt die Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 teilt, teilt auch das Lot auf die Seite c die Strecke $\frac{1}{2} c_A + c_B$ im Verhältnis 2:1. Damit ist die Länge von $\overline{BLSc} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} c_A + c_B \right) = \frac{1}{3} c_A + \frac{2}{3} c_B = \frac{1}{3} (c_A + 2 c_B) = \frac{1}{3} (c + c_B)$ $c_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \quad c_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$ $\frac{1}{3} c_A + \frac{2}{3} c_B = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{6c} + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{3c} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2 - 2b^2 + 2c^2}{6c}$ $= \frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{6c}$ Für den Abstand von A zu LS_c muß man diesen Wert von c subtrahieren: $c - \frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{6c} = \frac{6c^2 - a^2 + b^2 - 3c^2}{6c}$ $\overline{ALSc} = \frac{1}{3} (c + c_A) = \frac{-a^2 + b^2 + 3c^2}{6c} \quad \overline{BLSc} = \frac{1}{3} (c + c_B) = \frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{6c}$ $\overline{ALSb} = \frac{1}{3} (b + b_A) = \frac{-a^2 + 3b^2 + c^2}{6b} \quad \overline{CLSb} = \frac{1}{3} (b + b_A) = \frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{6b}$ $\overline{BLSa} = \frac{1}{3} (a + a_B) = \frac{3a^2 - b^2 + c^2}{6a} \quad \overline{CLSa} = \frac{1}{3} (a + a_C) = \frac{3a^2 + b^2 - c^2}{6a}$	Da die Höhe des Lotes von Mb nach LMb $\frac{1}{2} h_c$ beträgt, ergibt sich für die Höhe des Lotes von S nach LS_c. Die Längen sind bereits einige Seiten vorher bestimmt worden. $l_{Sa} = \frac{1}{3} h_a$ $l_{Sb} = \frac{1}{3} h_b$ $l_{Sc} = \frac{1}{3} h_c$

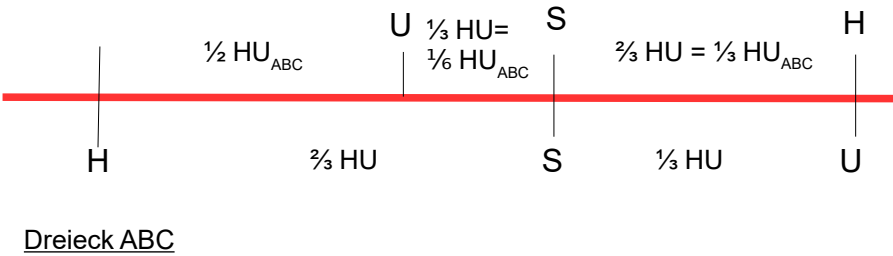
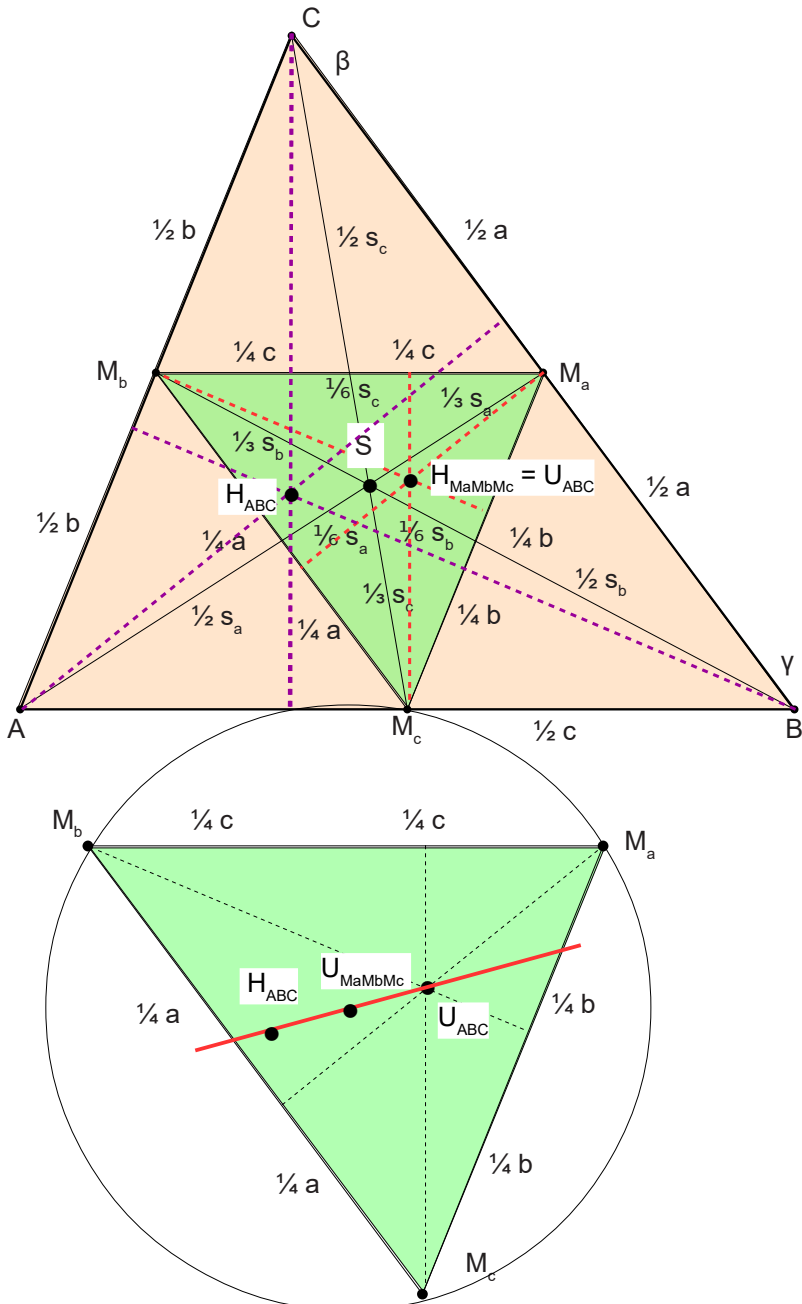
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
	$\left(\frac{1}{2}c\right)^2 = \left(\frac{2}{3}s_a\right)^2 + \left(\frac{1}{3}s_c\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}s_a \cdot \left(\frac{1}{3}s_c\right) \cos x$ $2 \cdot \frac{2}{3}s_a \cdot \frac{1}{3}s_c \cos x = \left(\frac{2}{3}s_a\right)^2 + \left(\frac{1}{3}s_c\right)^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2$ $\frac{4}{9}s_a s_c \cos x = \frac{4}{9}s_a^2 + \frac{1}{9}s_c^2 - \frac{1}{4}c^2$ $\cos \angle ASM_c = \frac{\frac{4}{9}s_a^2 + \frac{1}{9}s_c^2 - \frac{1}{4}c^2}{\frac{4}{9}s_a s_c}$ $\frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} (2(b^2 + c^2) - a^2) + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} (2(a^2 + b^2) - c^2) - \frac{1}{4}c^2}{\frac{4}{9}s_a s_c}$ $\frac{\frac{2}{9}b^2 + \frac{2}{9}c^2 - \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{18}a^2 + \frac{1}{18}b^2 - \frac{1}{36}c^2 - \frac{1}{4}c^2}{\frac{4}{9}s_a s_c}$ $\frac{-\frac{1}{18}a^2 + \frac{5}{18}b^2 - \frac{1}{18}c^2}{\frac{4}{9}s_a s_c}$ $\cos \angle ASM_c = \frac{-a^2 + 5b^2 - c^2}{8s_a s_c}$	$\left(\frac{2}{3}s_a\right)^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + \left(\frac{1}{3}s_c\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}c\right) \cdot \left(\frac{1}{3}s_c\right) \cos y$ $2 \cdot \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{3}s_c \cos y = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + \left(\frac{1}{3}s_c\right)^2 - \left(\frac{2}{3}s_a\right)^2$ $\frac{1}{3}c s_c \cos x = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{9}s_c^2 - \frac{4}{9}s_a^2$ $\cos \angle AM_c S = \frac{\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{9}s_c^2 - \frac{4}{9}s_a^2}{\frac{1}{3}c s_c}$ $\frac{\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} (2(a^2 + b^2) - c^2) - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} (2(b^2 + c^2) - a^2)}{\frac{1}{3}c s_c}$ $\frac{\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{18}a^2 + \frac{1}{18}b^2 - \frac{1}{36}c^2 - \frac{2}{9}b^2 - \frac{2}{9}c^2 + \frac{1}{9}a^2}{\frac{1}{3}c s_c}$ $\frac{\frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{6}b^2}{\frac{1}{3}s_c c}$ $\frac{a^2 - b^2}{2c s_c}$

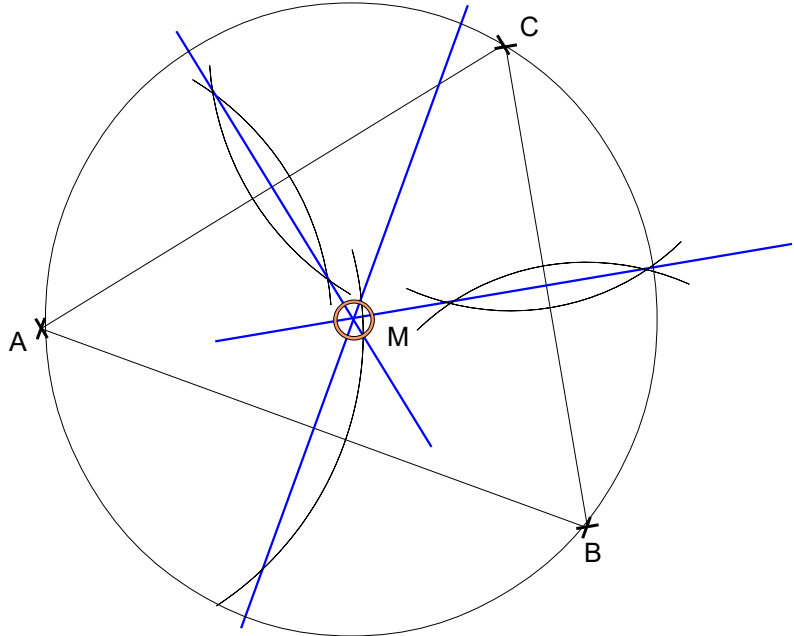
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele									
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Seitenhalbierenden</i>	Das Außendreieck a) Die Seiten der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und ABC sind paarweise parallel b) Die Winkel dieser Dreiecke paarweise gleich groß, und die Dreiecke zueinander ähnlich. c) A, B und C sind die Seitenmittelpunkte des Dreiecks $A_1B_1C_1$, und haben mit den entsprechenden Seiten des Dreiecks ABC das Verhältnis 1:2. d) Die - Höhen - des Dreiecks ABC sind die - Mittelsenkrechten - des Dreiecks $A_1B_1C_1$ e) Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC : $H_{ABC} =$ der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $A_1B_1C_1$: $U_{A_1B_1C_1}$ f) Die Seitenhalbierenden von ABC sind die Seitenhalbierenden von $A_1B_1C_1$ g) Beide Dreiecke besitzen den gleichen Schwerpunkt $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1}$ h) Die Seitenhalbierenden von $A_1B_1C_1$ und ABC teilen sich ebenfalls im Verhältnis 2 : 1. i) Da der Umkreismittelpunkt von $A_1B_1C_1$ und der Höhenschnittpunkt von ABC zusammenfallen und die Schwerpunkte beider Dreiecke ebenfalls zusammenfallen, müssen beide Dreiecke die gleiche Eulersche gerade besitzen, da für jedes Dreieck diese Punkte auf der Eulerschen Geraden liegen müssen. Bei jeder Eulerschen geraden teilt der Punkt S die Strecke HU im Verhältnis 2/1. Das gilt auch für das Außendreieck. $\overline{HS} = 2 \overline{SU}$ Rechts sind die jeweiligen Streckenlängen in Bezug auf das Ausgangsdreieck ABC angegeben.	 Eulersche Gerade in der Vergrößerung: <u>Dreieck $A_1B_1C_1$</u> <table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>U</td> <td>S</td> <td>H</td> </tr> <tr> <td>$\frac{1}{3} HU = \frac{2}{3} HU_{ABC}$</td> <td>$\frac{2}{3} HU = \frac{4}{3} HU_{ABC}$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>H</td> <td>$\frac{2}{3} HU$</td> <td>$S \quad \frac{1}{3} HU \quad U$</td> </tr> </table> <u>Dreieck ABC</u>	U	S	H	$\frac{1}{3} HU = \frac{2}{3} HU_{ABC}$	$\frac{2}{3} HU = \frac{4}{3} HU_{ABC}$		H	$\frac{2}{3} HU$	$S \quad \frac{1}{3} HU \quad U$
U	S	H									
$\frac{1}{3} HU = \frac{2}{3} HU_{ABC}$	$\frac{2}{3} HU = \frac{4}{3} HU_{ABC}$										
H	$\frac{2}{3} HU$	$S \quad \frac{1}{3} HU \quad U$									

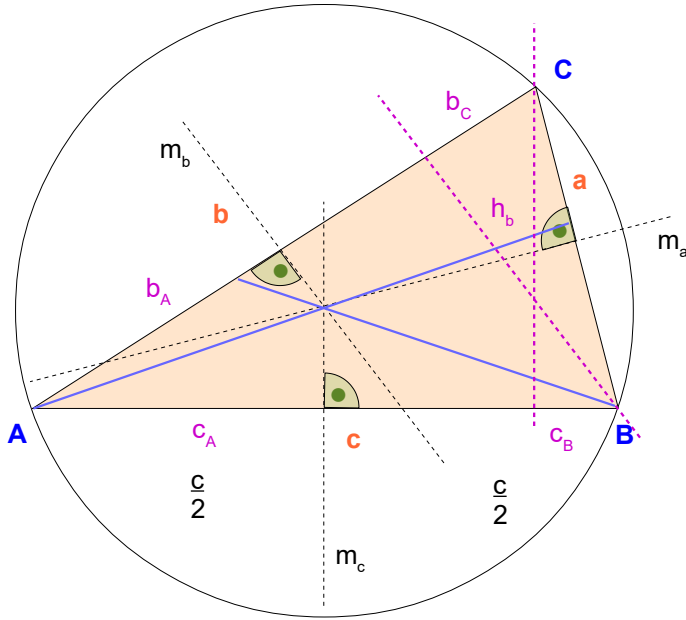
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Seitenhalbierenden</i>	Eigenschaft des Mittendreiecks a) $M_b M_a \parallel AB$ b) $M_b M_a = \frac{1}{2} AB$, entsprechend für $M_b M_c$ und für $M_a M_c$. c) Die vier Dreiecke $AM_c M_b$, $M_c B M_a$, $M_b M_a C$ und $M_a M_b M_c$ sind zueinander kongruent. d) Die zentrische Streckung mit Zentrum S und Streckungsfaktor -0,5 bildet das Dreieck ABC auf das Dreieck $M_a M_b M_c$ ab e) $AM_c M_a M_b$ ist ein Parallelogramm f) Die Seitenhalbierenden des Dreiecks $M_a M_b M_c$ liegen auf den Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC, damit haben beide Dreiecke den selben Schwerpunkt: $S_{ABC} = S_{M_a M_b M_c}$ g) Die Höhen des Dreiecks $M_a M_b M_c$ sind die Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks ABC (rot gestichelte Linien). Der Höhenschnittpunkt des Mittendreiecks ist der Umkreismittelpunkt des Ausgangsdreiecks $H_{M_a M_b M_c} = U_{ABC}$ h) Das Dreieck ABC ist das Außendreieck des Dreiecks $M_a M_b M_c$. i) Der Umkreismittelpunkt des Mittendreiecks liegt in der Mitte zwischen dem Umkreismittelpunkt des Ausgangsdreiecks und dem Höhenschnittpunkt des Ausgangsdreiecks. Eulersche Gerade in der Vergrößerung: Dreieck $M_a M_b M_c$ 	

