Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Pascalsches Dreieck

Pascalsches Dreieck

Das Pascalsche Dreieck ist bekannt aus der Berechnung der Binomischen Formeln und stellt das Bildungsgesetz der Koeffizienten vor den einzelnen Potenzen dar.

Die Koeffizienten der folgenden Reihe entstehen aus der Summe der Koeffizienten der vorhergehenden Reihe. An den Rändern wird jeweils eine 1 hinzugefügt.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
\underbrace{1 + 1} \\
\underbrace{1 + 2}\underbrace{\;+ 1} \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1
\end{array}
$$

Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Vandermondesche Gleichung

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

Pascalsches Dreieck in der Schreibweise mit Binomialkoeffizienten

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}
\end{array}
$$

Binomialkoeffizient $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{x}}$

Ausdrücke der folgenden Art nennt man Binomialkoeffizienten. Sie treten nicht nur bei dieser Verteilungsfunktion auf, sondern insbesondere beim Ausmultiplizieren binomischer Ausdrücke der Form $(a + b)^n$. Die Berechnung der Binomialkoeffizienten ist nur erklärt für ganzzahlige n und x, wobei $x \le n$ sein muß.

$$\boxed{\binom{n}{x} = \binom{n}{n-x} = \frac{n!}{x!\,((n-x)!}}$$

Beim Binomialkoeffizient sind keine Bruchstriche zu setzen. Der Ausdruck wird gelesen als „ n über x“. Die Berechnung eines Binomialkoeffizienten erfolgt entsprechend des rechten Ausdrucks über die Fakultät der beiden ganzen Zahlen.

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Pascalsches Dreieck

Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks

Der „Aufbau“ beginnt in Zeile 0 (n=0) mit einer Eins. Am Rand jeder neuen Zeile steht auf beiden Seiten eine weitere 1. Alle anderen Einträge entstehen aus der Summe der beiden darüber liegenden Zahlen:
Zunächst scheint es ein einfaches Zahlenspiel zu sein, doch der Inhalt steckt voller schöner Mathematik. So haben die Zahlen im Pascalschen Dreieck neben der Symmetrie viele weitere interessante Eigenschaften:

(a) Die zweite Zahl entspricht immer der „Zeilennummer n“. Man beginnt bei der Nummerierung mit der „nullten Zeile“.

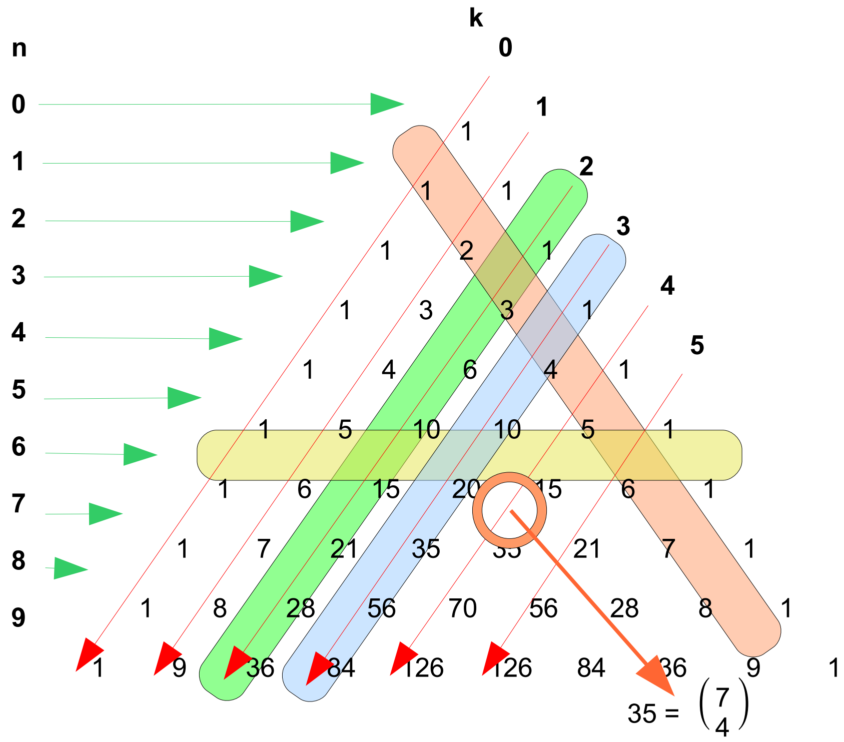
(b) Die vorletzte Zahl in jeder Zeile entspricht immer der „Diagonalennummer k“. Wieder beginnt man beim Zählen mit der „nullten Diagonalen“.

(c) In der vierten Diagonalen (k=3) liegen die Summen der darüber liegenden Dreieckszahlen (10 = 1+3+6; 20 = 1+3+6+10 ;...); aber acuh die Folge der „Tetraederzahlen“.

(d) Die Zahlen in der n-ten Zeile entsprechen stets den Koeffizienten (=Zahlfaktoren) der „**Binome**“ $(a\pm b)^n$. (Sie werden daher auch **Binomialkoeffizienten** genannt.)
Beispiel: $(a-b)^2 = (1\cdot)a^2 - 2ab + (1\cdot)b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

(e) Nummeriert man auch jeden. Eintrag einer Zeile beginnend mit 0, dann hat der k-te Eintrag in der n-ten Zeile eine kombinatorische Bedeutung: Dies ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Gruppe von n Elementen genau k Elemente ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen.

(f) Addiert man zwei unter einander stehende Zahlen der dritten Diagonalen, (k = 2) so ergibt sich stets eine Quadratzahl.



Betrachtet man die horizontalen Zeilen als n und die Diagonalen als k, beginnend mit k=0 an der ersten Diagonale, dann kann man aus dem Pascalschen Dreieck die Wahrscheinlichkeiten $\binom{n}{k}$ ablesen.

Um das richtige k zu finden muss man an der ersten Diagonale, in der natürlichen Zahlen stehen, den Wert um 1 reduzieren.

Treff Lernen
Christina Strauch

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Pascalsches Dreieck

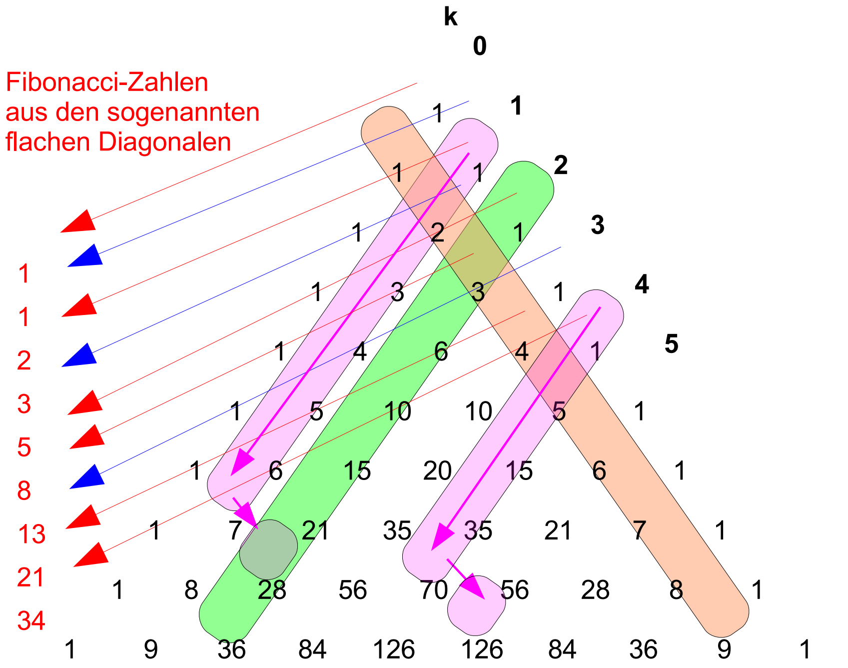
Fibonacci Zahlen und Summen

(g) Allgemein beinhaltet jeder Eintrag die Summe der darüber liegenden Diagonaleneinträge.

Jede rechts neben einer Folge liegende Folge ist immer die Folge der Partialsummen der vorhergehenden.
Z.B. ist die Dreiecksfolge 1, 3, 6, 10, 15, ... auch die Summenfolge
1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 1+2+3+4+5, ...

(h) Die dritten „Diagonale“ (k=2) enthält nach (g) Summen der darüber liegenden ersten aufeinander folgenden natürlichen Zahlen, denn: 1+2 = 3; 1+2+3 = 6; 1+2+3+4 = 10 usw. und damit die sogenannten „Dreieckszahlen“

(i) Etwas „versteckt“ liegen die nach Leonardo da Pisa (auch Fibonacci, * 1180 (?) - † 1241(?)) benannten „**Fibonacci-Zahlen**“ 1 ;1; 2=1+1 ;3=1+2 ; 5=2+3 ; 8;13; 21;34 ;... Die Summe der Einträge in den „flachen Diagonalen“ ergibt jeweils eine Fibonacci-Zahl . Als Beispiel sind auf der Seite die zweite, die vierte und die siebte „Flachdiagonale“ blau, die anderen rot gekennzeichnet: 3=F4 bzw. 13=F7



Pascalsches Dreieck	Σ	Σ'
1	$2^0 = 1$	0
1 1	$2^1 = 2$	0
1 ± 2 1	$2^2 = 4$	0
1 ± 3 3 ± 1	$2^3 = 8$	0
1 ± 4 6 ± 4 1	$2^4 = 16$	0
1 ± 5 10 ± 10 5 ± 1	$2^5 = 32$	0
1 ± 6 15 ± 20 15 ± 6 1	$2^6 = 64$	0
1 ± 7 21 ± 35 35 ± 21 7 ± 1	$2^7 = 128$	0
1 ± 8 28 ± 56 70 ± 56 28 ± 8 1	$2^8 = 256$	0
1 ± 9 36 ± 84 126 ± 126 84 ± 36 9 ± 1	$2^9 = 512$	0

Σ Die Zeilensumme im Pascalschen Dreieck liefert immer eine Potenz von 2.

Begründung: $(1 + 1)^n = 2^n$
Damit sind die Zahlen Koeffizienten von 1-er Potenzen

Σ' Die alternierende Zeilensumme im Pascalsche Dreieck ist immer 0.

Begründung: $(1 - 1)^n = 0^n$
Die Zahlen sind Koeffizienten von 1-er Potenzen mit wechselndem Vorzeichen, wegen gerader und ungerader Potenzen von (-1).

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Binomialverteilung

Definition
Die Binomialverteilung ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung für ein Merkmal, das z. B. aus zwei Ausprägungen, z. B. funktionsfähig/defekt, Wappen oder Zahl, oder blau/rot mit einer konstanten Erfolgswahrscheinlichkeit p für eine Ausprägung, z. B. defekt oder rot, annehmen kann.
Die Wahrscheinlichkeit mit der dieses Ereignis eintritt, wird mit P(X=) bezeichnet.

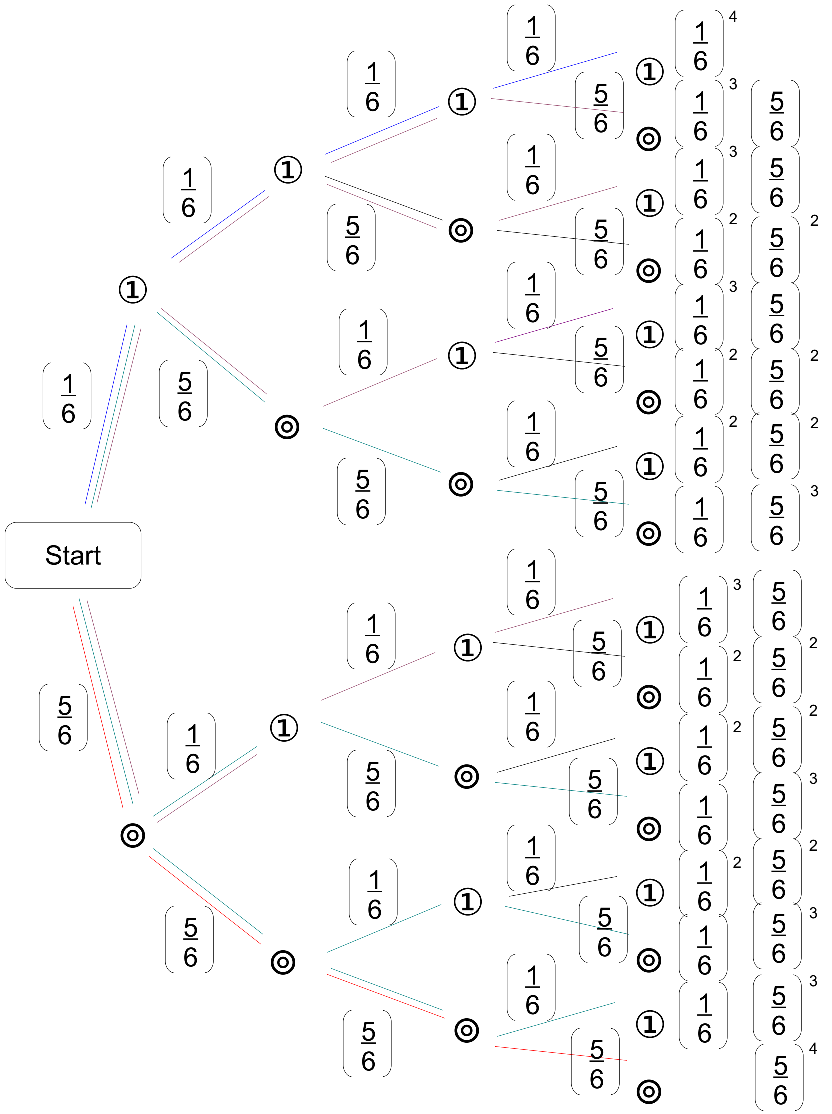
	P(„keine 1“) P(X=0)	P(„eine 1“) P(X=1)	P(zwei 1“) P(X=2)	P(„drei 1“) P(X=3)	P(„vier 1“) P(X=4)
Wie viele Pfade gehören zum Ereignis?	1	4	6	4	1
Wie sehen die Einzel-wahrscheinlich-keiten an jedem dieser Pfade aus?	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^3$	$\left(\frac{1}{6}\right)^4$
Gesamtwahr-scheinlichkeit für das Ereignis	$1\left(\frac{5}{6}\right)^4$	$4\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)$	$6\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$4\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^3$	$1\left(\frac{1}{6}\right)^4$

Betrachtet man die beiden Teilbäume, so ergibt sich folgendes Bild:

oberer Teilbaum	0	1	3	3	1
unterer Teilbaum	1	3	3	1	0
aus der Summe ergibt sich:	0 + 1	1 + 3	3 + 3	3 + 1	1 + 0
	1	4	6	4	1

Dieses Bildungsgesetz ist bekannt aus dem Pascalschen Dreieck.

A und B spielen mit einem Würfel so, dass A gewinnen soll, wenn er bei 4 Würfen zweimal oder öfters eine 1 wirft; fällt die 1 nur einmal oder gar nicht, so gewinne B.
Wie groß ist das Verhältnis der Chancen?



Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomialverteilung

Voraussetzungen zur Anwendung der Binomialverteilung:

- Die Ausprägung des Merkmalergebnisses muss zufällig sein, d. h., die Ausprägungen A oder B müssen voneinander unabhängig sein.
- Der Stichprobenumfang n entspricht der Anzahl der Merkmalsergebnisse, d.h., sie sind auf n festgelegt. Der Stichprobenumfang muss komplett “durchgeprüft” werden, um die Anzahl k zu erhalten.
- Die Wahrscheinlichkeit p und folglich auch für 1-p ist konstant.
- Es wird von einer Stichprobennahme mit Zurücklegen ausgegangen (siehe als Gegensatz hierzu hypergeometrische Verteilung). Ist der Stichprobenumfang n gegenüber dem Losumfang N klein, etwa $n < N/10$, kann in der Praxis von einer Stichprobennahme mit Zurücklegen ausgegangen werden.

Herleitung der Formel

Es sei eine Urne mit **N** Kugeln gegeben, von denen **M** weiß und **N-M** schwarz seien. Man zieht nun aus dieser Urne **n** Kugeln mit Zurücklegen, d.h. die Anzahl der weißen und schwarzen Kugeln in der Urne ist bei jedem Zug gleich. Die Frage ist nun, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass genau **k** weiße Kugeln gezogen werden. Dabei soll jede Kugel beim einmaligen Ziehen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen werden.

Betrachtet man das Zufallsexperiment als Laplace-Experiment entstehen im Ergebnis die **n** -Tupel aus Farben mit Berücksichtigung der Reihenfolge. Es gibt nun N^n Möglichkeiten (mit Wiederholung und Beachtung der Reihenfolge), um überhaupt **n** Kugeln zu ziehen. Um genau **k** weiße und **n-k** schwarze Kugeln zu ziehen, hat man bei festgelegter Reihenfolge $M^k\,(N-M)^{n-k}$ Möglichkeiten. Da aber die Reihenfolge nicht interessiert, sondern nur die Tatsache, dass genau **k** weiße Kugeln gezogen werden, muß noch mit der Anzahl

multipliziert werden. Die Anzahl ist $\binom{n}{k}$, denn die **k** gezogenen weißen Kugeln

können wir in dem n -Tupel auf genau $\binom{n}{k}$ Plätze verschieden anordnen, da wir

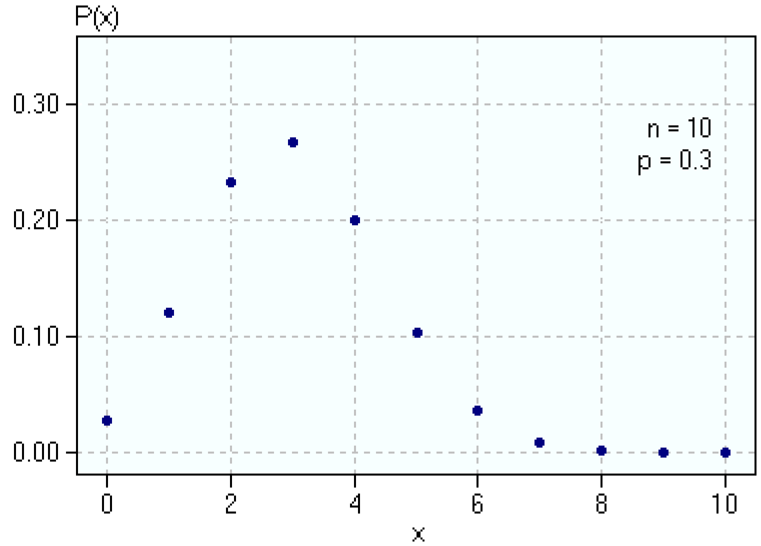
n Plätze für **k** Objekte haben. Es ergibt sich somit für die Zufallsvariable X, die einem **n**-maligen Ziehen (mit Zurücklegen) die Anzahl der weißen Kugeln zuordnet:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \frac{M^k\,(N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

Mit der Wahrscheinlichkeit M/N = p führt das zu der Formel:

Grafische Darstellung



Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

$$P(k|p,n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(k|p,n) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k (1-p)^{n-k}$$

n: Stichprobenumfang
k: Anzahl der Merkmalausprägungen A oder B (blau oder rot)
p: Konstante Erfolgswahrscheinlichkeit für A oder B
(1-p): Wenn p die konstante Erfolgswahrscheinlichkeit für A ist, dann ist (1-p) die konstante Erfolgswahrscheinlichkeit für B.
(1-p) wird oft durch q dargestellt.