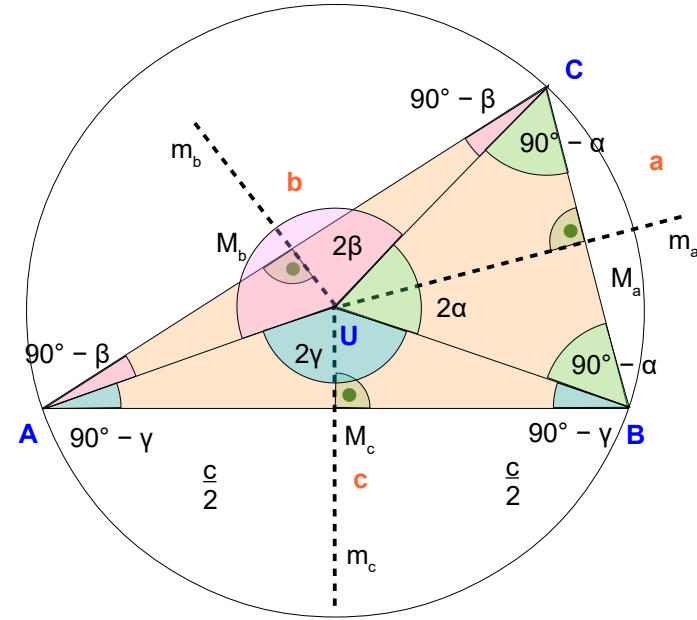
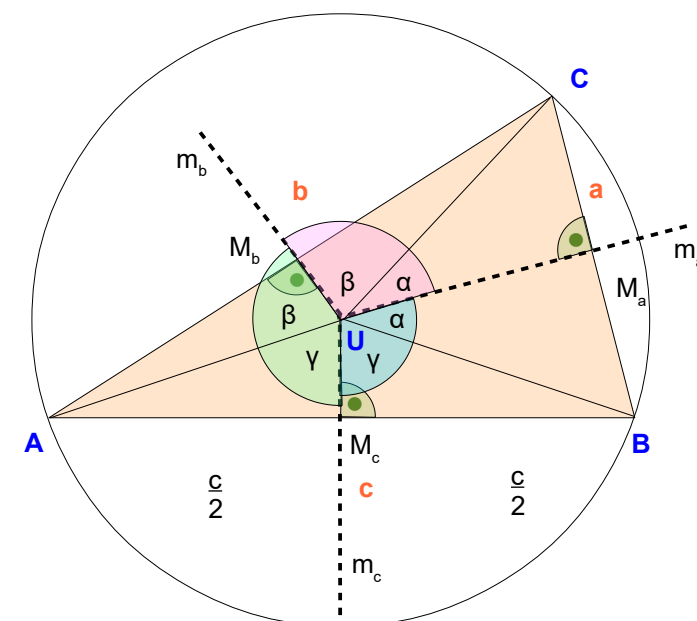
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Mittelsenkrechten</i>	● Die Mittelsenkrechten	
	★ Konstruktion Die Konstruktion der Mittelsenkrechten erfolgt nach den gleichen Schritten, wie sie weiter vor in den Grundkonstruktionen angegeben sind: ● Man konstruiert sie, indem man zwei sich schneidende Kreise mit gleichem Radius um jeweils zwei Eckpunkte zieht. ● Die Mittelsenkrechte verläuft durch die Schnittpunkte der beiden Kreise. ● Der Mittelpunkt der Dreiecksseite ist ihr Schnittpunkt mit der Mittelsenkrechten. ● Die Mittelsenkrechten verlaufen im allgemeinen nicht durch den gegenüberliegenden Eckpunkt	
	★ Der Schnittpunkt Die Mittelsenkrechten stehen senkrecht auf einer Dreiecksseite, gehen aber nicht notwendig durch den gegenüberliegenden Eckpunkt. Das ist nur bei gleichschenkligen Dreiecken der Fall. ◆ Die Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt. ◆ Dieser Schnittpunkt kann innerhalb (spitzwinklig), außerhalb (stumpfwinklig) des Dreiecks oder auf dem Mittelpunkt einer Dreiecksseite (rechtwinkliges Dreieck, Thaleskreis) liegen. ◆ Der Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Umkreises für das Dreieck. (Der Umkreis geht durch alle drei Eckpunkte.) $R_u = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma} = \frac{a b c}{4 F} = \frac{b}{2 \cos \left(\frac{\alpha - \beta - \gamma}{2} \right)}$	

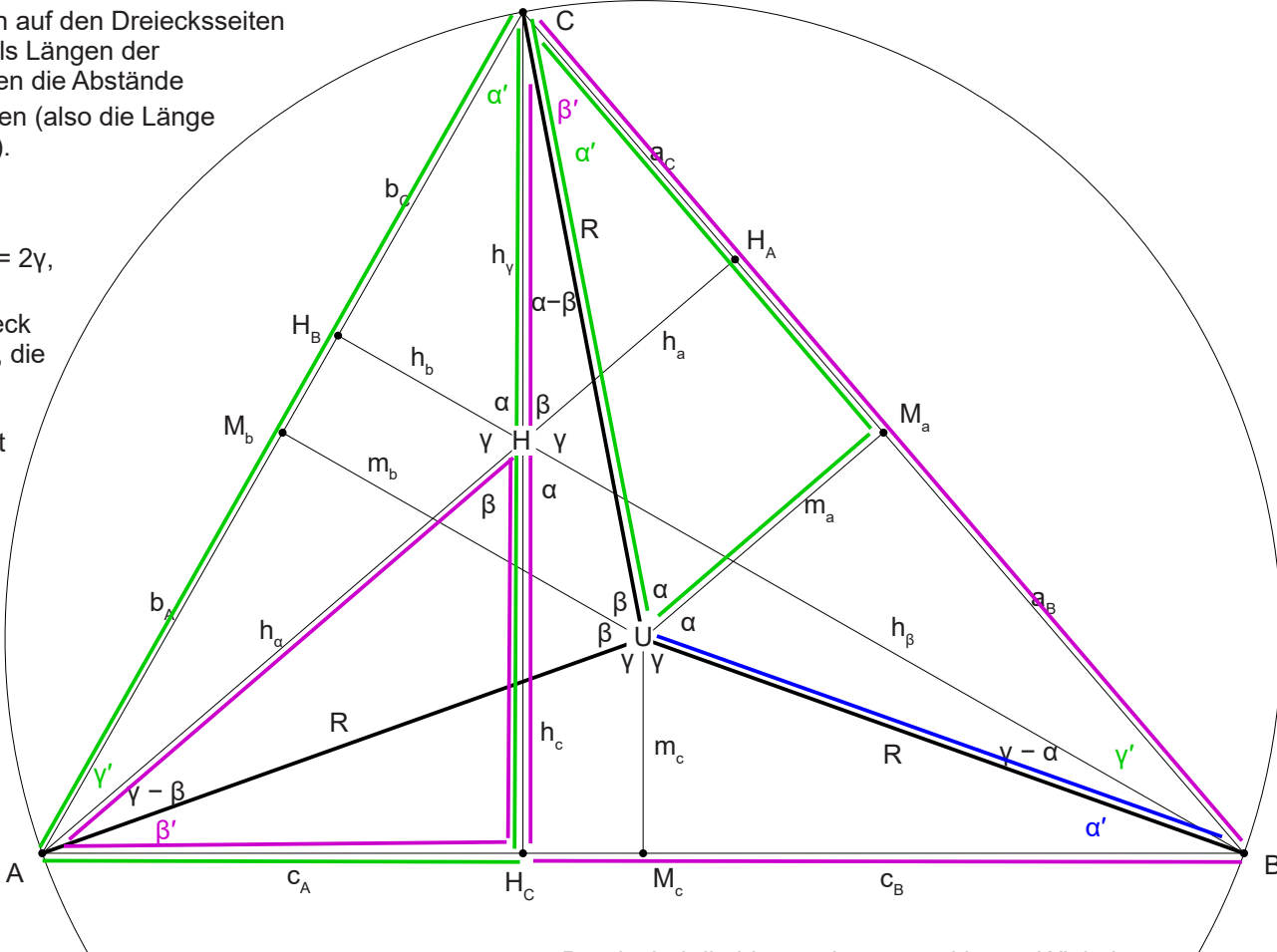
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Mittelsenkrechten</i>	★ Länge der Mittelsenkrechten Nach dem Pythagoras gilt für die Mittelsenkrechte m_b : $m_b^2 = R^2 - (b/2)^2$ Die Berechnung von R auf der vorhergehenden Seite $R = \frac{a b c}{4 F}$ führt zur Gleichung $m_b^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{16 F^2} - \frac{b^2}{4}$ beide Brüche auf Hauptnenner bringen: $m_b^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{16 F^2} - \frac{4 F^2 b^2}{16 F^2}$ ausklammern $m_b^2 = \frac{b^2}{16 F^2} (a^2 c^2 - 4 F^2)$ Wurzel ziehen $m_b = \frac{b}{4 F} \sqrt{a^2 c^2 - 4 F^2}$ $m_a = \frac{a}{4 F} \sqrt{b^2 c^2 - 4 F^2} = \frac{a^2 (c^2 + b^2 - a^2)}{16 F^2} \quad h_A = \frac{c c_A}{2 h_A} = \frac{b b_A}{2 h_A}$ $m_b = \frac{b}{4 F} \sqrt{a^2 c^2 - 4 F^2} = \frac{b^2 (c^2 + a^2 - b^2)}{16 F^2} \quad h_B = \frac{a a_B}{2 h_B} = \frac{c c_B}{2 h_B}$ $m_c = \frac{c}{4 F} \sqrt{a^2 b^2 - 4 F^2} = \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{16 F^2} \quad h_C = \frac{b b_C}{2 h_C} = \frac{a a_C}{2 h_C}$	 $2F = a h_A$ $2F = b h_B$ $2F = c h_C$

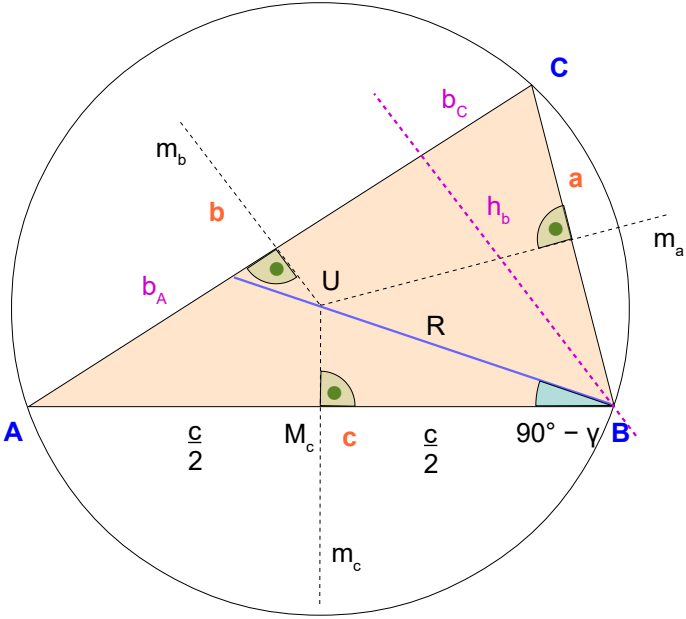
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Mittelsenkrechten</i>	★ Winkel der Mittelsenkrechten Winkel zwischen Eckpunkten und Umkreismittelpunkt $\begin{aligned} \angle BUC &= 2\alpha & \angle BCU &= \angle CBU = 90^\circ - \alpha \\ \angle CUA &= 2\beta & \angle CAU &= \angle ACU = 90^\circ - \beta \\ \angle AUB &= 2\gamma & \angle ABU &= \angle BAU = 90^\circ - \gamma \end{aligned}$ Winkel zwischen Seitenmittelpunkten und Umkreismittelpunkt $\begin{aligned} \angle M_a U M_b &= \alpha + \beta & \angle BUM_a &= \angle CUM_a = \alpha \\ \angle M_b U M_c &= \beta + \gamma & \angle CUM_b &= \angle AUM_b = \beta \\ \angle M_c U M_a &= \gamma + \alpha & \angle AUM_c &= \angle BUM_c = \gamma \end{aligned}$ Seitenlängen und Umkreisradius $\begin{aligned} \frac{a}{2} &= R \sin(\alpha) & a &= 2 R \sin(\alpha) \\ \frac{b}{2} &= R \sin(\beta) & b &= 2 R \sin(\beta) \\ \frac{c}{2} &= R \sin(\gamma) & c &= 2 R \sin(\gamma) \end{aligned}$	 

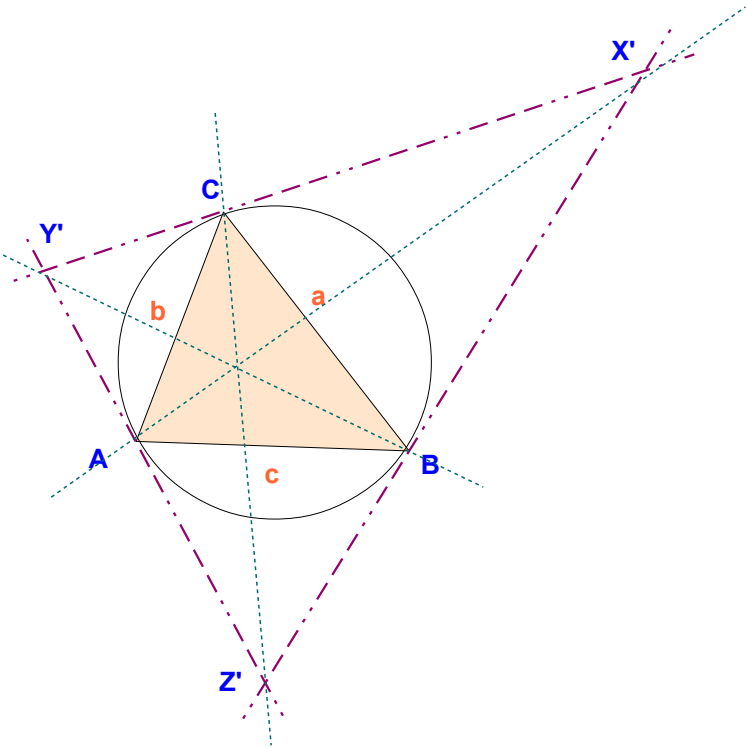
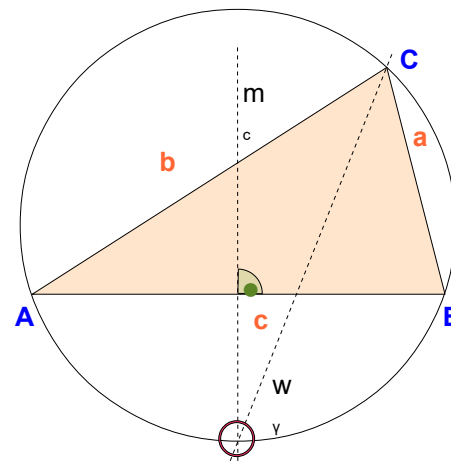
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Mittelsenkrechten</i>	Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf den Dreiecksseiten ist der Mittelpunkt des Umkreises U. Als Längen der Mittelsenkrechten m_a, m_b und m_c zählen die Abstände zwischen Umkreismittelpunkt und Seiten (also die Länge des Lotes vom Punkt U auf die Seiten). Wegen $\sphericalangle ACB = \gamma$ folgt aus dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz $\sphericalangle AUB = 2\gamma$, also $\sphericalangle AUM_c = \gamma$. (blaue Linien) Da $\triangle CUB$ ein gleichschenkliges Dreieck ist, ist m_a die Mittelsenkrechte von a, die Seitenhalbierende und die Winkelhalbierende von CUB. Die Basiswinkel in C und B sind damit jeweils α'. Analog folgen die Größen der anderen Winkel mit Scheitelpunkt U. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle UM_aC \sim \triangle AH_cC$ (rechtwinklige Dreiecke mit gemeinsamem Winkel α, grüne Linien) folgt $\frac{m_a}{\frac{a}{2}} = \frac{c_A}{h_c}$ Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle AH_cH \sim \triangle CH_cB$ (rechtwinklige Dreiecke mit gemeinsamem Winkel β, pinke Linien) folgt $\frac{c_A}{h_a} = \frac{h_c}{a} \Rightarrow \frac{c_A}{h_c} = \frac{h_a}{a}$ $\frac{m_a}{\frac{a}{2}} = \frac{h_a}{a} \Rightarrow m_a = \frac{1}{2} h_a$	 Damit sind die blau und grün markierten Winkel ebenfalls gesichert. Zu klären sind die Winkel zwischen den Höhen und den Verbindungen zwischen U und den Eckpunkten. Dazu soll im Eckpunkt C das rechtwinklige Dreieck $\triangle HCH_A$ betrachtet werden und dort der Winkel im Punkt C. $\begin{aligned} x + \alpha' + \beta &= 90 \\ x + 90 - \alpha + \beta &= 90 \\ x &= \alpha - \beta \end{aligned}$

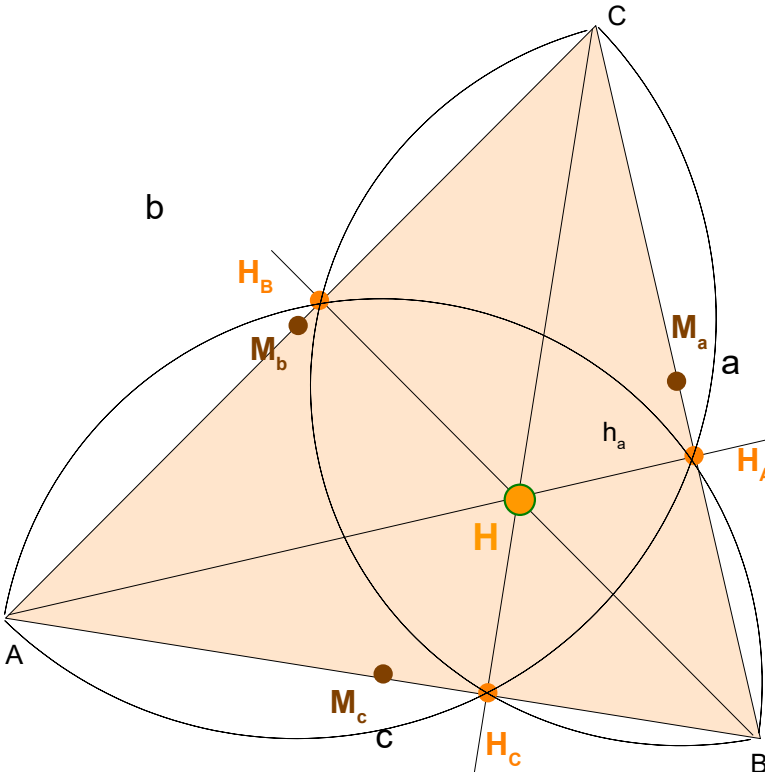
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Mittelsenkrechten</i>	Ebenfalls aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle UM_aC \sim \triangle AH_cC$ folgt $\frac{R}{\frac{a}{2}} = \frac{b}{h_c}$ Setzt man für h_c den Wert aus $2F = c h_c$ ein, erhält man die Länge des Umkreisradius' $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4F}$	
	★ Umkreisradius und Höhe Höhe auf b : $h_b = c \sin \alpha$ Dreieck B U M_c : $\frac{c}{2} = R \cos(90 - \gamma) = R (\cos(90) \cos(\gamma) + \sin(90) \sin(\gamma))$ (Additionstheorem des cos) da $\cos(90) = 0$ und $\sin(90) = 1$ $= R \sin(\gamma)$ $c = 2 R \sin(\gamma)$ folgt daraus $h_b = 2R \sin \gamma \sin \alpha$ $h_a = 2R \sin \beta \sin \gamma = \frac{2F}{a} = \frac{a}{\cot \beta + \cot \gamma}$ $h_b = 2R \sin \gamma \sin \alpha = \frac{2F}{b} = \frac{b}{\cot \gamma + \cot \alpha}$ $h_c = 2R \sin \alpha \sin \beta = \frac{2F}{c} = \frac{c}{\cot \alpha + \cot \beta}$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