Anzahl der Pfade bei n Versuchen

Die Binomialverteilung ist ein

- Ziehen mit Zurücklegen (mit Wiederholung)
- ohne Beachtung der Reihenfolge

Die Anzahl der Möglichkeiten wird deshalb durch eine
Kombination mit Wiederholung
charakterisiert.

$$\frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Alle k-Kombinationen, die aus einer n-elementigen Menge erzeugt werden können

Für die Binomialverteilung ist der Wert n = 2 zu setzen, da jedes Element zwei Merkmalsausprägungen hat: entweder Erfolg, oder Mißerfolg.
Für k ist die Anzahl der Ziehungen anzusetzen. Damit ist die Anzahl aller möglicher Zusammenstellungen aus der Formel:

$$\frac{(2+k-1)!}{k!\cdot} = \binom{2+k-1}{k} = \binom{2+k-1}{1}$$

zu ermitteln. Dabei bleibt unberücksichtigt, wie oft jeder dieser Kombinationen auftritt. Es wird nur die Frage beantwortet, welche Kombinationen entstehen können.

Beispiel

Es sollen die beiden Möglichkeiten je Ziehung durch s (schwarz) und w (weiß) gekennzeichnet werden. Für jeweils k Ziehungen gibt es folgende Möglichkeiten:

$k = 2 \Rightarrow \frac{(2+2-1)!}{2!\cdot} = \frac{3!}{2!} = 3$

ss sw ww

$k = 3 \Rightarrow \frac{(2+3-1)!}{3!\cdot} = \frac{4!}{3!} = 4$

sss ssw sww www

$k = 4 \Rightarrow \frac{(2+4-1)!}{4!\cdot} = \frac{5!}{4!} = 5$

ssss sssw ssww swww wwww

$k = 5 \Rightarrow\ = 6$

sssss ssssw sssww sswww swwww wwwww

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Anzahl der Pfade mit k Erfolgen bei n Versuchen

Bei einem n – stufigen Bernoulli – Versuch besteht jedes Element der Ergebnismenge aus n Folgeereignissen .z.B. EEMMEEEM ....EM.
Die Anzahl der Pfade mit k Erfolgen zu finden ist gleichbedeutend damit, aus der Ergebnismenge die Anzahl der Elemente zu finden, die k – mal unabhängig von der Reihenfolge einen Erfolg aufweisen.Man kann das auch so formulieren:

Auf wie viele Arten kann man k Objekte aus n Objekten unabhängig von der Reihenfolge auswählen?

Eine erste Antwort liefert die Formel der **Permutation**. n Elemente lassen

sich auf $n!$ Möglichkeiten anordnen.

Bei jeweils k Erfolgen sind die Elemente der k-Erfolge nicht unterscheidbar, aber auch die n-k Elemente der Nichterfolge lassen sich nicht unterscheiden.
Für eine **Permutation** von n Elementen, bei denen **jeweils k und n–k Elemente nicht unterscheidbar** sind gilt die Formel:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Damit ist die Definition der Binomialkoeffizienten gegeben.

Die Anzahl der Pfade mit k Erfolgen bei einem n- stufigen Bernoulli- Versuch ist:

$\binom{n}{k}$ wobei n die Anzahl der Versuche und

k die Anzahl der Erfolge ist

Bei der Anzahl der Pfade spielt es keine Rolle, wieviele Elemente von jeder Ausprägung vorhanden sind. Ob es positive Elemente 10 und negative Elemente 100, oder positive Elemente 45 und negative Elemente 5 gibt, hat darauf keinen Einfluss. Es wird nur die Frage gestellt: Auf welche Weise kann man k positive Elemente auf n verschiedenen Plätzen unterbringen. Die anderen Plätze sind dann zwangsläufig mit negativen Elementen besetzt.

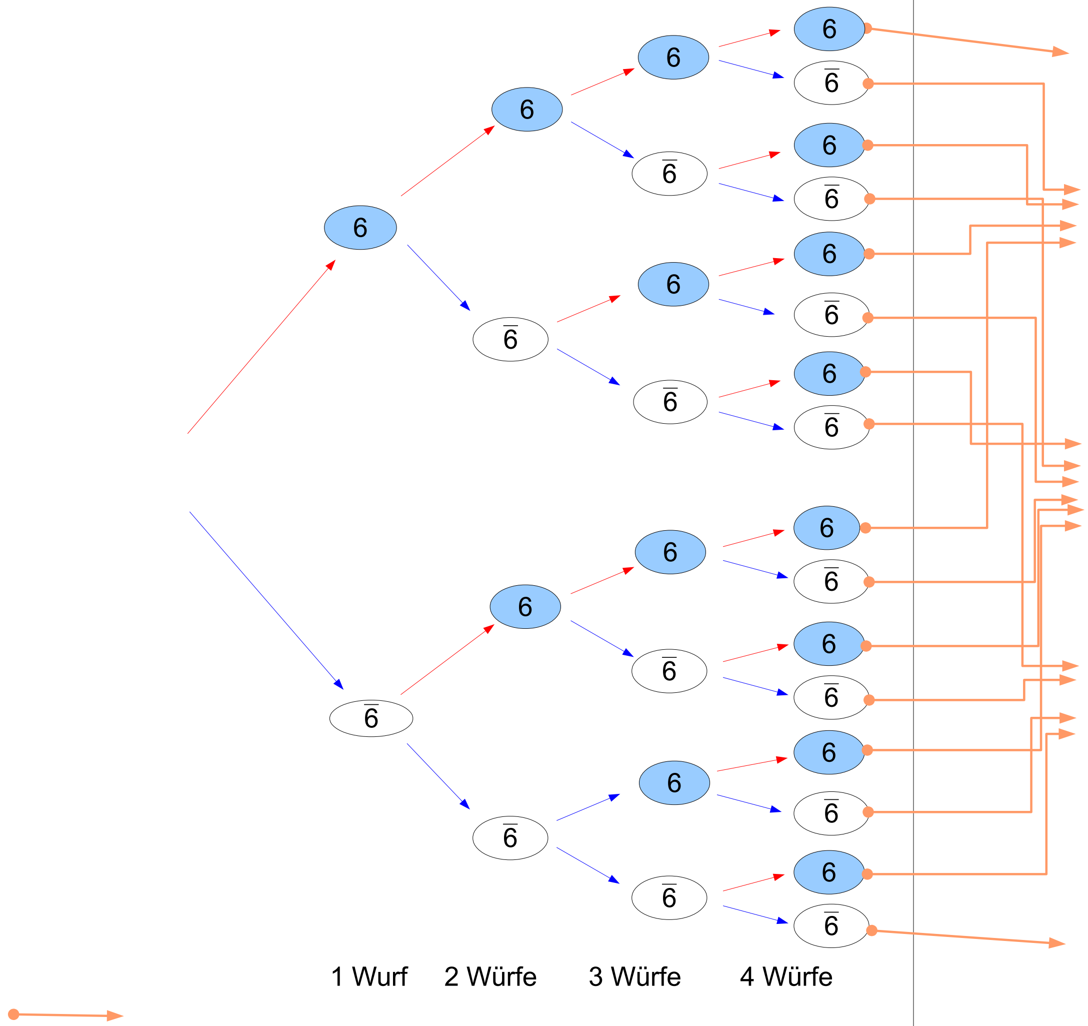
Treff Lernen
Christina Strauch

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Beim Eingangsbeispiel galt n = 4. Für diese Anzahl ergaben sich folgende Erfolgsaussichten für das Würfeln von „6“:



Ereignisse des Wurfes 4

Der Baum enthält keine Wahrscheinlichkeiten, deshalb würde der Baum genau so aussehen, wenn es sich um einen Würfel mit 8 Zahlen, 12 Zahlen oder 4 Zahlen handelt,
oder um Billardkugel, die von 1 bis 11 durchnummeriert sind. Wichtig ist nur, dass vor jedem versuch wieder alle Billardkugeln zurückgelegt werden.

	k rote Pfeile	n–k blaue Pfeile
$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!0!} = 1$	4	0
$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$	3	1
$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$	2	2
$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4$	1	4
$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!4!} = 1$	0	4

4 Würfe

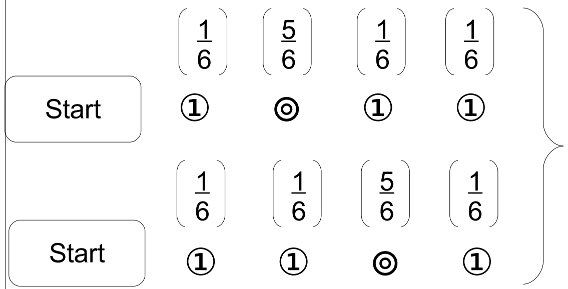
Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Wahrscheinlichkeit eines Pfades mit k Erfolgen bei n Versuchen

Die Wahrscheinlichkeit entlang eines Pfades mit. z.B. 3 Erfolgen und 1 Misserfolg ist immer die gleiche.



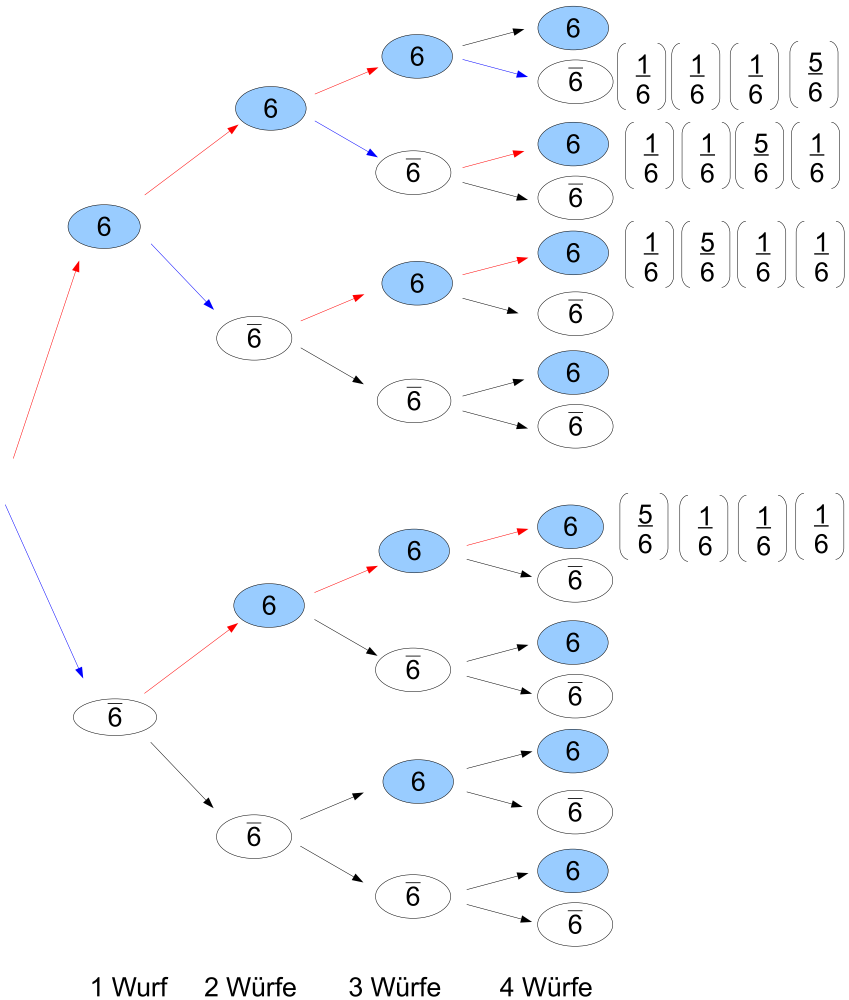
$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-3}$$

Bei jedem Pfad mit k Erfolgen tritt der Faktor der Erfolgswahrscheinlichkeit k mal auf und der Faktor der Mißerfolgswahrscheinlichhkeit n – k mal.
Das mehrfache Auftreten einen Faktors wird durch die Potenz angegeben.
Die Wahrscheinlichkeit für das k-malige Auftreten des positiven Ereignisses ist entlang jedes Pfades die gleiche. Die Pfade unterscheiden sich nur in der Reihenfolge der Faktoren, aber nicht in ihrer Anzahl.

> Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades mit k Erfolgen eines n- stufigen Bernoulli- Versuch ist:
>
> $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ p Wahrscheinlichkeit von Erfolg
>
> k die Anzahl der Erfolge ist

Bei der Wahrscheinlichkeit spielt nur eine Rolle, wie viele von jeder Ausprägung vorhanden sind. Die Wahrscheinlichkeit ändert sich mit der Gesamtzahl aller Elemente und mit dem Verhältnis zwischen positiven und negativen Elementen.
Es spielt keine Rolle, wie oft gezogen werden soll, und wieviele positive Ereignisse erwartet werden.

für k = 3 Erfolge:



Jeder Pfad für 3 Erfolge enthält 3 rote Pfeile und einen blauen Pfeil. Die Pfade unterscheiden sich nur in der Stelle, an der der blaue Pfeil auftritt. Jeder rote Pfeil steht für die Wahrscheinlichkeit 1/6 und jeder blaue Pfeil für die Wahrscheinlichkeit 5/6. Hier ändern sich in Abhängigkeit der Würfelflächen die Wahrscheinlichkeiten.

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Wahrscheinlichkeit für <u>genau</u> k Erfolge bei n Versuchen

- Bei einem **n** stufigen Bernoulli Versuch
- mit der Erfolgswahrscheinlichkeit **p**
- und der Misserfolgswahrscheinlichkeit **1- p**,
- gilt für die Wahrscheinlichkeit von **k** Erfolgen:

Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P\ (X = k) = \binom{n}{k}\ p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Wahrscheinlichkeit für <u>höchstens</u> k Erfolge bei n Versuchen

Um diesen Wert zu berechnen muss man alle Wahrscheinlichkeiten von 0 Erfolgen bis k Erfolge aufaddieren.

$$P\ (X \leq k) = P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=k)$$

Diese Werte sind schriftlich nur sehr aufwendig auszurechnen. Dazu gibt es Tafelwerke oder den GTR. Dabei ist zu beachten, dass für P(X=k) und P(X≤k) unterschiedliche Funktionen zur Verfügung stehen, wie beim GTR, oder die Berechnung über ein und dieselbe Funktion läuft, bei der ein Parameter zu übergeben ist, der angibt, ob nur eine Einzelposition oder die Summe bis zu dieser Position berechnet werden soll, wie bei Excel.

Mathematisch gesehen kommt man damit zur Verteilungsfunktion

Verteilungsfunktion

$$F_{n;p}(k) = P(X\leq k) = \sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x}\ p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Eigenschaften der Binomialverteilung

Die Binomialverteilung besitzt auch ein eigenes Symbol. Für ein Bernoulli-Experiment mit den Bezeichnungen (Länge n und p = P(A)) schreibt man anstelle von P(X=k) oft auch einfach B(n;p;k) oder b(n;p;k). Diese Schreibweise hat den Vorteil, dass sofort klar ist, wie oft das Experiment wiederholt wird und welche Wahrscheinlichkeit das betrachtete Ereignis A hat. Eine Zufallsvariable, die durch die Binomialverteilung

$$\{ (k,\ P(X=k) = B(n;p;k)) \mid k = 0,1,2,\ldots n\}$$

gegeben ist, nennt man B(n;p) -verteilt.

Mit dieser Schreibweise ergibt sich die Rekursionsformel

$$B(n;p;k+1) = \frac{n-k}{k+1}\ \frac{p}{1-p}\ \ B(n;p;k)$$

und die Symmetriegleichung

$$B(n;1-p;n-k) = B(n;p;k)$$

(Die Schreibweise ist mal wieder nicht einheitlich, so dass auch folgende Form zu finden ist: $B_{n;p}(\{k\})$. Auf jeden Fall hat die Funktion der Binomial-verteilung drei Parameter als Übergabeliste: n; p und k)

Diese Gleichung kann man sich auch anschaulich klar machen: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A genau k-mal eintritt, ist natürlich genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass das Gegenereignis $\overline{A}$ genau (n–k) – mal eintritt.

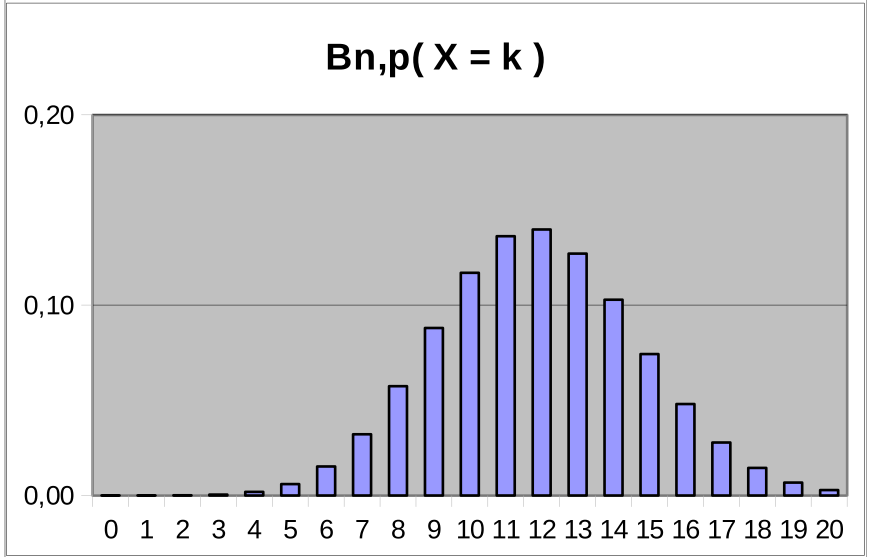
Es seien X und Y zwei (stochastisch) unabhängige Zufallsvariablen. X sei $B(n_1;p)$ – und Y sei $B(n_2;p)$ – verteilt. Dann ist auch die Summe der beiden Zufallsvariablen wiederum binomialverteilt, und zwar $B(n_1+n_2\,;\,p)$ – verteilt.

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Binomial-verteilung	**Funktionsbilder der Binomialverteilung**	Für n = 36 und p = 0,33

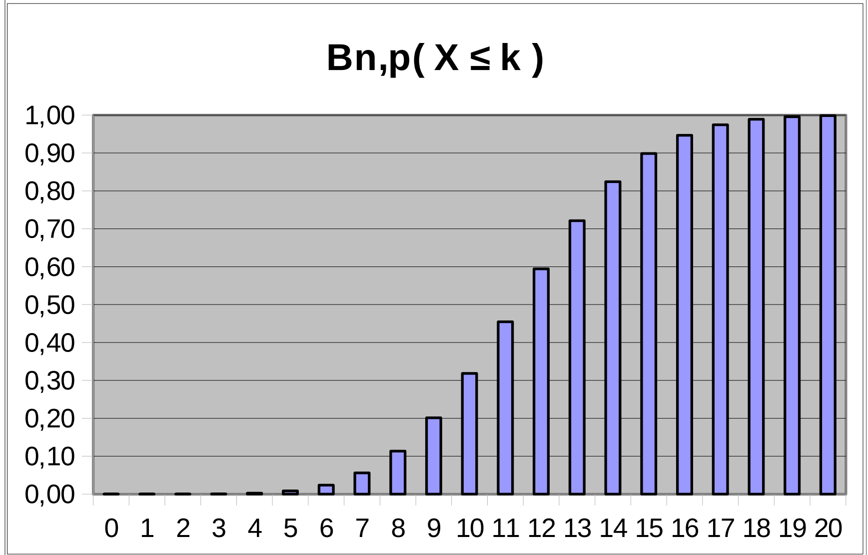
Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$B_{n,p}\,(X = k) = \binom{n}{k}\; p^k \bullet (1-p)^{n-k}$$



Verteilungsfunktion

$$F_{n;p}(k) = B_{n,p}(X \leq k) = \sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x}\; p^x \bullet (1-p)^{n-x}$$



Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomialverteilung

Anwendung Einzelwahrscheinlichkeiten

Die Binomialverteilung beschreibt den wahrscheinlichen Ausgang einer Folge von gleichartigen Versuchen, die jeweils nur zwei mögliche Ergebnisse haben (also eine Bernoulli-Verteilung aufweisen). Wenn das gewünschte Ergebnis E eines Versuches die Wahrscheinlichkeit p besitzt, und die Zahl der Versuche n ist, dann gibt die Binomialverteilung an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich insgesamt x-mal das Ereignis E einstellt.