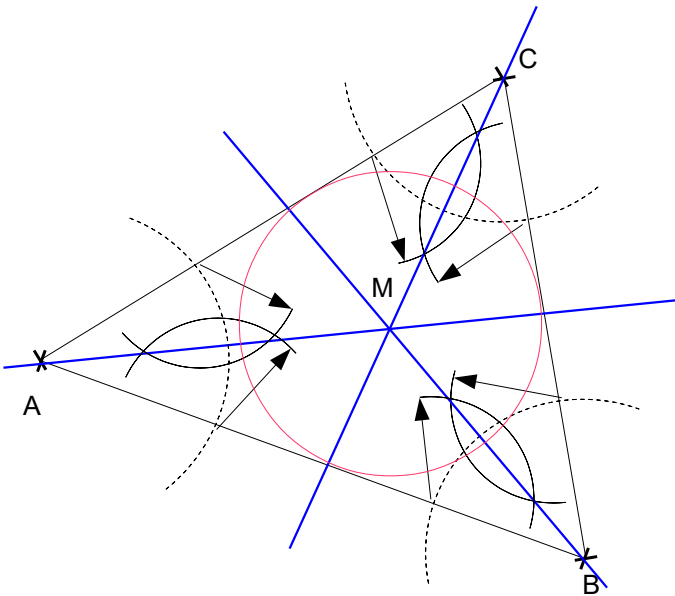
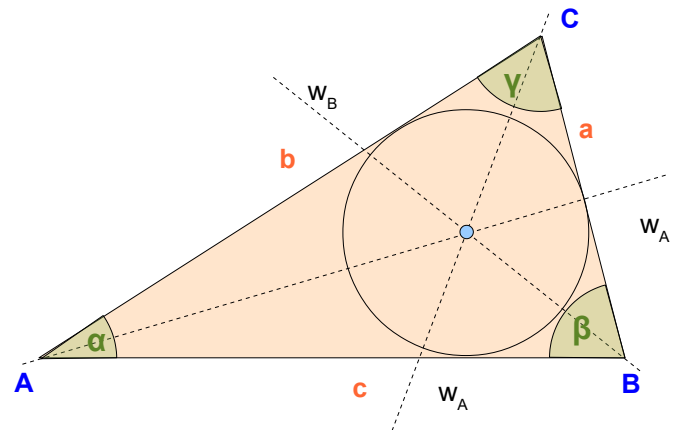
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Mittelsenkrechten</i>	Betrachten wir den Umkreis des Dreiecks ABC und die Tangenten an diesen Umkreis in den Ecken A, B und C. Die Tangenten in B und in C schneiden sich in X'; die Tangenten in C und in A schneiden sich in Y'; die Tangenten in A und in B schneiden sich in Z'. Das somit erhaltene Dreieck $X'Y'Z'$ heißt Tangentendreieck des Dreiecks ABC. Eine Eigenschaft, die wir sofort sehen, ist, daß der Umkreis des Dreiecks ABC der Inkreis des Tangentendreiecks $X'Y'Z'$ ist; es ist aber Vorsicht angeraten, denn dies gilt nur für spitzwinklige Dreiecke ABC. Für rechtwinklige Dreiecke ABC existiert das Tangentendreieck "nicht ganz" (zwei Tangenten sind parallel), und für stumpfwinklige Dreiecke ABC ist der Umkreis des $\triangle ABC$ ein Ankreis des Tangentendreiecks. Ist $\triangle X'Y'Z'$ das Tangentendreieck eines spitzwinkligen Dreiecks ABC, dann schneiden sich die Geraden AX', BY' und CZ' in einem Punkt, und zwar im Gergonnepunkt des Dreiecks $\triangle X'Y'Z'$ Die Verbindungslinien eines Eckpunktes mit dem gegenüberliegenden Berührungspunkt des Inkreises schneiden sich in einem Punkt, dem Gernonnepunkt G. Der Außenkreis des Dreiecks ABC ist gleichzeitig der Innenkreis des Dreiecks $X'Y'Z'$. Südpolsatz In einem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechte und die Winkelhalbierende durch die gegenüberliegende Ecke auf dem Umkreis	 Das Diagramm zeigt ein Dreieck ABC mit den Ecken A, B und C. Ein Kreis (Umkreis) ist durch die Ecken gezogen. Von jeder Ecke wird eine Tangente an den Kreis gezogen: von A über B hinaus, von B über C hinaus und von C über A hinaus. Diese Tangenten schneiden sich in den Punkten X' (Schnitt von B-Tangente und C-Tangente), Y' (Schnitt von C-Tangente und A-Tangente) und Z' (Schnitt von A-Tangente und B-Tangente). Das resultierende Dreieck X'Y'Z' ist das Tangentendreieck. Die Seiten des Dreiecks ABC sind mit a, b und c beschriftet.  Das Diagramm zeigt ein Dreieck ABC mit dem Umkreis. Die Mittelsenkrechte m von A nach zur Seite BC und die Winkelhalbierende w von A nach zum gegenüberliegenden Eckpunkt B sind eingezeichnet. Der Schnittpunkt dieser beiden Linien liegt auf dem Umkreis. Ein weiterer Punkt v ist ebenfalls auf dem Umkreis markiert.

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

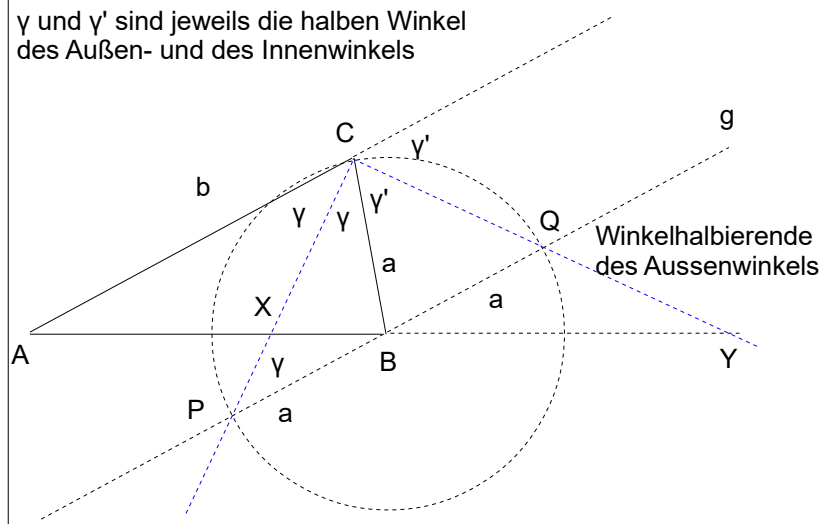
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Mittelsenkrechten</i>	★ Halbkreise über die Seitenmittelpunkte Zeichnet man um jeden Seitenmittelpunkt einen Halbkreis mit dem Radius der halben Seitenlänge, dann liegen die an der Seite anliegenden Eckpunkte auf diesem Kreis. Außerdem liegen die Schnittpunkte der beiden anderen Dreieckshöhen mit den jeweiligen Dreiecksseiten auf diesem Kreis..	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

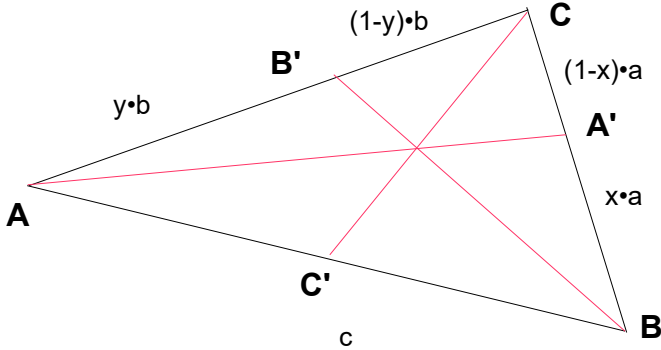
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Mittelsenkrechten</i>	☆ Spiegelung von U an den Dreieckseiten a) Die Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC gehen durch die Spiegelungspunkte A_U B_U C_U b) Die Mittelsenkrechten von ABC sind die Höhen von $A_U B_U C_U$. c) Damit ist U der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_U B_U C_U$. d) Die Mittelpunkte der Höhen im Dreieck $A_U B_U C_U$ sind die Seitenmittelpunkte des Dreiecks ABC und damit die Eckpunkte des Mittendreiecks.	The diagram illustrates the relationship between a triangle ABC and its reflection across its medians. Triangle ABC is shown with vertices A, B, and C. Its medians intersect at point U. The medians are extended to form a larger triangle $A_U B_U C_U$, where A_U, B_U, and C_U are the reflections of U across the sides BC, AC, and AB respectively. The medians of ABC are the altitudes of $A_U B_U C_U$. The midpoints of the sides of ABC are the vertices of the medial triangle (Mittendreieck) $M_a M_b M_c$.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Winkelhalbierenden</i>	● Die Winkelhalbierenden	
	★ Konstruktion Die Konstruktion der Winkelhalbierenden erfolgt nach den gleichen Schritten, wie sie weiter vor in den Grundkonstruktionen angegeben sind: - Man konstruiert die Winkelhalbierende, indem man um den Eckpunkt des Dreiecks einen Kreis zieht, der beide Schenkel schneidet. - Die gesuchte Winkelhalbierende ist die Mittelsenkrechte zwischen den beiden Schnittpunkten auf den Dreiecksseiten. - Man macht sich hier zu Nutze, dass bei einem Drachenviereck die eine Diagonale gleichzeitig auch die Winkelhalbierende ist. Die Verbindung der beiden Schnittpunkte auf den Dreiecksseiten ist die andere Diagonale des Drachenvierecks.	
	★ Der Schnittpunkt Eine Winkelhalbierende ist eine Gerade, die durch einen Eckpunkt des Dreiecks geht und den Winkel im Eckpunkt halbiert. Diese Gerade steht weder senkrecht auf der gegenüberliegenden Seite, noch halbiert sie die gegenüberliegende Dreiecksseite. Jeder Punkt auf der Winkelhalbierenden ist Mittelpunkt eines Kreises, der die Schenkel des Winkels berührt. ◆ Die Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt im Inneren des Dreiecks. ◆ Dieser Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Inkreises. (Der Inkreis berührt alle drei Seiten des Dreiecks von innen.)	
		

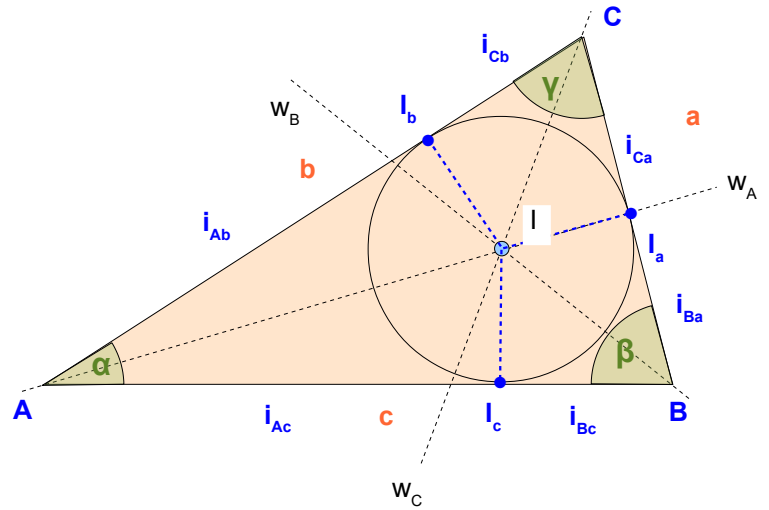
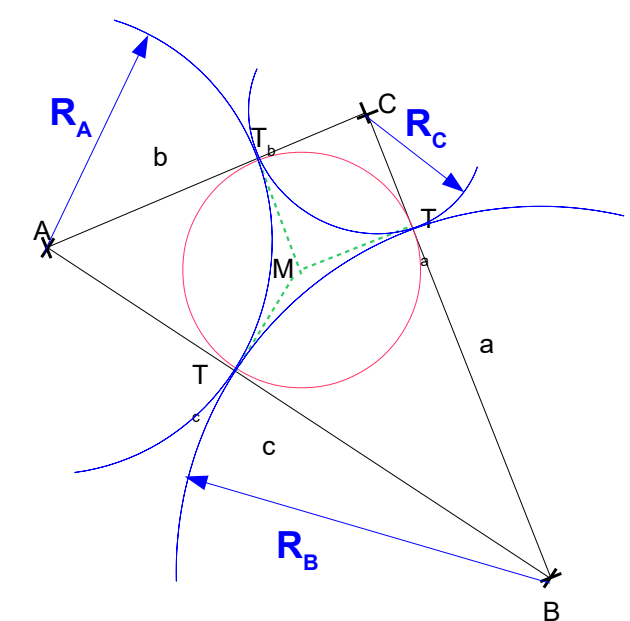
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Winkelhalbierenden</i>	★ Satz über die Winkelhalbierenden In einem Dreieck teilen die Winkelhalbierenden eines Innenwinkels und des zugehörigen Außenwinkels die Gegenseite harmonisch im Verhältnis der anliegenden Seiten. Beweis: • gegeben ist ein ΔABC mit den Seiten AB, AC, BC. • Es werden die Winkelhalbierenden des Innen- und Außenwinkels konstruiert. (blaue Linien) • Um B wird ein Kreis geschlagen mit dem Radius der Seitenlänge a • Eine Gerade g durch den Punkt B verläuft parallel zur Seite b • der Kreis schneidet die Gerade in den Punkten P und Q Betrachtet man im Eckpunkt C die beiden Seiten a und b, sowie die Winkelhalbierende des Innenwinkels, so entstehen drei Strahlen, die von der Seite c geschnitten werden. nach dem 2. Strahlensatz folgt daraus $\frac{b}{a} = \frac{XA}{XB} \quad \text{und für den Außenwinkel} \quad \frac{b}{a} = \frac{YA}{YB} \quad \text{oder} \quad \frac{YA}{YB} = \frac{XA}{XB}$ $\frac{b}{a} = \frac{XA}{XB} \quad \text{Bedeutet, dass das Verhältnis der durch die Winkelhalbierende geteilten Seite c das Verhältnis der anliegenden Seiten hat.}$	γ und γ' sind jeweils die halben Winkel des Außen- und des Innenwinkels  Winkelhalbierende des Aussenwinkels Winkelhalbierende des Innenwinkels

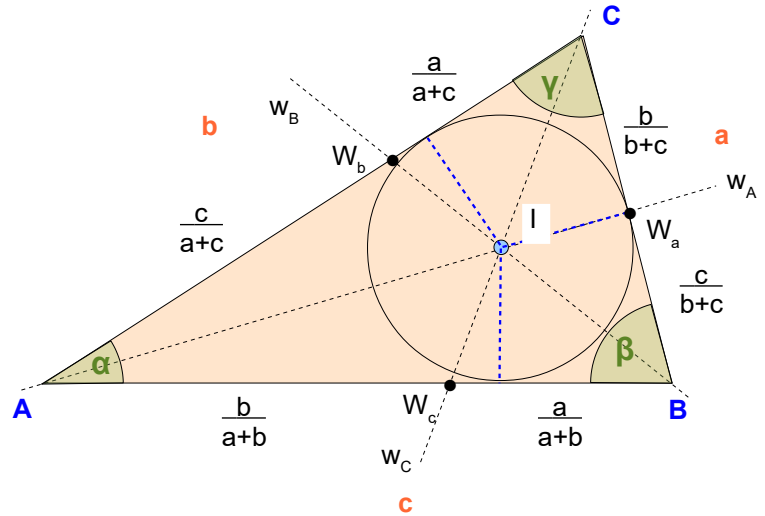
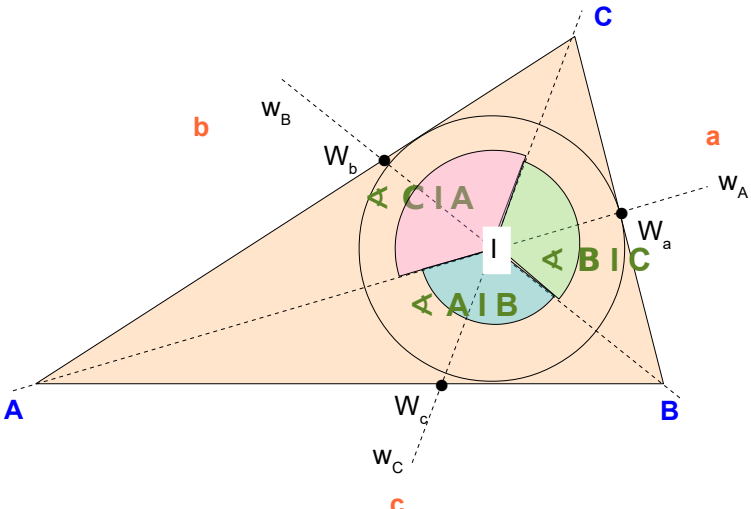
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Winkelhalbierenden</i>	★ Länge der Winkelhalbierenden Winkelhalbierende teilen die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten. $\frac{b}{c} = \frac{(1-x)a}{xa} \qquad \frac{a}{c} = \frac{(1-y)b}{yb}$ $xab = ac - xac \qquad yab = bc - ybc$ $xab + xac = ac \qquad yab + ybc = bc$ $xa(b+c) = ac \qquad yb(a+c) = bc$ $x = \frac{c}{b+c} \qquad y = \frac{c}{a+c}$ $w_A = \sqrt{(a^2x^2 + (b^2 - c^2 - a^2)x + c^2)} \qquad w_B = \sqrt{(b^2y^2 + (a^2 - c^2 - b^2)y + c^2)}$ Betrachtung des Wurzelausdruckes, indem für x der oben errechnete Wert eingesetzt wurde, der Hauptnenner gebildet und im Nenner die Quadratwurzel gezogen und das Ergebnis vor die Wurzel geschrieben wurde: $w_A = \frac{1}{b+c} \sqrt{(a^2c^2 + (b^2 - c^2 - a^2)c(b+c) + c^2(b+c)^2)}$ $(a^2c^2 + (cb^2 - c^3 - ca^2)(b+c) + c^2(b^2 + 2bc + c^2))$ $(a^2c^2 + cb^3 - bc^3 - cba^2 + c^2b^2 - c^4 - c^2a^2 + c^2b^2 + 2bc^3 + c^4)$ $\swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow$ $cb(b^2 + c^2 + 2cb - a^2)$ 1. Binomische Formel für b und c $cb((b+c)^2 - a^2)$ 3. Binomische Formel für $(b+c)^2 - a^2$ $cb((b+c) + a)((b+c) - a)$ $= cb(a+b+c)(a+b+c-2a)$ $= cb(2s)(2s-2a)$ $= 4cb s(s-a)$ $w_A = \frac{1}{b+c} \sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)} = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcs(s-a)}$ $w_B = \frac{1}{a+c} \sqrt{ca((a+c)^2 - b^2)} = \frac{2}{a+c} \sqrt{acs(s-b)}$ $w_C = \frac{1}{a+b} \sqrt{ab((a+b)^2 - c^2)} = \frac{2}{a+b} \sqrt{abs(s-c)}$	 Für die Längen der Winkelhalbierenden w_A, w_B, w_C gilt: $w_A = \frac{1}{b+c} \sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]} = \frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b+c} = \frac{2A}{a \cos \frac{\beta-\gamma}{2}}$ $w_B = \frac{1}{a+c} \sqrt{ac[(a+c)^2 - b^2]} = \frac{2ac \cos \frac{\beta}{2}}{a+c} = \frac{2A}{b \cos \frac{\gamma-\alpha}{2}}$ $w_C = \frac{1}{a+b} \sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]} = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b} = \frac{2A}{c \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}$