Beispiel

Eine Glühbirnenfertigung läuft mit einem konstanten Ausschußanteil von 5% (p = 0,05). Zur Qualitätsprüfung werden 5 Leuchtkörper (Stichprobenumfang n = 5) entnommen. Im Folgenden werden die Wahrscheinlichkeiten P für das Vorfinden von genau 0, 1, 2, 3, 4 und 5 defekte Glühbirnen berechnet:

a) P(genau 0):

$$P(0|0{,}05\ ,\ 5) = \binom{5}{0}\ 0{,}05^{0}\ (0{,}95)^{5-0}\ =\ 0{,}777 = 77{,}4\ \%$$

b) P(genau 1):

$$P(1|0{,}05\ ,\ 5) = \binom{5}{1}\ 0{,}05^{1}\ (0{,}95)^{5-1}\ = 0{,}204 = 20{,}4\ \%$$

c) P(genau 2):

$$P(2|0{,}05\ ,\ 5) = \binom{5}{2}\ 0{,}05^{2}\ (0{,}95)^{5-2}\ = 0{,}021 = 2{,}1\ \%$$

d) P(genau 3):

$$P(3|0{,}05\ ,\ 5) = \binom{5}{3}\ 0{,}05^{3}\ (0{,}95)^{5-3}\ = 0{,}0011 = 0{,}11\%$$

e) P(genau 4):

$$P(4|0{,}05\ ,\ 5) = \binom{5}{4}\ 0{,}05^{4}\ (0{,}95)^{5-4}\ = 2{,}97\ 10^{-5} = 2{,}97\ 10^{-3}\ \%$$

f) P(genau 5):

$$P(5|0{,}05\ ,\ 5) = \binom{5}{5}\ 0{,}05^{5}\ (0{,}95)^{5-5}\ = 3{,}13\ 10^{-7} = 3{,}13\ 10^{-5}\ \%$$

Lautet die Fragestellung “Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit P höchstens 2 defekte Leuchtkörper in dem Stichprobenumfang n vorzufinden?” muss über die Wahrscheinlichkeitssumme PSum gegangen werden:

P(höchstens x) = P(0) + P(1) + P(2) + ... + P(x)
P(höchstens 2) = 0,774 + 0,204 + 0,021 = 0,999

Lautet sie hingegen “Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit P mindestens 2 defekte Leuchkörper im Stichprobenumfang n vorzufinden?”, wird sie wie folgt beantwortet:

P(mindestens x) = 1- P(höchstens x-1)
P(mindestens 2) = 1- (0,774 + 0,204) = 0,022

Binomialverteilung

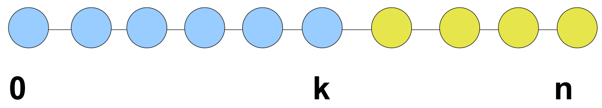
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Summierte Wahrscheinlichkeiten

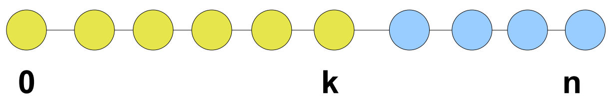
1. $P(X \le k) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \ldots + P(X=k)$
$= F_{n;p}(k)$

Die Wahrscheinlichkeit, dass **weniger als k** oder **höchstens k** (also weniger als k+1) Erfolge auftreten wird durch die Verteilungsfunktion aufsummiert.

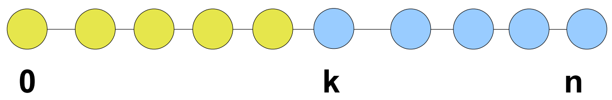


2. $P(X > k) = P(X=k+1) + P(X=k+2) + \ldots + P(X=n)$
$= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=k)]$
$= 1 - P(X \le k)$
$= 1 - F_{n;p}(k)$

Die Wahrscheinlichkeit, dass **mehr als k** Erfolge auftreten, ist die Gegenwahrscheinlichkeit, dass k oder weniger als k Erfolge auftreten.

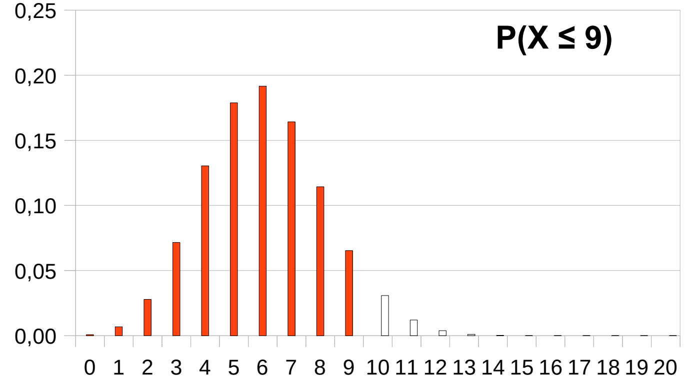


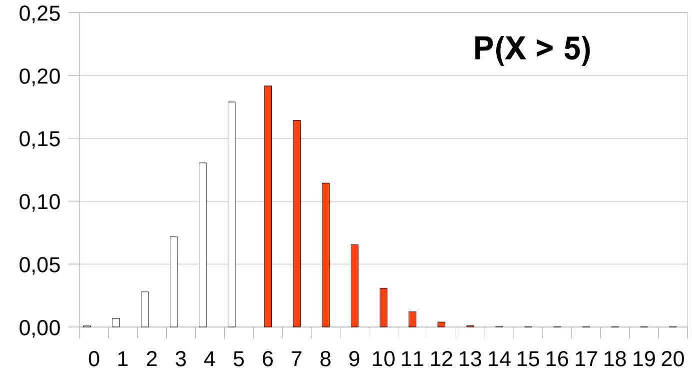
3. $P(X \ge k) = P(X=k) + P(X=k+1) + \ldots + P(X=n)$
$= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=k-1)]$
$= 1 - P(X \le k-1)$
$= 1 - F_{n;p}(k-1)$

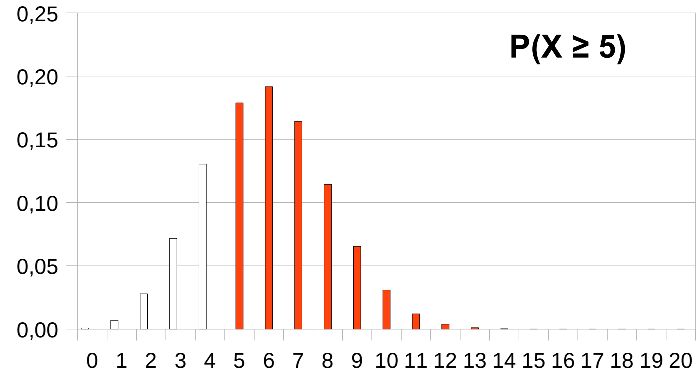


Die Wahrscheinlichkeit, dass **k oder mehr** Erfolge oder **mindestens k** Erfolge auftreten ist die Gegenwahrscheinlichkeit dazu, dass höchstens k-1 Erfolge auftreten.

n = 20 p = 0,3







Binomialverteilung

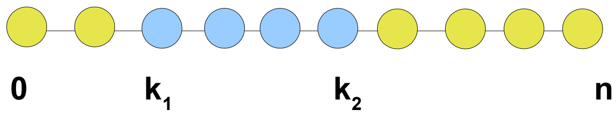
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Thema: **Binomial-verteilung**

Gesetze und Regeln

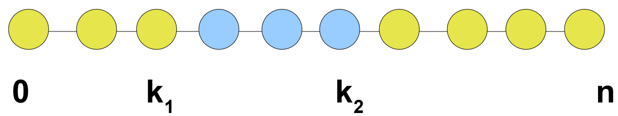
4. $P(k_1 \leq X \leq k_2) = P(X \leq k_2) - [P(X=0) + P(X=2) + \ldots + P(X=k_1-1)]$
$= P(X \leq k_2) - P(X \leq k_1 - 1)$
$= F_{n;p}(k_2) - F_{n;p}(k_1 - 1)$

Die Wahrscheinlichkeit, dass **weniger oder gleich k_2**, aber **mehr oder gleich k_1** Erfolge auftreten, lässt sich berechnen, indem man die erste Wahrscheinlichkeit, dass weniger oder gleich k_2 Erfolge auftreten, bestimmt und davon die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als k_1 Erfolge auftreten subtrahiert.

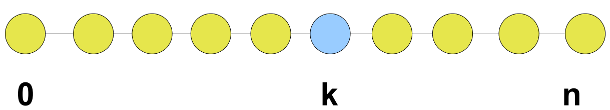


5. $P(k_1 < X \leq k_2) = P(X \leq k_2) - [P(X=0) + P(X=2) + \ldots + P(X=k_1)]$
$= P(X \leq k_2) - P(X \leq k_1)$
$= F_{n;p}(k_2) - F_{n;p}(k_1)$

Die Wahrscheinlichkeit ist wie unter 4 zu berechnen, jedoch ist diesmal die Wahrscheinlichkeit für $X=k_1$ auszuschließen, deshalb ist k_1-1 durch k_1 zu ersetzen.