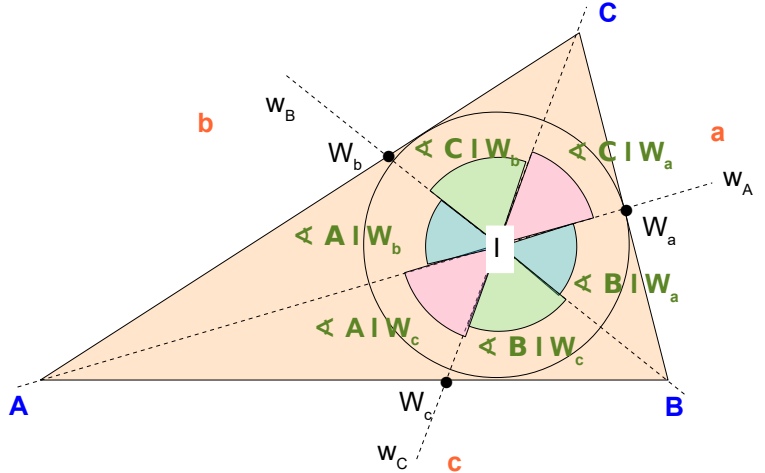
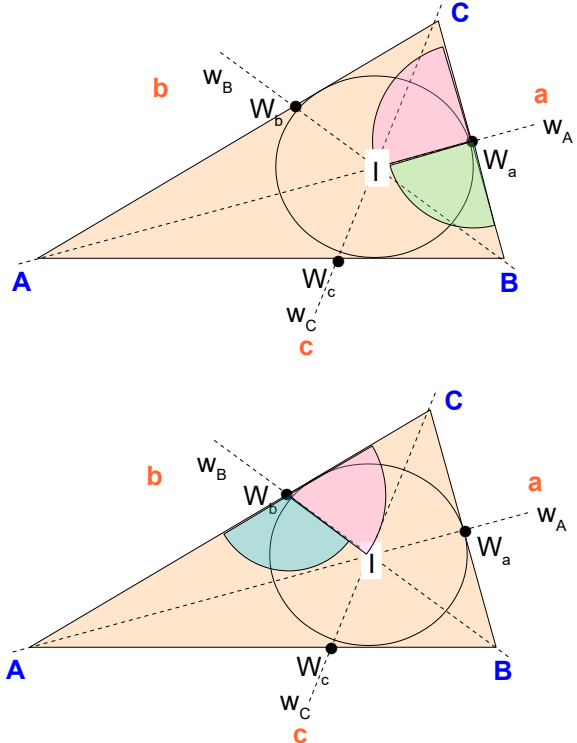
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Winkelhalbierenden</i>	★ Länge der Seitenabschnitte Eckpunkt – Berührungspunkt Die Längen der Abschnitte, in die die Berührungspunkte des Inkreises die Dreiecksseiten teilen, lassen sich leicht bestimmen. Es seien $i_{Ac} = i_{Ab} = x, \quad i_{Ba} = i_{Bc} = y, \quad i_{Cb} = i_{Ca} = z$ (die Gleichheiten folgen aus dem Tangentenabschnittssatz). Dann gilt $x + y = c, \quad y + z = a, \quad z + x = b.$ Die Lösung dieses Gleichungssystems ist $\begin{aligned} x \quad i_{Ac} = i_{Ab} &= \frac{1}{2}(b + c - a) = s - a \\ y \quad i_{Ba} = i_{Bc} &= \frac{1}{2}(c + a - b) = s - b \\ z \quad i_{Cb} = i_{Ca} &= \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c \end{aligned}$ Die hier eingezeichneten blauen Kreise sind nicht mit den Außenwinkelkreisen zu verwechseln. Es handelt sich hier um Kreise, deren Mittelpunkt jeweils ein Eckpunkt ist und der Radius bis zum Berührungspunkt des Inkreises reicht. Die drei Kreise berühren sich paarweise in den Berührungspunkten des Inkreises. Der Radius dieser Kreise entspricht natürlich genau den vorher berechneten Abstandsgrößen zwischen dem Eckpunkt und dem Berührungspunkt T_x $AT_c = AT_b = R_A = s - a$ $BT_c = BT_a = R_b = s - b$ $CT_b = CT_a = R_c = s - c$	 Tangentenabschnittssatz: Zwei Tangenten, die von einem Punkt aus einen Kreis berühren haben vom Punkt bis zu den Berührungspunkten die gleiche Länge. 

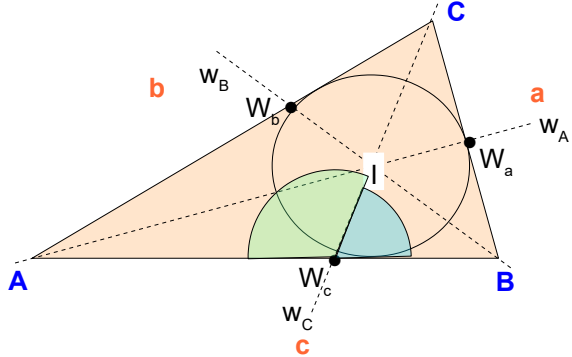
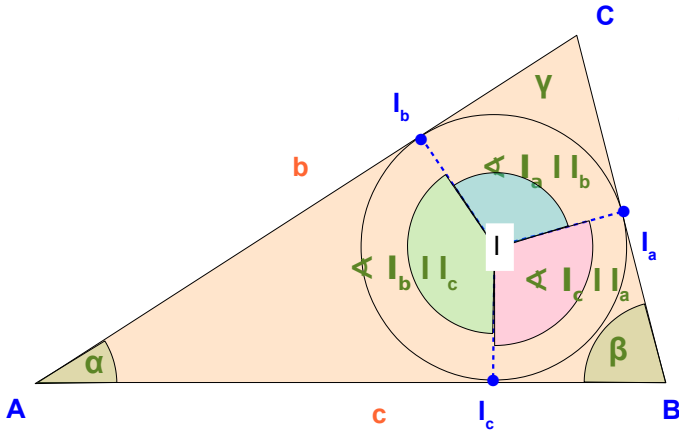
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Winkelhalbierenden</i>	★ Länge der Seitenabschnitte Eckpunkt – Seitenschnittpunkt Winkelhalbierende Es sollen jetzt die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Dreiecksseiten untersucht werden. Auch hier handelt es sich wieder um Eck – Seiten – Transversalen. Gesucht sind die Seitenabschnitte zwischen den Eckpunkten des Dreiecks und den Schnittpunkten der Winkelhalbierenden. Es wurde bereits gezeigt: In einem Dreieck teilen die Winkelhalbierenden eines Innenwinkels und des zugehörigen Außenwinkels die Gegenseite harmonisch im Verhältnis der anliegenden Seiten. $\frac{AW_b}{CW_b} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{AW_b}{c} = \frac{CW_b}{a} = k \quad \begin{matrix} AW_b = k c \\ CW_b = k a \end{matrix}$ außerdem muss $kc + ka = 1$ ergeben. Deshalb ist $k = \frac{1}{a+c}$ $\begin{matrix} AW_b = \frac{c}{a+c} b & AW_c = \frac{b}{a+b} c & BW_a = \frac{c}{b+c} a \\ CW_b = \frac{a}{a+c} b & BW_c = \frac{a}{a+b} c & CW_a = \frac{b}{b+c} a \end{matrix}$	 Teilung der Seiten durch die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den gegenüberliegenden Seiten. Die Streckenlänge ergibt sich dann jeweils aus der Multiplikation mit der Seitenlänge.
	★ Winkel am Inkreismittelpunkt $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ $\angle CIA = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$ $\angle AIB = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Winkelhalbierenden</i>	$\sphericalangle CIW_b = \sphericalangle BIW_c = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2}$ $\sphericalangle AIW_c = \sphericalangle CIW_a = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma + \alpha}{2}$ $\sphericalangle BIW_a = \sphericalangle AIW_b = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$	
	★ Winkel an den Schnittpunkten mit den Seiten $\sphericalangle AW_aB = \gamma + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\beta - \gamma}{2}$ $\sphericalangle AW_aC = \beta + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\beta - \gamma}{2}$ $\sphericalangle BW_bC = \alpha + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma - \alpha}{2}$ $\sphericalangle BW_bA = \gamma + \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma - \alpha}{2}$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Winkelhalbierenden</i>	$\sphericalangle C W_c A = \beta + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sphericalangle C W_c B = \alpha + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2}$	
	★ Winkel an den Berührungspunkten $\sphericalangle I_b I_c = 180^\circ - \alpha = \beta + \gamma$ $\sphericalangle I_c I_a = 180^\circ - \beta = \gamma + \alpha$ $\sphericalangle I_a I_b = 180^\circ - \gamma = \alpha + \beta$	

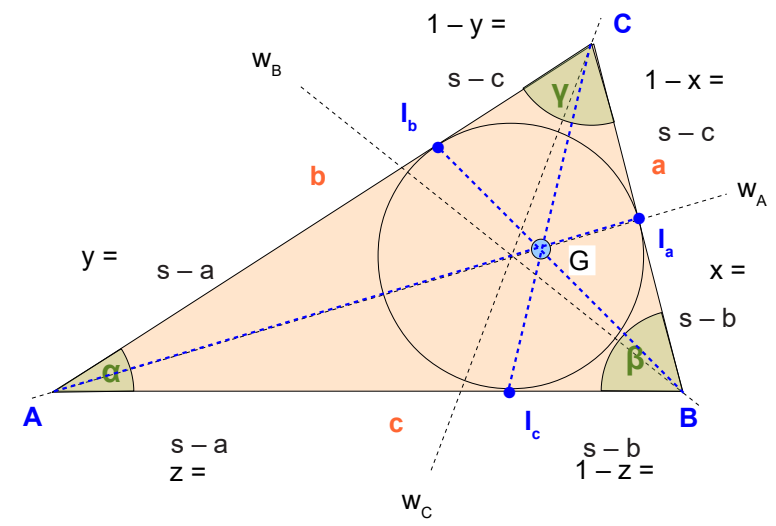
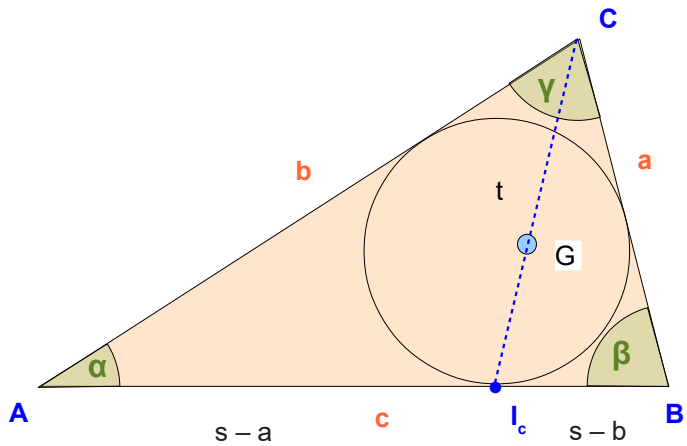
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Winkelhalbierenden</i>	★ Teilung der Winkelhalbierenden Die für die Teilungsverhältnisse von Transversalen bereits vorher bewiesenen Formeln (siehe dieses Dokument weiter vorn) $p = \frac{y}{x+y-xy} \quad \text{bzw.} \quad q = \frac{x}{x+y-xy}$ Für die oben angegebenen Werte für x und y: $x = \frac{c}{b+c} \quad y = \frac{c}{a+c}$ ergeben sich für s und t: $p_1 = \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{b+c}{2s} \quad q_1 = \frac{a+c}{a+b+c} = \frac{a+c}{2s}$ Länge der Winkelhalbierenden (Berechnung weiter vorn): $w_A = \frac{1}{b+c} \sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)} = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcs(s-a)}$ multipliziert mit dem Teilungsfaktor $\frac{b+c}{2s}$ $\frac{1}{a+b+c} \sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)} = \frac{1}{s} \sqrt{bcs(s-a)}$ wird das s in die Wurzel gezogen: $= \sqrt{\frac{s-a}{s} bc}$ ergibt Länge der Strecke vom Eckpunkt A zum Schnittpunkt der Winkelhalbierenden bzw. Inkreismittelpunkt.	
	★ Länge Eckpunkt - Inkreismittelpunkt $AI = w_a = \frac{1}{a+b+c} \sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)} = \frac{1}{s} \sqrt{bcs(s-a)} = \sqrt{\frac{s-a}{s} bc}$ $BI = w_b = \frac{1}{a+b+c} \sqrt{ac((a+c)^2 - b^2)} = \frac{1}{s} \sqrt{acs(s-b)} = \sqrt{\frac{s-b}{s} ac}$ $CI = w_c = \frac{1}{a+b+c} \sqrt{ab((a+b)^2 - c^2)} = \frac{1}{s} \sqrt{abs(s-c)} = \sqrt{\frac{s-c}{s} ab}$	

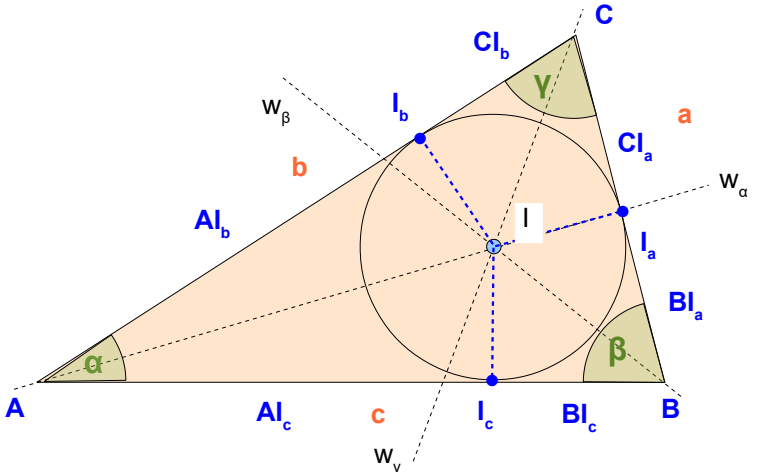
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