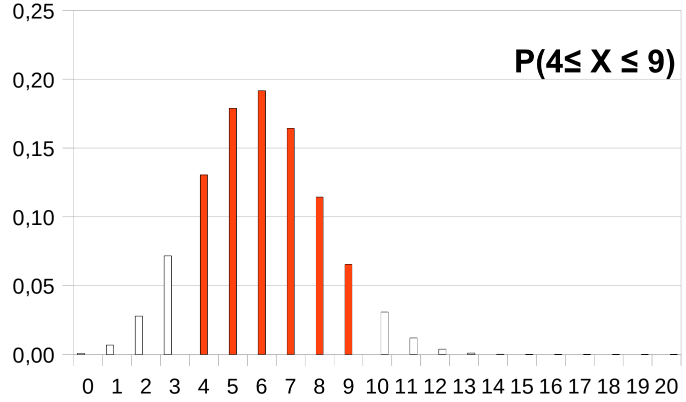


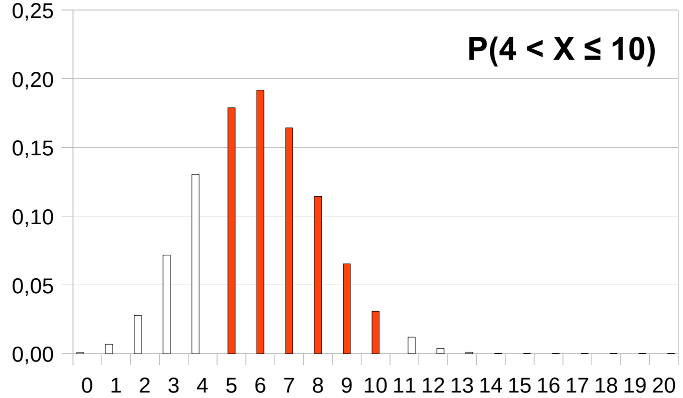
6. $P(X=k) = P(X=0) + P(X=2) + \ldots + P(X=k-1) + P(X=k)$
$- [P(X=0) + P(X=2) + \ldots + P(X=k-1)]$
$= P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$
$= F_{n;p}(k) - F_{n;p}(k-1)$

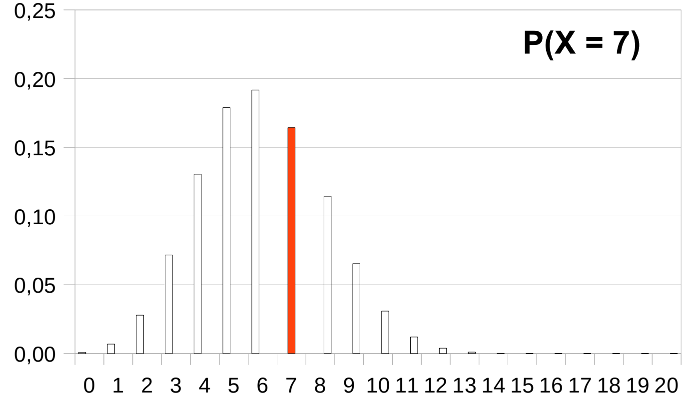


Musterbeispiele

$n = 20 \qquad p = 0{,}3$







Treff Lernen
Christina Strauch

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Binomial-verteilung	**Anwendung summierte Wahrscheinlichkeiten**	**Beispiel**

Gesetze und Regeln

Anwendung summierte Wahrscheinlichkeiten

Da die Binomialverteilung eine diskrete Verteilung ist, dh. es existieren nur für ganzzahlige Werte von k Werte für die Wahrscheinlichkeit P(X=k) kann man relativ leicht auch Summen von Wahrscheinlichkeiten berechnen.
Dabei ist zu berücksichtigen, für welchen Ausdruck das Gleichheitszeichen zugelassen ist. Steht die Frage:

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis **mindestens k** ist, dann lautete die Formel: $\mathbf{P(X \geq k)}$ und es sind alle Wahrscheinlichkeiten bis k zu summieren.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis **höchstens k**, dann lautet die Formel: $\mathbf{P(X \leq k)}$ und es sind alle Wahrscheinlichkeiten von k bis n zu addieren.

Wichtige Einschränkungen

- Es gibt keine Möglichkeit mit Tabellen oder im GTR installierten Funktionen die Wahrscheinlichkeit für „**kleiner** eine Anzahl" zu berechnen, es gibt immer nur die Möglichkeit die Wahrscheinlichkeit für „**kleiner und gleich** einer Anzahl" zu bestimmen. Deshalb muss bei Fragestellungen nach „kleiner" mit einem k-Wert der um 1 niedriger liegt gerechnet werden.
- Es gibt keine Möglichkeit mit Tabellen oder im GTR installierten Funktionen die Wahrscheinlichkeit für „**größer** eine Anzahl" zu berechnen, es gibt immer nur die Möglichkeit die Wahrscheinlichkeit für „**kleiner und gleich** einer Anzahl" zu bestimmen. Deshalb muss bei Fragestellungen nach **mindestens** immer mit dem Gegenereignis gearbeitet werden. Der Wert für k ist dann entsprechend festzulegen.

Musterbeispiele

Beispiel

Aus einer Urne mit 3 weißen und 7 schwarzen Kugeln werden 10 Kugeln mit Zurü④cklegen entnommen. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

n = 10; p = 0,3 (weiß); q = 0,7 (nicht weiß)

1. Genau 3 weiß①e Kugeln werden gezogen:

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0{,}3^{3} \cdot 0{,}7^{7} = 26{,}7\ \%$$

2. keine weiß①e Kugel wird gezogen:

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0{,}3^{0} \cdot 0{,}7^{10} = 2{,}83\ \%$$

3. H⑦öchstens 1 weiß①e Kugeln wird gezogen:

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$
$$= \binom{10}{0} 0{,}3^{0} \cdot 0{,}7^{10} + \binom{10}{1} 0{,}3^{1} \cdot 0{,}7^{9} = 10{,}4\ \%$$

4. Hö⑦chstens 9 wei①ße Kugeln werden gezogen:

$$P(X \leq 9) = 1 - P(X= 10) = 1 - \binom{10}{10} 0{,}3^{10} \cdot 0{,}7^{0} = 99{,}99\ \%$$

5. Mehr als 5 aber hö⑦chstens 7 wei①ße Kugeln werden gezogen:

$$P(5 < X \leq 7) = P(X=6) + P(X=7)$$
$$= \binom{10}{6} 0{,}3^{6} \cdot 0{,}7^{4} + \binom{10}{7} 0{,}3^{7} \cdot 0{,}7^{3} = 4{,}58\ \%$$

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

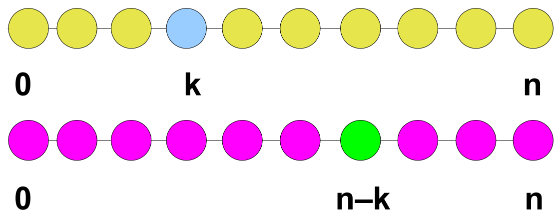
Gegenwahrscheinlichkeiten

Zusammenhänge des Ereignisses X und des Gegenereignisses Y bei der Binomialverteilung

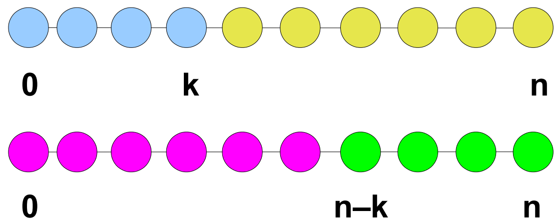
Die Wahrscheinlichkeit, dass genau k Erfolge auftreten, lässt sich berechnen, indem man die Wahrscheinlichkeit dass mindestens k Erfolge auftreten bestimmt und dann die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens k–1 Erfolge auftreten subtrahiert

X = Ereignis
Y = Gegenereignis
n = Länge der Bernoulli-Kette (Anzahl der Versuche)
p = Wahrscheinlichkeit für X $\overline{Y}$
q = Wahrscheinlichkeit für Y $\overline{X}$
k = Anzahl der Treffer

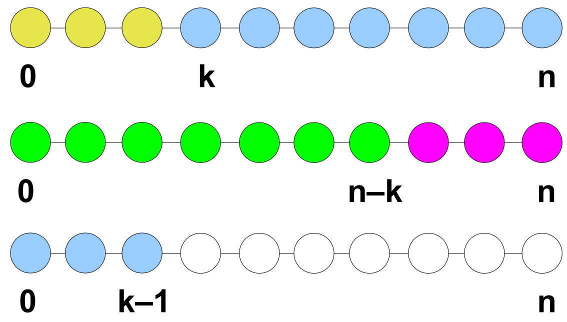
7. $P^n_p(X = k)$ = $P^n_q(Y = n–k)$



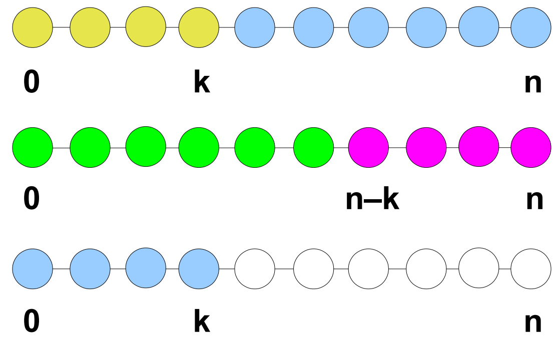
8. $P^n_p(X \le k)$ = $P^n_q(Y \ge n–k)$



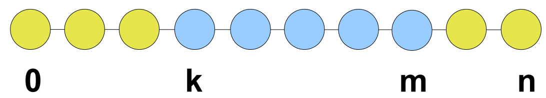
9. $P^n_p(X \ge k)$ = $P^n_q(Y \le n–k)$ = $1 - P^n_p(X \le k–1)$



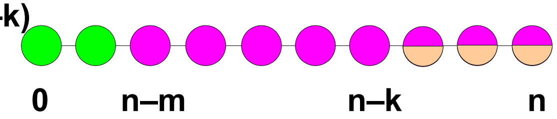
10. $P^n_p(X > k)$ = $P^n_q(Y < n–k)$ = $1 - P^n_p(X \le k)$



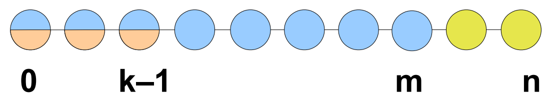
11. $P^n_p(k \le X \le m)$



= $P^n_q(n–m \le Y \le n–k)$



= $P^n_p(X \le m) - P^n_p(X \le k–1)$



Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Benutzung von Binomialtabellen

Für die Binomialverteilung existieren eine Menge von Tabellen, mit denen man vor dem Zeitalter der Taschenrechner die einzelnen Werte berechnen musste. Dabei sind Tabellen Für die Wahrscheinlichkeit P(X=k) und P(X≤k) zu unterscheiden. Im zweiten Fall handelt es sich um die kumulierten Wahrscheinlichkeiten (= Verteilungsfunktion. Dabei treten jedoch zwei Probleme auf:

(1) Was ist, wenn man P(X>k) ausrechnen muss? Diese Werte stehen in keiner Tabelle!
(2) Es sind nur Wahrscheinlichkeiten kleiner als 0,5 tabelliert. Was ist, wenn p>0,5 gilt?