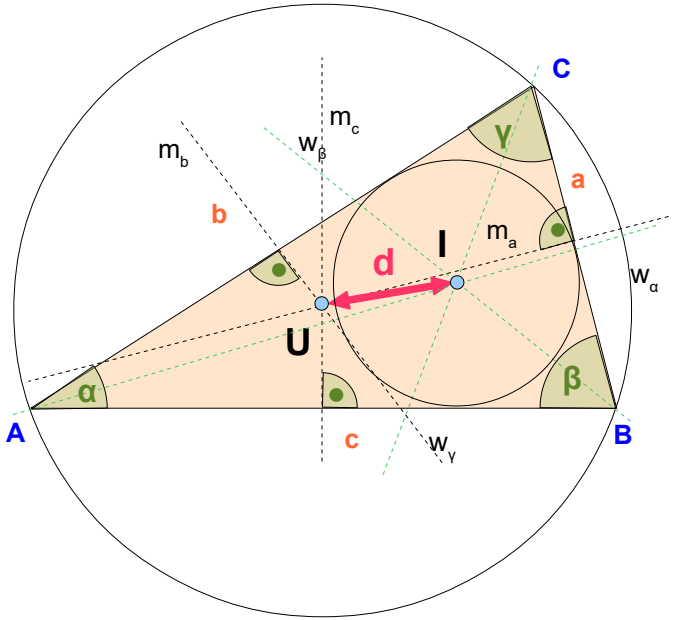
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Winkelhalbierenden</i>	★ Länge Inkreismittelpunkt - Seitenschnittpunkt Für den unteren Teil der Winkelhalbierenden ergeben sich Teilungsfaktoren $p_2 = \frac{a}{a+b+c} = \frac{a}{2s} \quad q_2 = \frac{b}{a+b+c} = \frac{b}{2s}$ da die Summe der beiden Faktoren $p_1 + p_2$ und $q_1 + q_2$ jeweils 1 ergeben. Länge der Winkelhalbierenden (Berechnung weiter vorn): $w_A = \frac{1}{b+c} \sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)} = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcs(s-a)}$ multipliziert mit dem Teilungsfaktor $\frac{a}{2s}$ $\frac{a}{2s(b+c)} \sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)} = \frac{a}{s(b+c)} \sqrt{bcs(s-a)}$ wird das s in die Wurzel gezogen: $= \frac{a}{b+c} \sqrt{\frac{s-a}{s} bc}$ ergibt Länge der Strecke vom Inkreismittelpunkt zum Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit den Seiten $IW_a = \frac{a}{2s(b+c)} \sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)} = \frac{a}{s(b+c)} \sqrt{bcs(s-a)}$ $IW_b = \frac{b}{2s(c+a)} \sqrt{ac((a+c)^2 - b^2)} = \frac{b}{s(c+a)} \sqrt{acs(s-b)}$ $IW_c = \frac{c}{2s(a+b)} \sqrt{ab((a+b)^2 - c^2)} = \frac{c}{s(a+b)} \sqrt{abs(s-c)}$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Winkelhalbierenden</i>	★ Der Geronne - Punkt Als nächstes sollen nicht die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Dreiecksseiten betrachtet werden, sondern die Berührungspunkte des Inkreises mit den Dreiecksseiten. Verbindet man die Berührungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten erhält man wieder Eck-Seiten – Transversalen. Auch diese Transversalen schneiden sich in einem Punkt, dem Geronne Punkt. Dieser Punkt fällt im allgemeinen nicht mit dem Mittelpunkt des Inkreises zusammen, da die Berührungspunkte auch nicht die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Dreiecksseiten sind.	 Kontrollrechnung für Seite b: $b = s - a + s - c = \frac{1}{2} (a + b + c) + \frac{1}{2} (a + b + c) - a - c = b$ 
	★ Der Länge der Strecken durch den Geronne Punkt Nach dem Satz von Stewart (weiter vorn in dem Dokument) ist die Länge der Transversale, wenn das Teilungsverhältnis der gegenüber liegenden Dreiecksseite bekannt ist: $t^2 = \frac{m}{a} b^2 + \frac{n}{a} c^2 - mn .$ Dabei handelt es sich um eine Eck-Transversale, die vom Punkt A ausgeht und die gegenüberliegende Seite a in die Abschnitte m und n teilt. $t^2 = \frac{s-a}{c} a^2 + \frac{s-b}{c} b^2 - (s-a) (s-b)$ Das Quadrat der Länge der Geronne - Geraden $A I_a^2 = \frac{b^2(s-b) + c^2(s-c) - a(s-b)(s-c)}{a} = b^2 + (s-c)^2 - 2 b (s-c) \cos \gamma$ $B I_b^2 = \frac{a^2(s-a) + c^2(s-c) - b(s-a)(s-c)}{b} = c^2 + (s-a)^2 - 2 c (s-a) \cos \alpha$ $C I_c^2 = \frac{a^2(s-a) + b^2(s-b) - c(s-a)(s-b)}{c} = a^2 + (s-b)^2 - 2 a (s-b) \cos \beta$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Winkelhalbierenden</i>	★ Berechnung des Inkreisradius Weiter vorn wurden die Seitenabschnitte vom Eckpunkt zum Berührungspunkt des Inkreises berechnet. $AI_c = AI_b = \frac{1}{2}(b + c - a) = s - a$ $BI_a = BI_c = \frac{1}{2}(c + a - b) = s - b$ $CI_b = CI_a = \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c$ auf der vorherigen Seite die Abstände vom Eckpunkt bis zu Inkreismittelpunkt. $AI = \frac{1}{2s} \sqrt{cbs(s-a)} \quad BI = \frac{1}{2s} \sqrt{acs(s-b)} \quad CI = \frac{1}{2s} \sqrt{abs(s-c)}$ Aus diesen Strecken lässt sich mittels Pythagoras der Inkreisradius berechnen. $AI^2 = r^2 + AI_b^2$ $r^2 = AI^2 - AI_b^2$ $r^2 = \frac{1}{4s^2} cbs(s-a) - (s-a)^2$ $= (s-a)(cb/4s - 1)$ $= (s-a)(cb - 4s)/4s$ $r^2 = \frac{(s-a)(cb - 4s)}{4s}$ $r = \frac{2F}{U} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ $r = (s-a) \tan \frac{\alpha}{2} = (s-b) \tan \frac{\beta}{2} = (s-c) \tan \frac{\gamma}{2}$ $r = 4 R_U \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = s \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2}$ $r = R_U (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1)$ $r = \frac{F}{s} = \frac{abc}{4 R_U s}$ Für die Berechnung der halben Winkel gibt es Formeln am Anfang dieses Dokuments.	 $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}U$ $r = c \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$ $r = \frac{a}{\cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\cot \frac{\gamma}{2} + \cot \frac{\alpha}{2}} = \frac{c}{\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2}}$
	© Dipl.-Math. Armin Richter Treffo Lernen CHRISTINA STRAUCH	

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Winkelhalbierenden</i>	Satz von Euler Der Abstand d von Umkreismittelpunkt und Inkreismittelpunkt ergibt sich aus $d^2 = R(R - 2r)$, wobei R der Umkreisradius und r der Inkreisradius sind.	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

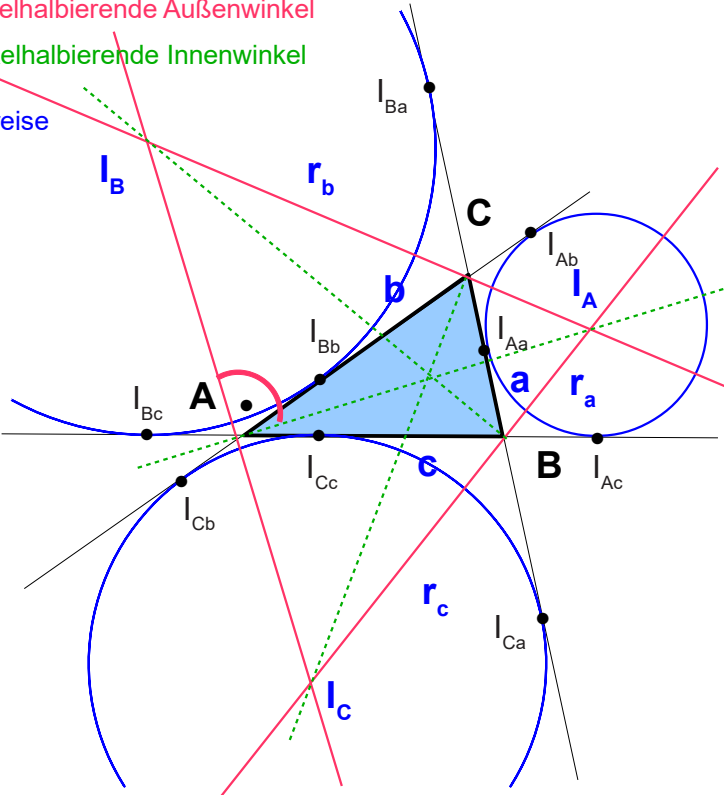
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Außenwinkel halbierenden</i>	Die roten Linien sind die Höhen für Dreieck $I_A I_B I_C$. Es ist nicht $\alpha + \beta + \gamma = 180$, sondern $2\alpha' + 2\beta' + 2\gamma' = 180$, für die Innenwinkel damit bleibt $\alpha + \alpha' = 90$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
		The diagram illustrates the geometry of a triangle ABC and its associated circles and points. Key elements include: Triangle ABC: The central triangle with vertices A, B, and C. Internal Angle Bisectors: Lines from each vertex to the opposite side, intersecting at the incenter I. The angles at I are labeled α, β, and γ. Exterior Angle Bisectors: Lines extending from each vertex, intersecting at the excenters I_A, I_B, and I_C. Excircles: Three circles tangent to the sides of the triangle and its extensions, with centers I_A, I_B, and I_C. Their radii are labeled r_a, r_b, and r_c. Incircle: A green circle centered at I with radius r, tangent to the sides BC, CA, and AB at points W_c, W_b, and W_a respectively. Other Points and Lines: W_a, W_b, W_c: Points where the incircle is tangent to the sides. I_{aa}, I_{bb}, I_{cc}: Points where the excircles are tangent to the sides. W_a, W_b, W_c: Points where the lines AI, BI, and CI intersect the opposite sides. I_{bb}, I_{cc}, I_{aa}: Points where the lines BI, CI, and AI intersect the extensions of the opposite sides. W_a, W_b, W_c: Points where the lines AI, BI, and CI intersect the opposite sides. I_{bb}, I_{cc}, I_{aa}: Points where the lines BI, CI, and AI intersect the extensions of the opposite sides.

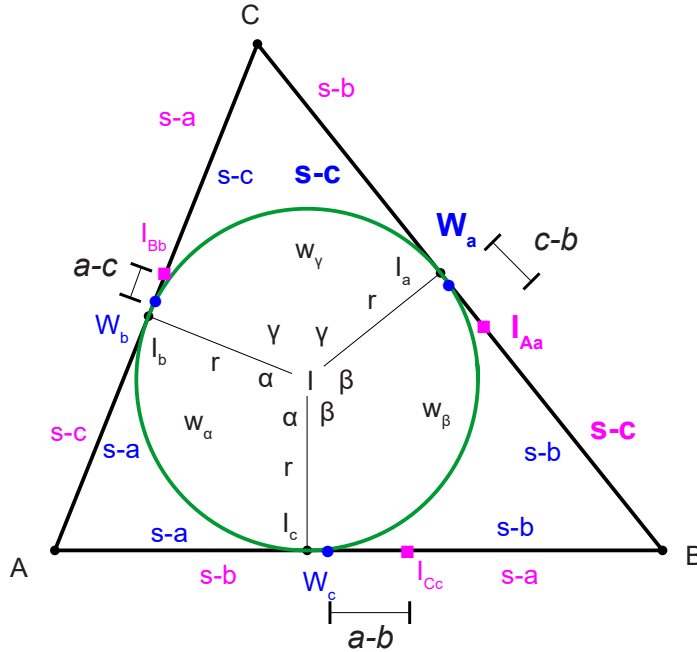
© Dipl.-Math.
Armin Richter

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

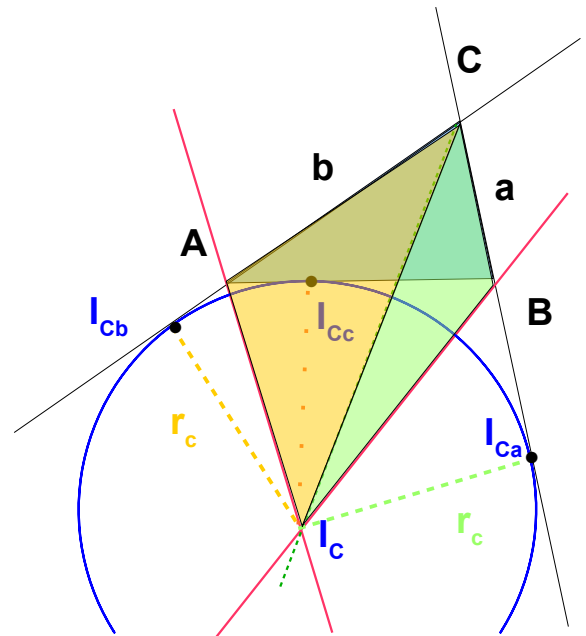
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Außenwinkelhalbierenden</i>	● Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Außenwinkel - Die Winkelhalbierenden der Außenwinkel schneiden sich (paarweise) in einem Punkt. - Die Winkelhalbierende des gegenüberliegenden Innenwinkels scheidet sich mit den beiden anderen Geraden ebenfalls in diesem Punkt. - Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der Außenkreise, die jeweils eine Dreieckseite von außen berühren, sowie die Verlängerungen der beiden anderen Dreieckseiten. - Die Außenwinkelhalbierenden und die Innenwinkelhalbierende stehen in der Ecke des Dreiecks senkrecht aufeinander - daraus folgt: Die Innenwinkelhalbierenden von ABC sind die Höhen des Dreiecks I_A, I_B, I_C. Die Winkelhalbierenden der Außenwinkel sind rot eingezeichnet und die Außenkreise blau. Die Berührungspunkte der Außenkreise sind nicht identisch mit den Berührungspunkten des Inkreises. Die Winkelhalbierenden der Außenwinkel werden genau so erzeugt, wie die Winkelhalbierenden der Innenwinkel, man muß nur die entsprechenden Dreieckseiten und die jeweiligen Verlängerungen der Dreieckseiten benutzen.	Winkelhalbierende Außenwinkel Winkelhalbierende Innenwinkel Ankreise  I_{Bc} : Berührungspunkt des Außenkreises um I_B an die Seite c

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Außenwinkel halbierenden</i>	★ Berechnung der Ankreis-Berührungspunkte Jeder Ankreis hat Berührungspunkte mit allen drei Dreieckseiten, die in der Skizze mit I_{Aa}, I_{Bb} und I_{Cc} bezeichnet sind. Der Abstand jedes dieser Punkte zum Punkt I_c ist gleich dem Radius des Kreises r_c. Analog dem Inkreis gilt für die Abstände: $AI_{Cc} = AI_{Cb} \quad BI_{Cc} = BI_{Ca} \quad CI_{Cb} = CI_{Ca}$ da es jeweils Tangentenabschnitte von einem Punkt aus an einen Kreis sind. Nun gilt für den Umfang des Dreiecks: $b + c + a = 2s$ $AC + AI_{Cc} + BI_{Cc} + CB = \text{Unterteilung Seite } c$ $AC + AI_{Cb} + BI_{Ca} + CB = \text{Gleichheit nach obigen Gleichungen}$ $CI_{Cb} + CI_{Ca} = 2 CI_{Ca} = 2s$ $CI_{Ca} = s$ Der Abstand der Berührungspunkte an den anliegenden Seiten des gegenüberliegenden Eckpunktes ist gleich und beträgt jeweils einen Halben Umfang des Dreiecks. $CI_{Ca} = s = a + BI_{Ca} \Rightarrow BI_{Ca} = s - a = BI_{Cc}$ $CI_{Cb} = s = b + AI_{Cb} \Rightarrow AI_{Cb} = s - b = AI_{Cc}$ Außerdem gilt nach den obigen Gleichungen $AI_{Cc} = AI_{Cb}$ und $BI_{Cc} = BI_{Ca}$ $AI_{Cc} = AI_{Cb} = s - b \quad BI_{Cc} = BI_{Ca} = s - a \quad CI_{Bb} = CI_{Ba} = s - a$ $AI_{Bb} = AI_{Bc} = s - c \quad BI_{Aa} = BI_{Ac} = s - c \quad CI_{Aa} = CI_{Ab} = s - b$ Auf der Seite der Innenwinkel wurde aber gezeigt, dass der Berührungspunkt des Inkreises vom Eckpunkt um $s -$ Gegenseite entfernt ist. In diesem Fall ist die Entfernung $s -$ angrenzender Seite.	Winkelhalbierende Außenwinkel Winkelhalbierende Innenwinkel Ankreise Die Höhen des Dreiecks I_a, I_b, I_c sind die Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Außenwinkel halbierenden</i>	Schlußfolgerung: Bezüglich der Seite c ist der • Berührungspunkt des Inkreises von dem Eckpunkt B um die Größe $s - b$ entfernt. • Berührungspunkt des Ankreises von dem Eckpunkt A um die Größe $s - b$ entfernt. Die Entfernung des Inkreisberührungspunktes von dem einen Eckpunkt ist gleich der Entfernung des Ankreisberührungspunktes von dem anderen Eckpunkt einer Seite.	
	★ Abstand der Inkreis und Ankreis Berührungspunkte Im Nebstehenden Dreieck sind die Berührungspunkte und Streckenabschnitte des Inkreises mit blauen Markierungen angegeben. Die Berührungspunkte und Streckenabschnitte der Außenkreise in pink. Es sollen die Berührungspunkte des Innen und Außenkreises auf jeder Seite betrachtet werden. Gesucht sind die Abstände der beiden Berührungspunkte. Es soll die Seite a betrachtet werden. Der Berührungspunkt des Außenkreises ist näher am Punkt B in der Entfernung $s-c$. Der Berührungspunkt des Inkreises ist näher am Punkt C mit der Entfernung $s-c$. Gesucht ist der Abstand der beiden Punkte. $a - (s-c) - (s-c) = a - s + c - s + c = a + 2c - 2s = a + 2c - (a+b+c) = c - b$ Sei W_a der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite $a = BC$ und I_{Aa} der Berührungspunkt des Ankreises zur Seite $a = BC$ dann gilt : $CW_a = BI_{Aa} = s - c$ und $BW_a = CI_{Aa} = s - b$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Außenwinkel halbierenden</i>	★ Radien der Ankreise Wir betrachten hier den Ankreis an die Seite c. Die Fläche des Dreiecks lässt sich ausdrücken durch: $A = A_{CB c} + A_{CA c} - A_{AB c}$ Die drei Flächeninhalte auf der rechten Seite lassen sich jeweils in der Form $F = \frac{1}{2} gh$ schreiben, wobei eine der Seiten von Dreieck ABC als Grundseite g genommen wird und der Ankreisradius r_c als Höhe h. - Im Dreieck ACI_c ist r_c die Höhe bezüglich der Seite b, da der Kreis einen Berührungspunkt mit der Seite b hat, also $A_{ACM_c} = \frac{1}{2} b \cdot r_c$ - Für das Dreieck CBM_c ist r_c die Höhe bezüglich der Seite a, da der Kreis einen Berührungspunkt mit der Seite a hat, also $A_{CBM_c} = \frac{1}{2} a \cdot r_c$ - Analog für das Dreieck ABM_c, für das r_c die Höhe auf die Seite c ist, woraus folgt $F = \frac{1}{2} (a + b - c) r_c$ für $s = \frac{1}{2} (a + b + c)$ folgt : $\frac{1}{2} (a + b - c) = \frac{1}{2} (a + b + c) - c = s - c$ und damit $F = (s - c) r_c$ $F = (s - a) r_a = (s - b) r_b = (s - c) r_c$ Dabei sind r_a, r_b, r_c die Ankreisradien und s die Hälfte des Umfangs. Durch Umstellen der Formeln nach den Außenradien erhält man für diese: $r_a = \frac{F}{s - a} = \sqrt{\frac{s(s - b)(s - c)}{(s - a)}}$ $r_b = \frac{F}{s - b} = \sqrt{\frac{s(s - a)(s - c)}{(s - b)}}$ $r_c = \frac{F}{s - c} = \sqrt{\frac{s(s - a)(s - b)}{(s - c)}}$ und dazu der Inkreisradius $r = \frac{F}{s} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}}$	 Weitere Formeln für den Radius der Außenkreise: $r_a = s \tan \frac{\alpha}{2} = (s - b) \tan \frac{\beta}{2} = (s - c) \tan \frac{\gamma}{2}$ $r_a = 4 R_U \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = (s - a) \tan \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} \cot \frac{\gamma}{2}$ $r_a = R_U (-\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1)$ $r_a = \frac{F}{s - a} = \frac{a b c}{4 R_U (s - a)}$

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Außenwinkel halbierenden</i>	aus $F = s \cdot r = \frac{1}{2} (a + b + c) r = \frac{1}{2} \left(\frac{2F}{h_A} + \frac{2F}{h_B} + \frac{2F}{h_C} \right) r$ folgt weiter $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C}$ Aus Formel (23) folgt weiter $r_a = \frac{F}{s-a} \quad r_b = \frac{F}{s-b} \quad r_c = \frac{F}{s-c} \quad \Rightarrow F^2 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$	
	★ Radien der Ankreise und Höhenrechtecke Weiter ergibt sich aus den Streckenverhältnissen : $\begin{aligned} r_a \cdot r_b &= s(s-c) & r \cdot r_a &= (s-b)(s-c) \\ r_b \cdot r_c &= s(s-a) & r \cdot r_b &= (s-c)(s-a) \\ r_c \cdot r_a &= s(s-b) & r \cdot r_c &= (s-a)(s-b) \end{aligned}$ $\begin{aligned} r_a \cdot r_b - r \cdot r_c &= s(s-c) - (s-a)(s-b) \\ &= s^2 - s^2 - s(a+b-c) - ab \\ &= \frac{1}{2} (a+b+c)(a+b-c) - 2ab \\ &= \frac{1}{2} (a+b)^2 - 2ab - c^2 = \\ &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - c^2) \\ &= F_c \quad (\text{Fläche eines Höhenrechtecks}) \end{aligned}$ $\begin{aligned} F_A &= r_b \cdot r_c - r \cdot r_a \\ F_B &= r_c \cdot r_a - r \cdot r_b \\ F_C &= r_a \cdot r_b - r \cdot r_c \end{aligned}$	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Außenwinkelhalbierenden</i> Die Winkelhalbierenden und Verbindungslinien der Ankreismittelpunkte zerlegen die Figur in sechs rechtwinklige Dreiecke, von denen es drei Gruppen ähnlicher Dreiecke gibt. Hieraus folgen Streckenverhältnisse: rechtwinklige Dreiecke mit den Winkeln α, α' (Diese Dreiecke sind in der rechten Zeichnung markiert) $\frac{r}{s-a} = \frac{r_a}{s} = \frac{s-b}{r_c} = \frac{s-c}{r_b}$ blaues Dreieck grünes Dreieck rotes Dreieck magenta Dreieck rechtwinklige Dreiecke mit den Winkeln β, β' $\frac{r}{s-b} = \frac{r_b}{s} = \frac{s-c}{r_a} = \frac{s-a}{r_c}$ rechtwinklige Dreiecke mit den Winkeln γ, γ' $\frac{r}{s-c} = \frac{r_c}{s} = \frac{s-a}{r_b} = \frac{s-b}{r_a}$		
© Dipl.-Math. Armin Richter Treffo Lernen CHRISTINA STRAUCH		

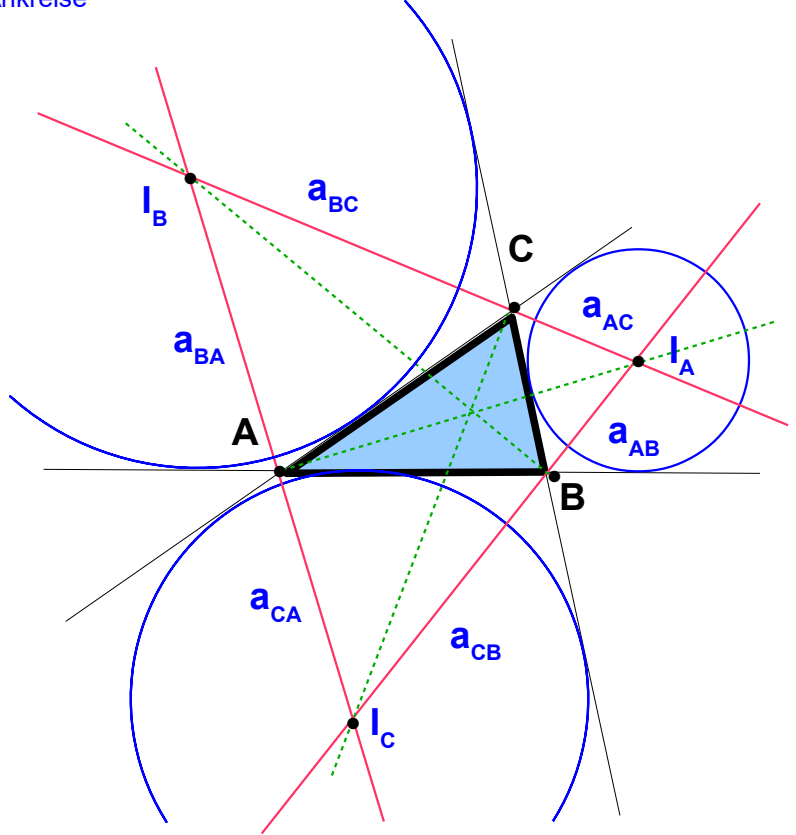
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Außenwinkel halbierenden</i>	★ Radien der Ankreise, des Inkreises und Seitenlängen $F_B + F_C = r_c \cdot r_a - r \cdot r_b + r_a \cdot r_b - r \cdot r_c = (r_b + r_c)(r_a - r) = a^2$ $F_C + F_A = r_a \cdot r_b - r \cdot r_c + r_b \cdot r_c - r \cdot r_a = (r_c + r_a)(r_b - r) = b^2$ $F_A + F_B = r_b \cdot r_c - r \cdot r_a + r_c \cdot r_a - r \cdot r_b = (r_a + r_b)(r_c - r) = c^2$ $F_A + F_B + F_C = r_a \cdot r_b + r_b \cdot r_c + r_c \cdot r_a - r(r_a + r_b + r_c)$ $r_a \cdot r_b + r_b \cdot r_c + r_c \cdot r_a$ $= F_A + F_B + F_C + r(r_a + r_b + r_c) =$ $= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + (s-a)(s-b) + (s-b)(s-c) + (s-c)(s-a) =$ $= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 3p^2 - 2p(a+b+c) + ab + bc + ca =$ $= \frac{1}{2}(a+b+c)^2 - s^2 = 2s^2 - s^2 = s^2$ Dividiert man diese Formel durch $r_a \cdot r_b \cdot r_c$, erhält man $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{s^2}{r_a \cdot r_b \cdot r_c} = \frac{F^2}{r^2 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} = \frac{1}{r}$ und nebenbei $r(r_a + r_b + r_c) = ab + bc + ca - s^2$ Hieraus folgt $abc = (s - (s-a))(s - (s-b))(s - (s-c))$ $= s^3 - s^2((s-a) + (s-b) + (s-c)) + s((s-a)(s-b) + (s-b)(s-c) + (s-c)(s-a)) - (s-a)(s-b)(s-c)$ $= s(ab + bc + ca) - s^3 - \frac{F^2}{s}$ $= s r(r_a + r_b + r_c) - s r^2$ und nach Division durch $sr = F$ $r_a + r_b + r_c = 4R + r$	

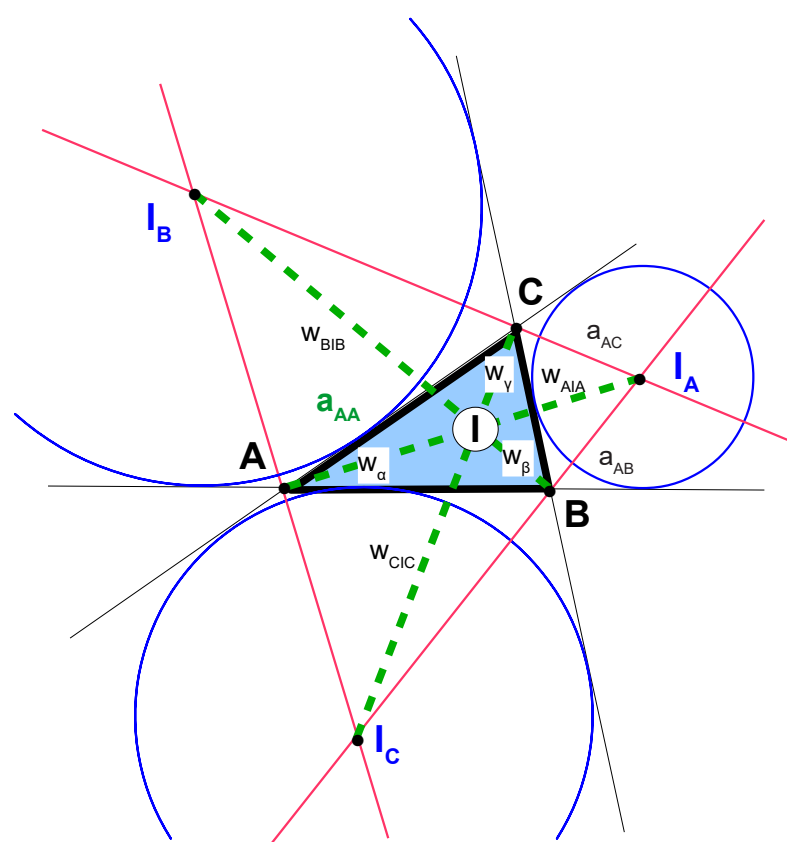
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Außenwinkel halbierenden</i>	★ Abstand der Mittelpunkte der Ankreise und benachbarter Eckpunkte Nach dem Satz des Pythagoras erhält man für die Abstände der Ankreismittelpunkte zu den <u>benachbarten</u> Eckpunkten (z.B. $CI_A = a_{AC}$: Abstand von I_A zum Punkt C.) $a_{AC}^2 = r_a^2 + (s - b)^2 = \frac{F^2}{(s - a)^2} + (s - b)^2 = \frac{s(s - b)(s - c)}{s - a} + (s - b)^2 =$ $= \frac{s - b}{s - a} \left(s(s - c) + (s - b)(s - a) \right) = \frac{s - b}{s - a} \left(2s^2 - s(a + b + c) + ab \right)$ $a_{AC}^2 = \frac{s - b}{s - a} ab \quad \text{da } 2s^2 = s(2s) = s(a + b + c)$ Analog erhält man für die Abstände der Eckpunkte von den Ankreismittelpunkten Ankreis I_A : $a_{AC}^2 = r_a^2 + (s - b)^2 = \frac{s - b}{s - a} ab$ $a_{AB}^2 = r_a^2 + (s - c)^2 = \frac{s - c}{s - a} ac$ Ankreis I_B : $a_{BC}^2 = r_b^2 + (s - a)^2 = \frac{s - a}{s - b} ab$ $a_{BA}^2 = r_b^2 + (s - c)^2 = \frac{s - c}{s - b} bc$ Ankreis I_C : $a_{CB}^2 = r_c^2 + (s - a)^2 = \frac{s - a}{s - c} ac$ $a_{CA}^2 = r_c^2 + (s - b)^2 = \frac{s - b}{s - c} bc$	Winkelhalbierende Außenwinkel Winkelhalbierende Innenwinkel Ankreise

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Außenwinkel halbierenden</i>	★ Seitenlängen des Dreiecks der Ankreismittelpunkte $I_A I_B = a_{AC} + a_{BC}$ $a_{AC}^2 = r_a^2 + (s - b)^2 = \frac{s - b}{s - a} ab$ $a_{BC}^2 = r_b^2 + (s - a)^2 = \frac{s - a}{s - b} ab$ $a_{AC} \cdot a_{BC} = \sqrt{\frac{s - b}{s - a} ab} \cdot \sqrt{\frac{s - a}{s - b} ab} = ab$ $2 a_{AC} \cdot a_{BC} = 2 ab$ $a_{AC}^2 + a_{BC}^2 + 2 a_{AC} \cdot a_{BC} = \frac{s - b}{s - a} ab + \frac{s - a}{s - b} ab + 2 ab$ $ab \left(\sqrt{\frac{s - b}{s - a}} + \sqrt{\frac{s - a}{s - b}} \right)^2$ $ab \left(\sqrt{\frac{(s - b)(s - b)}{(s - a)(s - b)}} + \sqrt{\frac{(s - a)(s - a)}{(s - b)(s - a)}} \right)^2$ $ab \left(\frac{(s - b) + (s - a)}{\sqrt{(s - a)(s - b)}} \right)^2 \quad \text{da } 2s - a - b = c$ $(a_{AC} + a_{BC})^2 = ab \left(\frac{c}{\sqrt{(s - a)(s - b)}} \right)^2$ $I_A I_B = (a_{AC} + a_{BC}) = c \sqrt{\frac{ab}{(s - a)(s - b)}}$ $I_B I_C = (a_{BA} + a_{CA}) = a \sqrt{\frac{bc}{(s - b)(s - c)}}$ $I_C I_A = (a_{CB} + a_{AB}) = b \sqrt{\frac{ca}{(s - c)(s - a)}}$	Winkelhalbierende Außenwinkel Winkelhalbierende Innenwinkel Ankreise 

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Außenwinkel halbierenden</i>	★ Abstand der Außenkreismittelpunkte vom Inkreismittelpunkt $w_{AIA}^2 = \frac{a^2 bc}{s(s-a)} = \frac{a}{s-a} 4Rr$ $w_{BIB}^2 = \frac{ab^2 c}{s(s-b)} = \frac{b}{s-b} 4Rr$ $w_{CIC}^2 = \frac{abc^2}{s(s-c)} = \frac{c}{s-c} 4Rr$	
	★ Abstand der Außenkreismittelpunkte vom gegenüberliegenden Eckpunkt - Der Abstand vom Ankreismittelpunkt zu den benachbarten Eckpunkten wurde bereits angegeben. - Die Länge der Winkelhalbierenden bis zum Schnittpunkt der gegenüberliegenden Dreiecksseite sind bereits berechnet. - Für die Gesamtlänge vom Ankreismittelpunkt bis zum <u>gegenüberliegenden</u> Eckpunkt ergibt sich : $\sqrt{\frac{s-a}{s} bc} + \sqrt{\frac{a^2 bc}{s(s-a)}} = \frac{\sqrt{(s-a)^2 bc} + \sqrt{bc a^2}}{\sqrt{s(s-a)}} = \sqrt{\frac{bc}{s(s-a)}} ((s-a) + a)$ $= \sqrt{\frac{bc}{s(s-a)}} s = \sqrt{\frac{sbc}{s-a}}$ $w_\alpha + w_{AIA} = \sqrt{\frac{sbc}{s-a}}$ $w_\beta + w_{BIB} = \sqrt{\frac{sca}{s-b}}$ $w_\gamma + w_{CIC} = \sqrt{\frac{sab}{s-c}}$	