Summierte Binomialverteilung (n=10; 20; 25) $P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i \cdot (1-p)^{n-i}$

n	k	p 0,01	0,05	0,1	$\frac{1}{6}$	0,2	0,25	0,3	$\frac{1}{3}$	0,4	0,5	k	n
10	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1615	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0060	0,0010	9	10
	1	0,9957	0,9139	0,7361	0,4845	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0464	0,0107	8	
	2	0,9999	0,9885	0,9298	0,7752	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,1673	0,0547	7	
	3	1,0000	0,9990	0,9872	0,9303	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,3823	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9984	0,9845	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,6331	0,3770	5	
	5		1,0000	0,9999	0,9976	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,8338	0,6230	4	
	6			1,0000	0,9997	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9452	0,8281	3	
	7				1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9877	0,9453	2	
	8					1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9893	1	
	9							1,0000	1,0000	0,9999	0,9990	0	
	0	0,8179	0,3585	0,1216	0,0261	0,0115	0,0032	0,0008	0,0003	0,0000	0,0000	19	
	1	0,9831	0,7358	0,3917	0,1304	0,0692	0,0243	0,0076	0,0033	0,0005	0,0000	18	
	2	0,9990	0,9245	0,6769	0,3287	0,2061	0,0913	0,0355	0,0176	0,0036	0,0002	17	
	3	1,0000	0,9841	0,8670	0,5665	0,4114	0,2252	0,1071	0,0604	0,0160	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9568	0,7687	0,6296	0,4148	0,2375	0,1515	0,0510	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9887	0,8982	0,8042	0,6172	0,4164	0,2972	0,1256	0,0207	14	

(1)

Offensichtlich gilt: P (X > k) + P(X ≤ k) = 1.
In Worten: X ist immer entweder größer als k oder kleiner/gleich k. Man kann also P(X > k) durch 1 – P(X ≤ k) ausdrücken (und ausrechnen, Gegenwahrscheinlichkeit!).
Zu den Gegenwahrscheinlichkeiten beachte man die vorhergehenden Seiten.

Beispiel zu (1):

Der Tabelle entnimmt man etwa: $P_{p=0,25}(X \le 3) = 0,776$. Es gilt deshalb: P(X > 3)= 1 – 0,776 = 0,224. Mit dem „>", „<" und „≤" muss etwas aufgepasst werden. Der Wert 3 in unserem Beispiel darf nicht „doppelt" vorkommen, sondern nur in einem Intervall.
Ist etwa der Wert für P(X ≥ 3) gefragt, dann ist aus der Tabelle $P_{p=0,25}(X \le 2) = 0,5256$ abzulesen, da P(X ≥ 3) = 1 – P(X ≤ 2). Da es sich um eine diskrete Verteilung handelt, gibt es zwischen 2 und 3 keine weiteren Werte.

(2)

Wir wollen einen Wert für p = 0,75 ausrechnen. Aber für diese Trefferwahrscheinlichkeit gibt es keine Tabelle. Man betrachtet deshalb die „nicht-Treffer" – also die Ereignisse mit der Wahrscheinlichkeit p = 1 – 0,75 = 0,25. Bei n Versuchen k Treffer zu haben ist offensichtlich genauso wahrscheinlich, wie n-k „nicht-Treffer" zu haben!
Für das Ereignis wird das Gegenereignis genommen und für die entsprechende Wahrscheinlichkeit die Gegenwahrscheinlichkeit q = 1 – p.

Beispiel zu (2):

Betrachten wir einen Versuch mit n=10. Wir wollen wissen, wie wahrscheinlich weniger/gleich 4 Treffer sind, wenn die Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,75 beträgt.
Wir könnten also ebenso nach mehr oder gleich 6 „nicht Treffern" fragen (wegen 6 = 10–4). Deren Wahrscheinlichkeit ist natürlich p = 1 – 0,75 = 0,25.
Also: $\mathbf{P_{p=0,75}(X \le 4) = P_{p=0,25}(X \ge 6)}$.
(siehe dazu auf der Seite „Gegenwahrscheinlichkeit" Nummer 8)
Für den p = 0,25 Wert gibt es jedoch eine Tabelle. Jetzt muss nur noch das „≥" in ein „≤" verwandelt werden.
$\mathbf{P_{p=0,25}(X \ge 6) = P_{p=0,25}(X \le 5)}$

Binomialverteilung

Thema

Binomial-verteilung

Gesetze und Regeln

Binomiale Bäume

Wendet man bei solchen Bäumen den üblichen dreischrittigen Lösungsansatz:

(1) Genaue Formulierung des interessierenden Ereignisses E, von dem die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden soll.
(2) Zerlegung des interessierenden Ereignisses in Teilereignisse anhand eines Baumdiagramms.
(3) Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der interessierenden Pfade – P(E).

stößt man auf spezielle Mammutbäume, bei denen jeder Knoten genau 2 Nachfolger mit jeweils gleichbleibender Astwahrscheinlichkeit hat (Bernoulli-Kette). Es müssen nur wenige Stufen des Baumes skizziert werden, um zu erkennen, dass hier das Modell der Binomialverteilung verwendet werden kann. Auch die Zufallsvariable X und die benötigten Parameter ergeben sich anhand der Baumskizze. Damit ist geklärt, dass P(E) mit $Bin_{15;0,14}$ $(X \leq 5)$ bestimmt werden kann.

$1 \cdot 0{,}86^{15} + 15 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}86^{14} + 105 \cdot 0{,}14^{2} \cdot 0{,}86^{13} + 455 \cdot 0{,}14^{3} \cdot 0{,}86^{12} + 1365 \cdot 0{,}14^{4} \cdot 0{,}86^{11}$

(Zur Bestimmung der Koeffizienten siehe rechte Seite)

$= 0{,}1041 + 0{,}2542 + 0{,}2897 + 0{,}2044 + 0{,}0993$
$= 0{,}9521$
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit war die Gegenwahrscheinlichkeit:
$1 – 0{,}9521 = 0{,}04785 = 4{,}78\ \%$

Natürlich ist an dem Beispiel sofort die Binomialverteilung zu erkennen. Allerdings ist zu beachten, dass die Lösung des Problems ausschließlich aus der Theorie des Baumdiagramms entstanden ist:

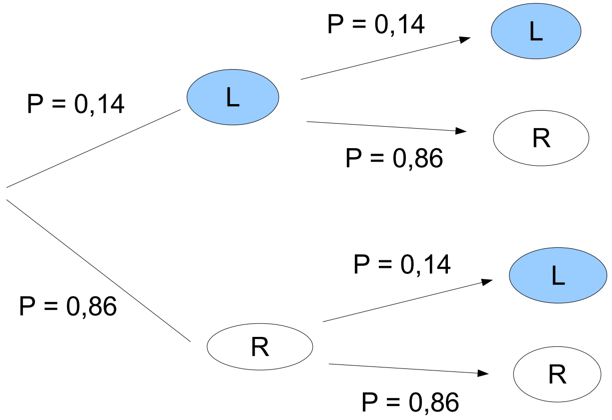
Die **Wahrscheinlichkeiten** entstehen als Produkt aus der Anzahl der jeweiligen Fälle. Jeder auftretende Linkshänder hat eine Wahrscheinlichkeit von 0,14 und jeder auftretende Rechtshänder eine Wahrscheinlichkeit von 0,86.

Die Anzahl entsteht durch Permutation von 15 Personen (=15!), wobei je nach Anzahl der Linkshänder 1,2,3,4 Elemente ununterscheidbar sind, also /LH! und der Anzahl der Rechtshänder, die ebenfalls ununterscheidbar sind /RH!.

Musterbeispiele

Der Anteil der Linkshänder betrage 14%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 15 Personen mindestens 5 Linkshänder sind?

(1) E: mind. 5 von 15 Personen sind Linkshänder



Für mindestens 5 Linkshänder ist das Gegenereignis weniger als 5 Linkshänder

Wahrscheinlichkeit	Anzahl
0 Linkshänder 15 Rechtshänder $0{,}86 * 0{,}86 * \ldots * 0{,}86$ $= 0{,}86^{15}$	$\frac{15!}{0!15!} = 1$
1 Linkshänder 14 Rechtshänder $0{,}14 * 0{,}86 * 0{,}86 * \ldots * 0{,}86$ $= 0{,}14 * 0{,}86^{14}$	$\frac{15!}{1!14!} = 15$
2 Linkshänder 13 Rechtshänder $0{,}14 * 0{,}14 * 0{,}86 * \ldots * 0{,}86$ $= 0{,}14^{2} * 0{,}86^{13}$	$\frac{15!}{2!13!} = 105$
3 Linkshänder 12 Rechtshänder $0{,}14 * 0{,}14 * 0{,}14 * 0{,}86 * \ldots * 0{,}86$ $= 0{,}14^{3} * 0{,}86^{12}$	$\frac{15!}{3!12!} = 455$
4 Linkshänder 11 Rechtshänder $0{,}14 * \ldots * 0{,}14 * 0{,}86 * \ldots * 0{,}86$ $= 0{,}14^{4} * 0{,}86^{11}$	$\frac{15!}{4!11!} = 1365$