Abstand I_A nach C:

$$a_{AC}^2 = r_a^2 + (s-b)^2 = \frac{s-b}{s-a} ab$$

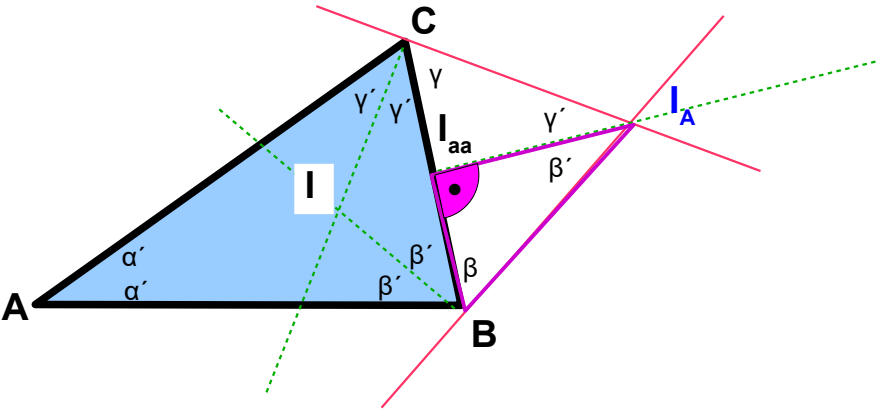
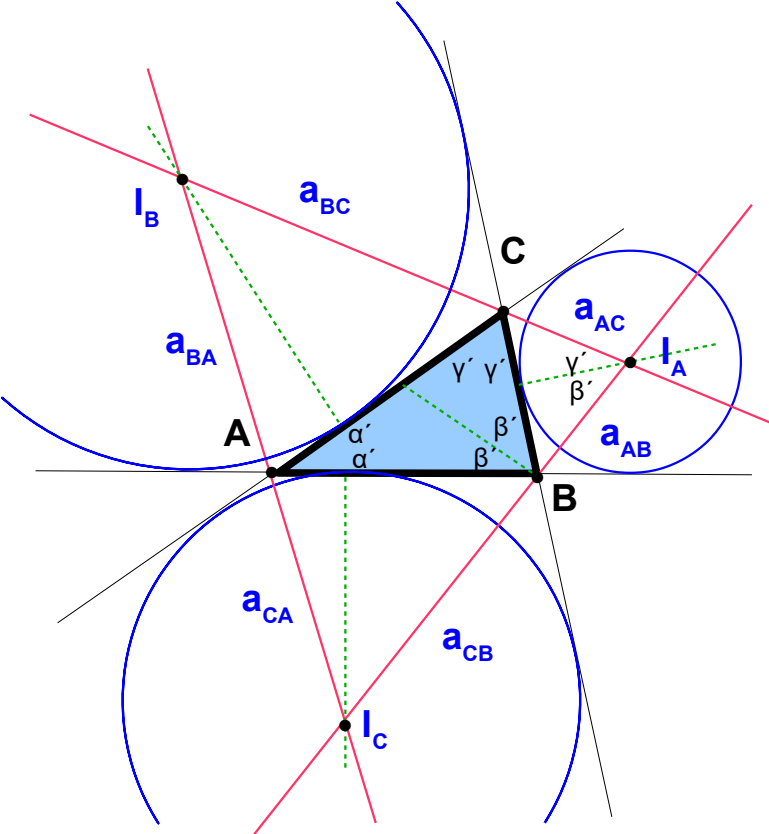
Abstand I_A nach B:

$$a_{AB}^2 = r_a^2 + (s-c)^2 = \frac{s-c}{s-b} ac$$

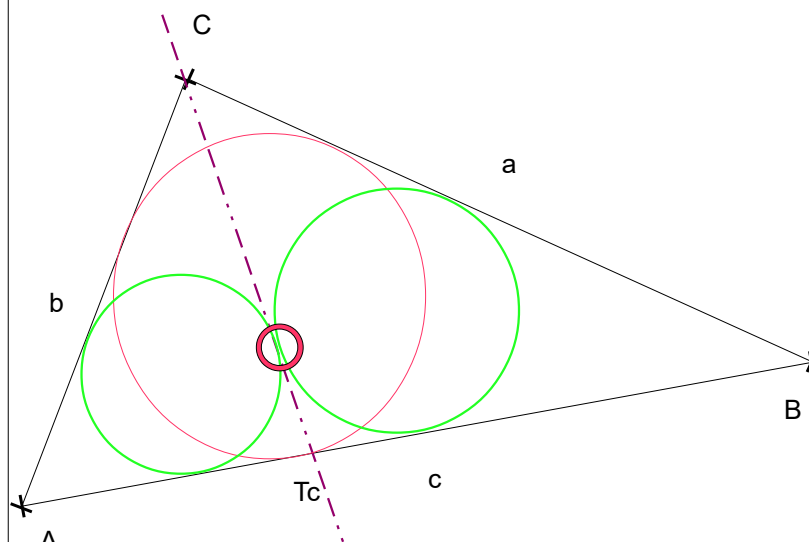
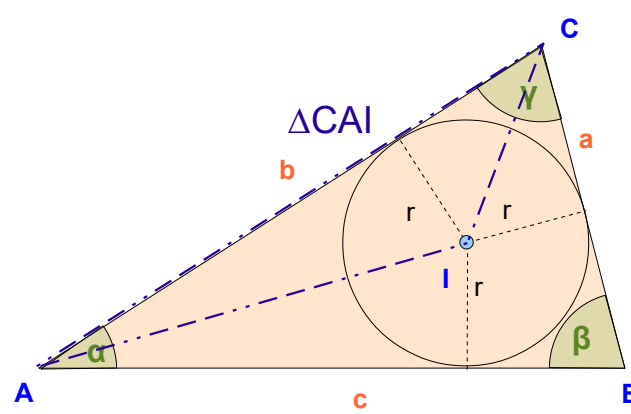
Abstand I_A nach A:

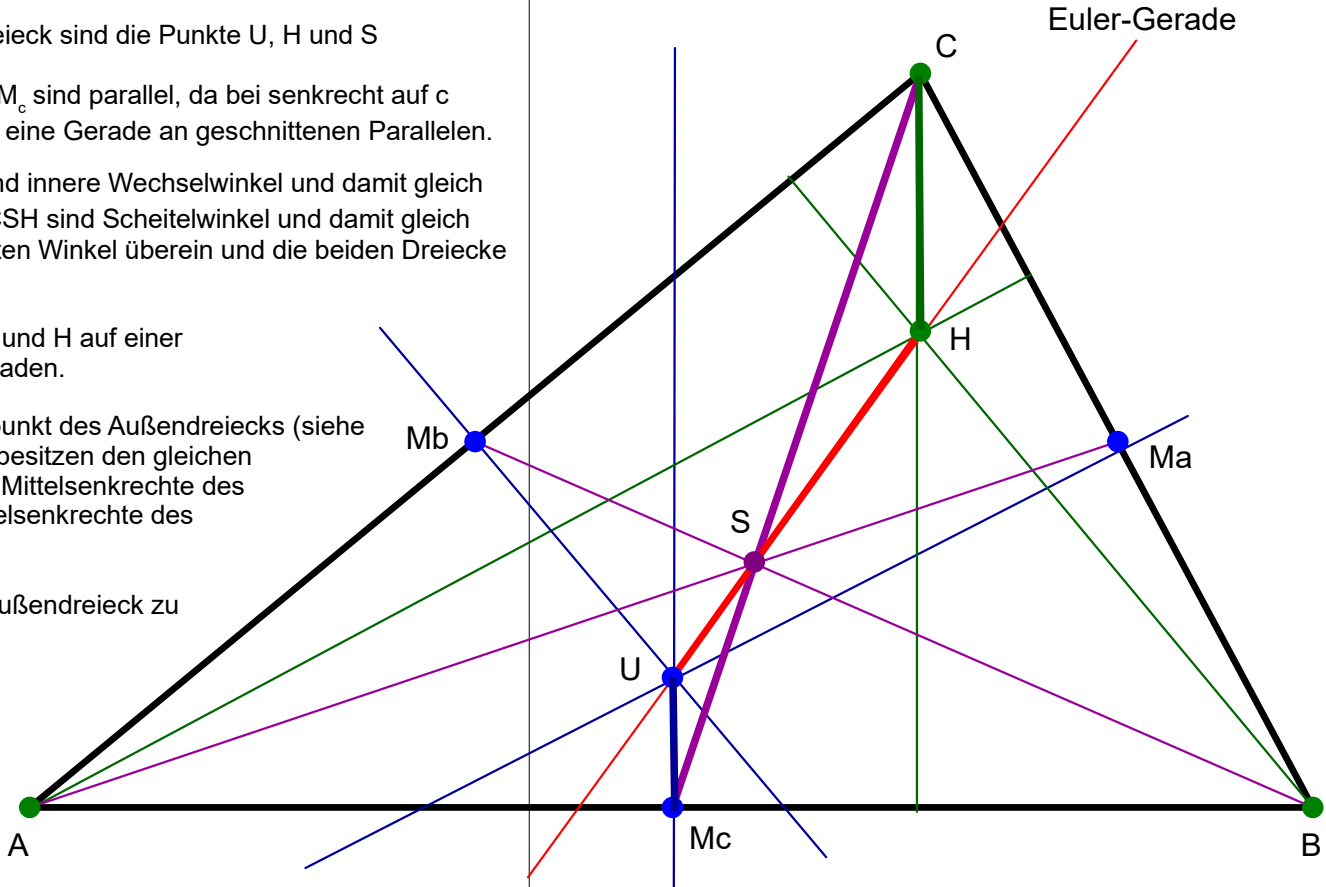
$$a_{AA}^2 = r_a^2 + s^2 = \frac{s}{s-a} bc$$

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

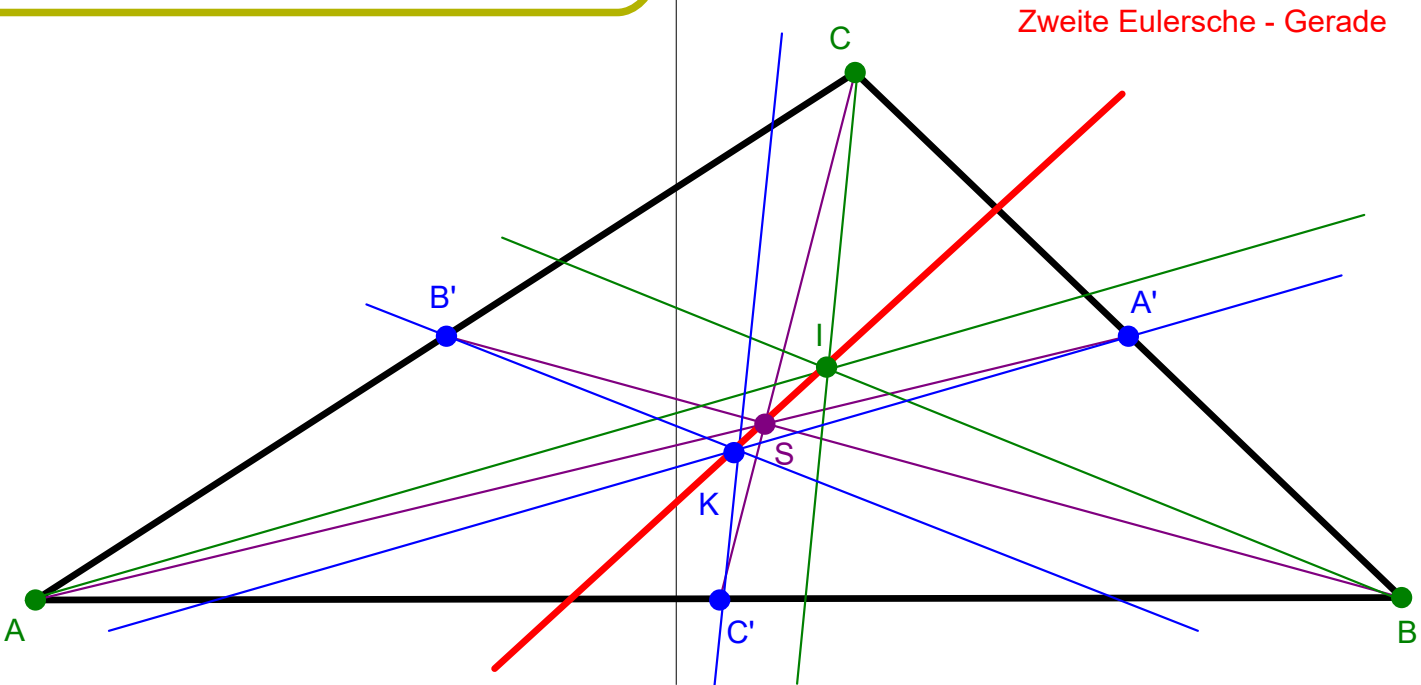
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Außenwinkelhalbierenden</i>	★ Winkel des Dreiecks der Ankreismittelpunkte Das Dreieck $\Delta I_{aa} B I_A$ ist ein rechtwinkliges Dreieck. Es ist zu beachten, dass der Innenwinkel im Eckpunkt B nicht β ist, sondern $2\beta'$. Es gilt $\beta + \beta' = 90$. Die Winkelhalbierenden des Ausgangsdreiecks sind die Höhen des Dreiecks der Ankreismittelpunkte. Damit stehen die Winkelhalbierenden senkrecht auf den Seiten des umgebenden Dreiecks. Damit ist der untere Winkel in I_A β', da der Winkel in B dann β sein muss, wegen der Höhen Eigenschaft und $\beta + \beta' = 90$. $\angle B I_A C = \beta' + \gamma'$ $\angle A I_B C = \alpha' + \gamma'$ $\angle A I_C B = \alpha' + \beta'$ Damit sind die Winkel in den Außenkreismittelpunkten die Summe der beiden halben anliegenden Winkel des Dreiecks. Vergrößerung für den Punkt I_A : 	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck <i>Die Außenwinkel halbierenden</i>	Die Winkelhalbierende Teilt das Dreieck ABC in zwei Teildreiecke ΔAT_cC und ΔBT_cC. Die Innenkreise der beiden Dreiecke ΔAT_cC und ΔBT_cC berühren sich. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem Produkt aus halben Dreiecksumfang und dem Inkreisradius: $A = s \cdot r$ Verbindet man jede der drei Ecken mit dem Inkreismittelpunkt I, so wird dadurch das Dreieck ABC in drei Teildreiecke BCI, CAI und ABI zerlegt. Die Flächeninhalte dieser Teildreiecke lassen sich mit der Formel $A = \frac{1}{2} g h$ berechnen. Als Grundseite (g) wählt man jeweils eine Seite des ursprünglichen Dreiecks ABC. Die zugehörige Höhe (h) stimmt dann mit dem Inkreisradius p überein, da eine Kreistangente stets senkrecht zum zugehörigen Kreisradius steht. Damit ergibt sich: $\Delta BCI = \frac{1}{2} a r$ $\Delta CAI = \frac{1}{2} b r$ $\Delta ABI = \frac{1}{2} c r$ Für das gesamte Dreieck folgt daraus: $A = \frac{1}{2} (a + b + c) \cdot r = \frac{1}{2} s \cdot r$	 

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck	1. Eulersche Gerade mit H , S , U Die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten, der Seitenhalbierenden und der Höhen liegen in jedem Dreieck auf einer Geraden, der sogenannten 1. Eulerschen Geraden. Dabei gilt: $\overline{HS} = 2 \overline{SU}$ Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden liegt nur in Ausnahmefällen auf dieser Gerade. In jedem nicht – gleichseitigen Dreieck sind die Punkte U, H und S verschiedene Punkte. Die Trägergeraden von CH und UM_c sind parallel, da beide senkrecht auf c stehen. Damit ist die Gerade CMc eine Gerade an geschnittenen Parallelen. Die Winkel $\angle SCH$ und $\angle UM_cS$ sind innere Wechselwinkel und damit gleich groß. Die Winkel $\angle USMc$ und $\angle CSH$ sind Scheitelwinkel und damit gleich groß. Damit stimmen auch die dritten Winkel überein und die beiden Dreiecke $\triangle SHC$ und $\triangle SUM_c$ sind ähnlich. Damit liegen U , S und H auf einer gemeinsamen Geraden. Der Punkt H ist der Umkreismittelpunkt des Außendreiecks (siehe bei Außendreieck). Beide Dreieck besitzen den gleichen Schwerpunkt S. Damit ist CH eine Mittelsenkrechte des Außendreiecks und UM_c eine Mittelsenkrechte des Dreiecks ABC. Das Verhältnis der Strecken von Außendreieck zu Dreieck ABC beträgt 2 : 1. $CH : UM_c = 2 : 1$ wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke aber auch: $HS : SU = 2 : 1$	Die Mittelsenkrechten sind in blau eingezeichnet --> Umkreismittelpunkt U Die Seitenhalbierenden sind magenta eingezeichnet --> Schwerpunkt S Die Höhen sind grün eingezeichnet --> Höhenschnittpunkt H 

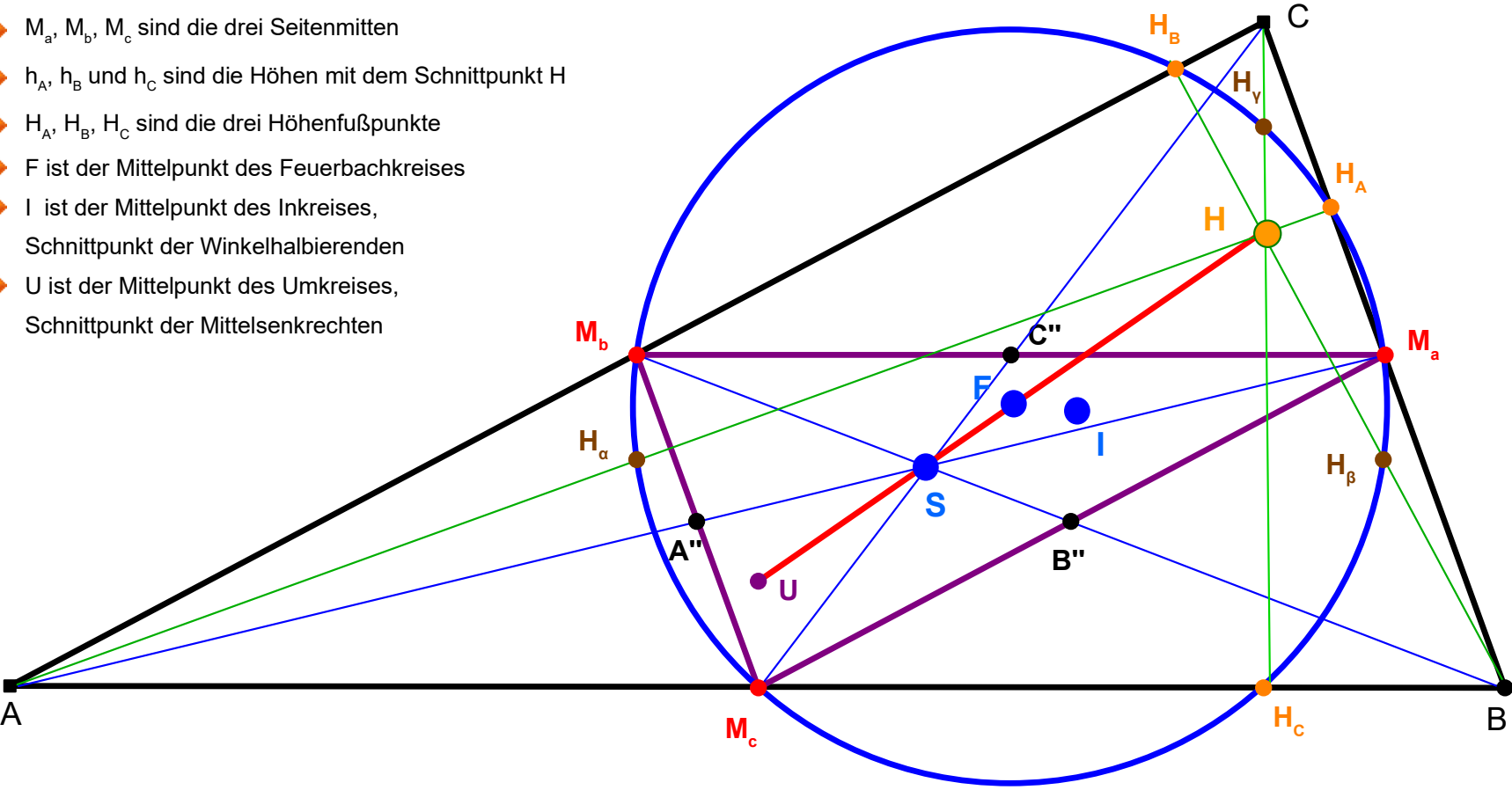
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Linien im Dreieck	2. Eulersche Gerade mit I, S, K Konfiguration: • Dreieck ABC mit den • Seitenhalbierenden als Ecktransversalen • Winkelhalbierenden als Ecktransversalen • Mittentransversalen der Winkelhalbierenden (das sind Parallelen zu den Winkelhalbierenden durch die gegenüberliegenden Seitenmitten) Die Halbierungsschnittpunkt der Winkelhalbierenden, der Inkreismittelpunkt und der Schwerpunkt liegen in jedem Dreieck auf einer Geraden, der sogenannten 2. Eulerschen Geraden. Dabei gilt: $\overline{IS} = 2 \overline{KS}$	• Die drei Halbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Halbierendenschnittpunkt K. • Der Inkreismittelpunkt I, der Schwerpunkt S und der Halbierendenschnittpunkt K des Dreiecks ABC liegen auf einer Geraden, der 2. Euler-Geraden. • Der Schwerpunkt S teilt die Strecke [IK] im Verhältnis 2 : 1. 

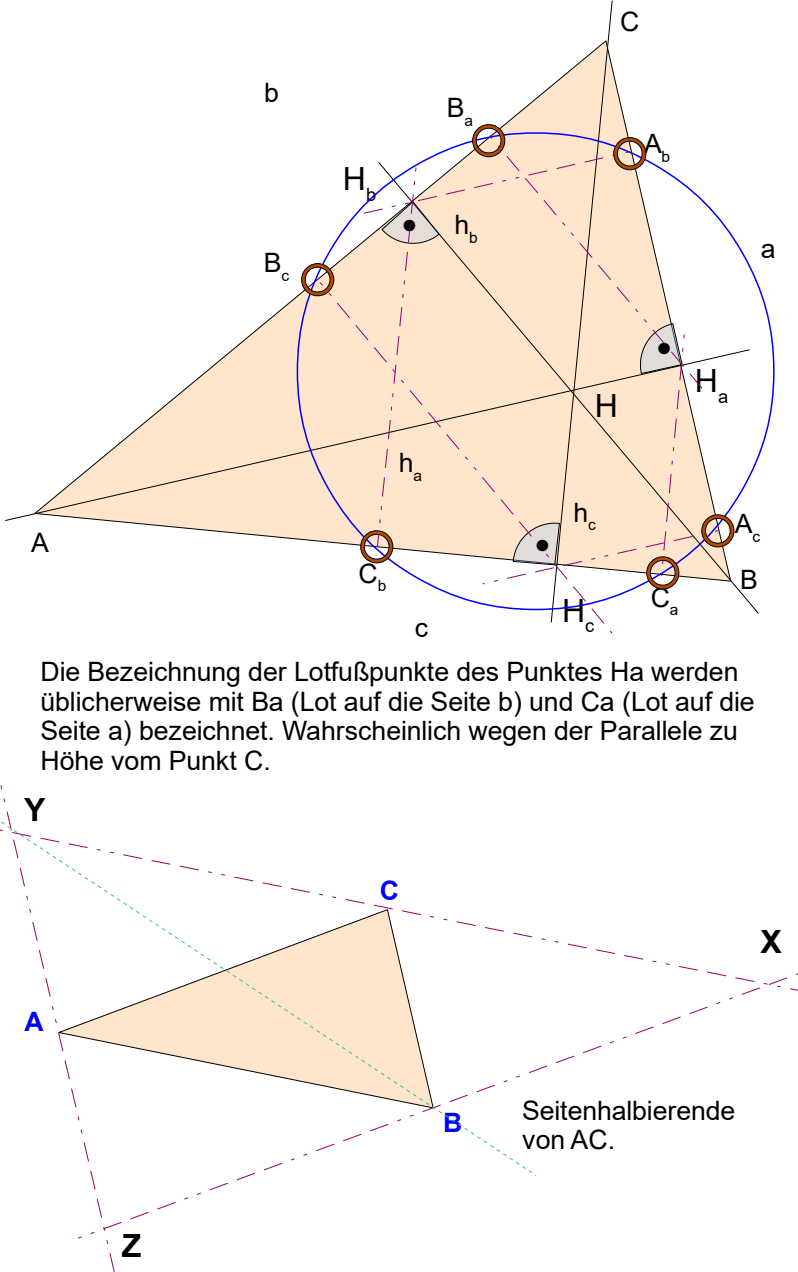
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Punkte im Dreiecke	3. Eulersche Gerade mit G, S, O (G') Konfiguration: - Dreieck ABC mit den Gergonne-Geraden als Ecktransversalen Gergonne-Halbierenden als Mittentransversalen (Das sind die Parallelen zu den Gergonne-Geraden durch die gegenüberliegenden Seitenmitten.) - Die drei Gergonne-Halbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Gergonne-Halbierenden-Schnittpunkt G'. - Der Gergonne-Punkt G, der Schwerpunkt S und der Gergonne-Halbierenden-Schnittpunkt G' des Dreiecks ABC liegen auf einer Geraden, der 3. Euler-Geraden. - Der Schwerpunkt S teilt die Strecke $[GG']$ im Verhältnis $2 : 1$. G' ist gleichzeitig der Mittelpunkt O des Dreiecks ABC.	

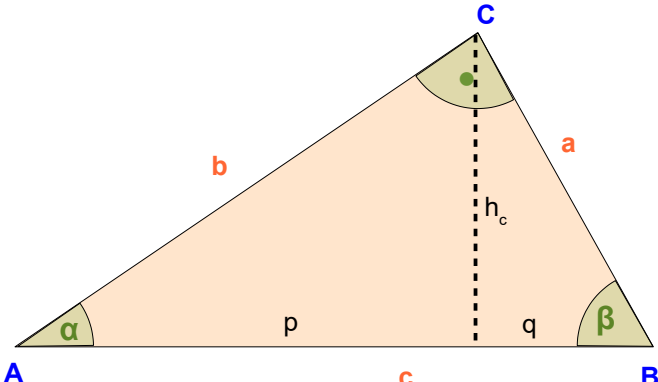
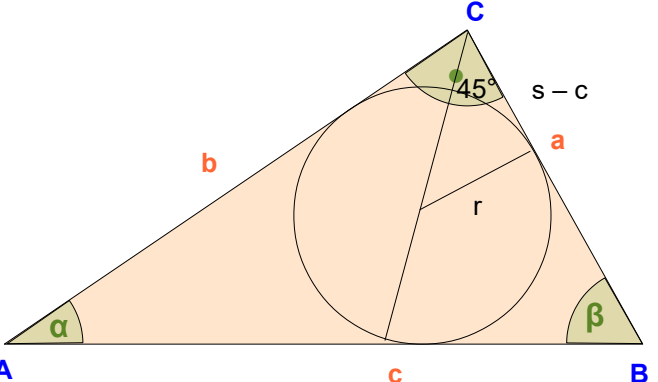
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Punkte im Dreiecke	Der Feuerbachkreis Schwerpunkt, Mittelpunkt des Umkreises und Höhenschnittpunkt liegen auf einer Gerade – der Eulerschen Gerade. Sie enthält auch den Mittelpunkt des Feuerbachkreises. Der Feuerbachkreis (9-Punktekreis) enthält: - Die Strecken $[AH]$, $[BH]$ und $[CH]$ nennen wir Euler-Strecken. H_a, H_b und H_c sind die Mitten der oberen Höhen $U - S - F - H$ ist die Eulergerade s_{ma}, s_{mb} und s_{mc} sind die Seitenhalbierenden mit dem Schnittpunkt S M_a, M_b, M_c sind die drei Seitenmitten h_a, h_b und h_c sind die Höhen mit dem Schnittpunkt H H_A, H_B, H_C sind die drei Höhenfußpunkte F ist der Mittelpunkt des Feuerbachkreises I ist der Mittelpunkt des Inkreises, Schnittpunkt der Winkelhalbierenden U ist der Mittelpunkt des Umkreises, Schnittpunkt der Mittelsenkrechten	In jedem Dreieck liegen die drei Seitenmitten, die drei Höhenfußpunkte und die drei Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte auf einem Kreis (Feuerbach-Kreis). Der Radius dieses Kreises ist gleich dem halben Umkreisradius, sein Mittelpunkt F liegt auf der Euler-Geraden, halbiert die Strecke UH und bildet mit H, S und U vier harmonische Punkte. Dieser Kreis berührt die drei Ankreise und den Inkreis. 

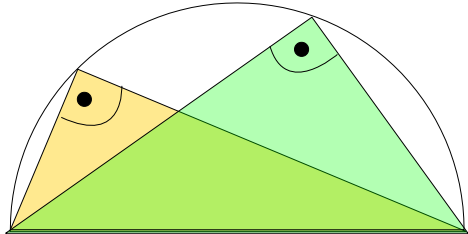
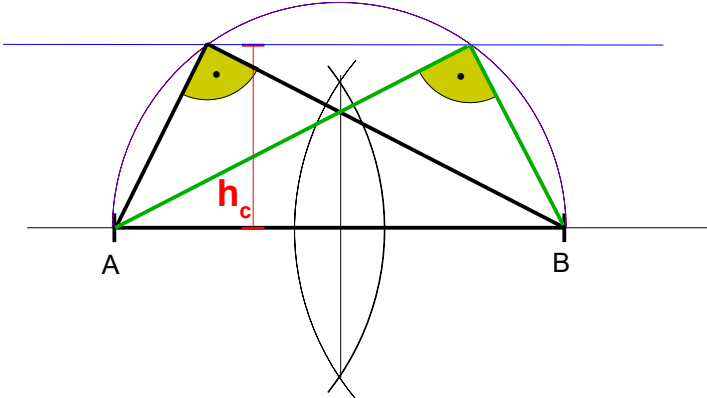
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Besondere Punkte im Dreiecke	Der Taylorkreis	 Die Bezeichnung der Lotfußpunkte des Punktes H_a werden üblicherweise mit B_a (Lot auf die Seite b) und C_a (Lot auf die Seite a) bezeichnet. Wahrscheinlich wegen der Parallele zu Höhe vom Punkt C.
	Fällen wir von jedem Höhenfußpunkt die Lote auf die beiden Nachbarseiten - diese Lote heißen die <i>Nebenhöhen</i> des Dreiecks, es gibt insgesamt sechs davon -, dann erhalten wir sechs Fußpunkte. Diese Fußpunkte liegen auf einem Kreis, und dieser Kreis heißt Taylorkreis des Dreiecks ABC. Ein Dreieck kann auf drei verschiedene Weisen "zum Parallelogramm ergänzt" werden. Man braucht nur die Parallele zu einer Seite durch die gegenüberliegende Ecke und die Parallele zu einer anderen Seite durch die gegenüberliegende Ecke miteinander zu schneiden; der Schnittpunkt ist dann die vierte Ecke des gewünschten Parallelogramms. Wir bezeichnen mit X den Schnittpunkt der Parallele zu CA durch B und der Parallele zu AB durch C. Analog sei Y der Schnittpunkt der Parallele zu AB durch C und der Parallele zu BC durch A, und sei Z der Schnittpunkt der Parallele zu BC durch A und der Parallele zu CA durch B. Das so entstandene Dreieck XYZ heißt dann das Außendreieck des Dreiecks ABC. Wir haben drei Parallelogramme vorliegen, nämlich die Parallelogramme $ABXC$, $BCYA$ und $CAZB$. Aus diesen Parallelogrammen folgt unter anderem $AB = CX$ und $AB = CY$; also ist $CX = CY$, und C ist der Mittelpunkt der Strecke XY. Entsprechend zeigt man, dass A der Mittelpunkt der Strecke YZ und B der Mittelpunkt der Strecke ZX ist. Die Ecken des Dreiecks ABC sind also die Mittelpunkte der Seiten seines Außendreiecks.	
	Aus dem Parallelogramm $BCYA$ folgt aber auch, daß sich die Strecken CA und BY gegenseitig halbieren. Das heißt: Die Strecke BY geht durch den Mittelpunkt von CA. Die Seitenhalbierende von AC verläuft nicht nur durch den Punkt B, sondern auch durch den Punkt Y.	
	Die Höhenlinien des ΔABC sind die Mittelsenkrechten des ΔXYZ. Damit ist der Umkreismittelpunkt des ΔXYZ gleich dem Höhenschnittpunkt des ΔABC.	

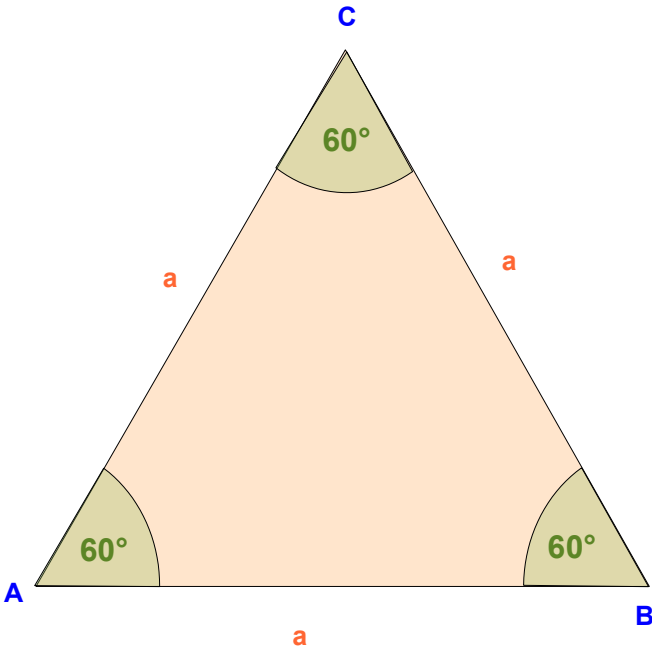
Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Rechtwinklige Dreiecke	Rechtwinkliges Dreieck - Da ein rechtwinkliges Dreieck einen rechten Winkel ($= 90^\circ$) hat und die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt, bleibt für die anderen beiden Winkel noch genau 90° übrig. - Zwei Winkel, die zusammen 90° ergeben, nennt man Komplementärwinkel. - Die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck heißt Hypotenuse. Sie liegt gegenüber des rechten Winkels. - Die beiden kürzeren Seiten heißen die Katheten. Sie schließen den rechten Winkel ein. - Der Höhenschnittpunkt liegt in dem Eckpunkt, in dem sich der rechte Winkel befindet. - Der Umkreismittelpunkt liegt auf der Seite c mit $c/2$ von jedem Eckpunkt entfernt $h_a = b ; h_b = a ; h_c = \frac{b \cdot a}{c}$ $p = \frac{b^2}{c} \quad q = \frac{a^2}{c}$ $A = \frac{1}{2} a b$ $R = \frac{1}{2} c \text{ (Begründung : Thaleskreis)}$ $r = s - c = \frac{1}{2} (a + b - c)$	 $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \quad h_c = b \sin(\alpha) = \frac{b \cdot a}{c}$ $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad \cos(\alpha) = \frac{p}{b} \quad p = b \cos(\alpha) = \frac{b^2}{c}$  Der Abstand des Berührungspunktes des Inkreises vom Punkt C beträgt $s - c$ (siehe weiter vorn bei Winkelhalbierenden und Inkreis). da das entstandene rechtwinklige Dreieck in C einen Basiswinkel von 45° hat, müssen die beiden Katheten gleich lang sein. $r = s - c$

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Rechtwinklige Dreiecke	● Satz von Thales Ist eine Dreiecksseite der Durchmesser eines Kreises und der dritte Punkt des Dreiecks liegt auf der Peripherie des Kreises, dann ist das Dreieck ein rechtwinkligen Dreieck	 
	★ Konstruktion c, h_c (1) Zeichne auf einer Geraden die Strecke $AB = c$; (2) Konstruiere zu dieser Geraden eine Parallele im Abstand h_c (3) Konstruiere den Mittelpunkt der Strecke AB (Mittelsenkrechte) (4) Schlage um den Schnittpunkt einen Kreis mit dem Abstand zu A (= Abstand zu B) (Thaleskreis) (5) Der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Parallelen liefert die gesuchten Dreiecke.	

Grundwissen Mathematik: Geometrie zum Dreieck

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Gleichseitige Dreiecke	● Gleichseitiges Dreieck Gleichseitige Dreiecke kommen in der Natur sehr häufig vor, z.B. haben viele Verkehrszeichen die Form eines gleichseitigen Dreiecks. Wie der Name schon sagt, sind alle 3 Seiten dieses Dreiecks gleich lang. Daraus folgt, dass auch alle 3 Winkel gleich groß sein müssen. Die Winkelsumme jedes Dreiecks beträgt immer 180°, dividiert durch 3 ergibt das eine Winkelgröße von 60°. Alle Seiten sind gleich lang: $a = b = c$ Alle Winkel sind gleich groß: $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ Die Höhen sind gleichzeitig Mittelsenkrechte, Seitenhalbierende und Winkelhalbierende. Damit fallen Schwerpunkt, Mittelpunkt Inkreis und Mittelpunkt Umkreis zusammen. Damit ist das Teilverhältnis entsprechend des Schwerpunktes 2:1. $h = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$ $A = \frac{1}{2} a \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$ $U = 3 \cdot a$ $r = \frac{1}{3} h = \frac{1}{6} a \sqrt{3}$ $R = \frac{2}{3} h = \frac{1}{3} a \sqrt{3}$	 Das Diagramm zeigt ein gleichseitiges Dreieck mit den Ecken A (unten links), B (unten rechts) und C (oben). Die Seiten sind mit der roten Beschriftung 'a' markiert. Die Innenwinkel an den Ecken A, B und C sind jeweils mit einem grünen Bogen und der Beschriftung '60°' gekennzeichnet.