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Binomial-verteilung	**Anwendung summierter Wahrscheinlichkeiten** **Berechnung der Länge einer Bernoullikette** Auch bei Umkehraufgaben kann an dem baumorientierten 3-Schritt festgehalten werden. Wenige Stufen des Baumes erbringen den Nachweis, dass dieses Problem im Modell der Binomialverteilung gelöst werden kann und liefern Zufallsvariable und Parameter. Für jedes n läßt sich eine Verteilungsfunktion $F_{n;p}(k)$ aufstellen, die folgendes Aussehen haben: für n = 2 $\binom{2}{0}p^0q^2 + \binom{2}{1}p^1q^1 + \binom{2}{2}p^2q^0$ für n = 3 $\binom{3}{0}p^0q^3 + \binom{3}{1}p^1q^2 + \binom{3}{2}p^2q^1 + \binom{3}{3}p^3q^0$ für n = 4 $\binom{4}{0}p^0q^4 + \binom{4}{1}p^1q^3 + \binom{4}{2}p^2q^2 + \binom{4}{3}p^3q^1 + \binom{4}{4}p^4q^0$ für n = 5 $\binom{5}{0}p^0q^5 + \binom{5}{1}p^1q^4 + \binom{5}{2}p^2q^3 + \binom{5}{3}p^3q^2 + \binom{5}{4}p^4q^1 + \binom{5}{5}p^5q^0$ Außerdem ist zu berücksichtigen, dass die Verteilungsfunktion F die Wahrscheinlichkeiten von 0 bis k aufsummiert. $F_{n;p}(k) = P(X \leq k)$ Die Aufgabenstellung **höchstens** führt immer zur Verteilungsfunktion F: $F(k) = P(X \leq k)$ $\boxed{\binom{5}{0}p^0q^5 + \binom{5}{1}p^1q^4 + \binom{5}{2}p^2q^3 + \binom{5}{3}p^3q^2} + \binom{5}{4}p^4q^1 + \binom{5}{5}p^5q^0$ Damit wird von dieser Funktion die Fragestellung abgedeckt: Es ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass bei n Versuchen **höchstens** k Erfolge auftreten.	Die Aufgabenstellung **mindestens** führt immer zur **Gegenwahrscheinlichkeit**, da es keine Funktion für $P(X \geq k)$ und diese Berechnung auf $1 - P(X \leq k-1)$ zurückgeführt werden muss. Von dieser Funktion scheinbar nicht abgedeckt wird die Fragestellung: Es ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass bei n Versuchen **mindestens** k Erfolge auftreten. $P(X \geq k)$ für die Werte n = 5 und k = 3 ergeben sich aus der linken Zusammenstellung: $\binom{5}{0}p^0q^5 + \binom{5}{1}p^1q^4 + \binom{5}{2}p^2q^3 + \boxed{\binom{5}{3}p^3q^2 + \binom{5}{4}p^4q^1 + \binom{5}{5}p^5q^0}$ Zu dieser Fragestellung ist das Gegenereignis: Es ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass bei 5 Versuchen **höchstens** 2 Erfolge auftreten. Damit kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit über das Gegenereignis und der gleichen Funktion F bestimmt werden. $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1) = 1 - F_{n;p}(k-1)$ *(siehe dazu auch“Binomialverteilung Eigenschaften“)*

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Umkehrprobleme Binomialer Bäume

Gegeben p und P; Gesucht ist n

Berechnung der Gesamtanzahl

Beispiel

Eine häufige Fragestellung lautet:
Ab welchem n liegt mit **mindestens** 90%-iger Wahrscheinlichkeit **wenigstens ein** Treffer vor, gegeben p = 0,3?

Lösung:
(Für die Wahrscheinlichkeit „mindestens 1“ ist die Gegenwahrscheinlichkeit „kein“.)

$$P(X\geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq 0{,}9$$

$$F_{n;p}(k) = \binom{n}{0} p^0q^n + \binom{n}{1} p^1q^{n-1} + \;\ldots\; + \binom{n}{n-1} p^{n-1}q^1 + \binom{n}{n} p^nq^0$$

Damit führt die Fragestellung nach P(X = 0) zum **ersten Element der Summe**

$$1 - \binom{n}{0} p^0\,(1-p)^n = 1 - 1\cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{n-0}$$

Da der Wert des Binomialkoeffizienten = 1 (alle Binomialkoeffizienten „ … über 0“ führen zu einem Wert =1) und die Potenz von p dazu führt, dass p^0 =1 ebenfalls nicht geschrieben werden braucht, führt der Ausdruck zu einer Potenz der Gegenwahrscheinlichkeit.

$$\Leftrightarrow 1 - 0{,}7^n \geq 0{,}9$$
$$\Rightarrow \; n \geq 6{,}5 \text{ mindestens } n = 7$$

Diese Gleichung läßt sich noch über den Logarithmus nach n auflösen. Da beim Auflösen der Gleichung durch einen Logarithmus dividiert werden muss, der kleiner als 0 ist (alle Logarithmen zwischen 0 und 1 sind negativ) dreht sich das Ungleichheitszeichen bei der Division um.

Beispiel

Ab welchem n liegt mit **mindestens** 90%-iger Wahrscheinlichkeit **wenigstens zwei** Treffer vor, gegeben p = 0,3?

$$1 - \binom{n}{0} p^0\,(1-p)^n - \binom{n}{1} p^1\,(1-p)^{n-1} = 1 - 1\cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{n-0} - n\cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^{n-2}$$
$$= 1- 0{,}7^n - n\,0{,}3 \cdot 0{,}7^n \cdot 0{,}7^{-2}$$
$$= 1- 0{,}7^n\,(1 + n\,0{,}3 \cdot 0{,}7^{-2})$$

Damit ist das normale schriftliche Rechnen vorbei. Diese Gleichung lässt sich per Hand nicht auflösen. Hier muss mit der Verteilungs-funktion gearbeitet werden.

$$P(X\geq 2) \;=\; 1 - P_{n;0,3}(X \leq 1) \;\geq\; 0{,}9$$
$$P(X\leq 1) \;=\; F_{n;0,3}\,(1) \;\leq\; 0{,}1$$

Verteilungsfunktion der Binomialverteilung

$$\boxed{F_{n;p}\,(k) = F(n;p;k)}$$

$$F_{n;0,3}\,(1) = F(n;0{,}3;1)$$

(Wenn die Wahrscheinlichkeit für ≥ 2 90 % betragen soll, ist die Wahrscheinlichkeit für ≤ 1 10%. Es ist deshalb das Gegenereignis zu wählen, weil die Funktion F die Werte X ≤ k angibt.)

Jetzt ist für verschiedene n die Wahrscheinlichkeitsfunktion F für den Wert k=1 und p = 0,3 aufzulisten und zu prüfen, für welches n der Funktionswert kleiner als 0,1 ist

(Hier kann nicht mehr direkt gerechnet werden. Die Lösung ist nur noch über zielgerichtetes Probieren möglich, das in einer Liste dargestellt wird.

n=10	F(10;0,3;1) =	0,1493
n=11	F(11;0,3;1) =	0,1130
n=12	F(12;0,3;1) =	0,0850

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Hinweis zu den folgenden beiden Seiten

Auf den folgenden Seiten ist das nebenstehende Beispiel sehr ausführlich graphisch und rechnerisch durchgerechnet. Auf der nächsten Seite werden die Wahrscheinlichkeiten für den ersten und zweiten Wurf ermittelt, auf der darauf folgenden Seite die Wahrscheinlichkeiten für die Würfe 3 und 4. Zu allen Werten ist erkennbar, wie sie entstehen. Es wird empfohlen die Werte alle mit dem GTR nachzurechnen, um den Lösungsweg zu verstehen.

Die Einzelwahrscheinlichkeiten $\binom{n}{k} p^{k} (1–p)^{n-k}$

entsprechen der Funktion B(n;p;k)

$\binom{1}{1} \frac{1}{6}^{1} \frac{5}{6}^{0}$

B(1;0,666; 1)

= $0{,}166\overline{6}$

Die summierte Wahrscheinlichkeit
P(X≥ 2) = 1 – F(1)
entsteht durch aufsummieren der einzelnen B Funktionswerte vom unteren Rand der Seite, da dort die Position für k=0 liegen.

Am unteren Rand sind die Wahrscheinlichkeiten für „in keinem Wurf eine 6“ Damit gibt es keine günstiges Ereignis, also k=0

F(2;0,666; 1)

= 0,9722

B(2;0,666; 1)

= $0{,}277\overline{7}$

+

B(2;0,666; 0)

= $0{,}694\overline{4}$

+

Beispiel

Wie oft muss man einen gerechten Würfel mind. werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. 95% mind. 3-mal eine „6“ zu erhalten?

(1) E: Man erhält mindestens 3-mal eine „6“

$P(X \geq 2) \geq 0{,}95$

$Bin_{n;\,0,167}(X \geq 2) \geq 0{,}95$

Es ist die summierte Binomialfunktion (Verteilungsfunktion) zu verwenden

$Bin_{n;\,0,167}(X \geq 2) = 1 - F_{n;\,0,167}(1) \geq 0{,}95$

Die summierte Binomialfunktion arbeitet aber mit X ≤ c

$1 - F_{n;0,167}(X \leq 1) \geq 0{,}95$

$F_{n;0,167}(X \leq 1) \leq 0{,}05$

Gesucht ist also der Wert n, ab dem die Verteilungsfunktion F für die Werte p = 1/6 und und k = 2 einen Funktionswert kleiner als 0,05 liefert.

Die Rechnung für die ersten vier Würfe zeigt, dass der Wert der Funktion F(n; 1/6 ; 1) stetig abnimmt:

F(2; 1/6 ; 1) = 0,9722
F(3; 1/6 ; 1) = 0,9259
F(4; 1/6 ; 1) = 0,8680

Damit ist die Berechnung fortzusetzen, bis auf der rechten Seite ein Wert kleiner als 0,05 steht. Da eine explizite Auflösung nach n nicht möglich ist, hilft nur, in der Funktion F den Wert für n weiter zu erhöhen und zu kontrollieren, ab wann der Funktionswert kleiner als 0,05 beträgt.

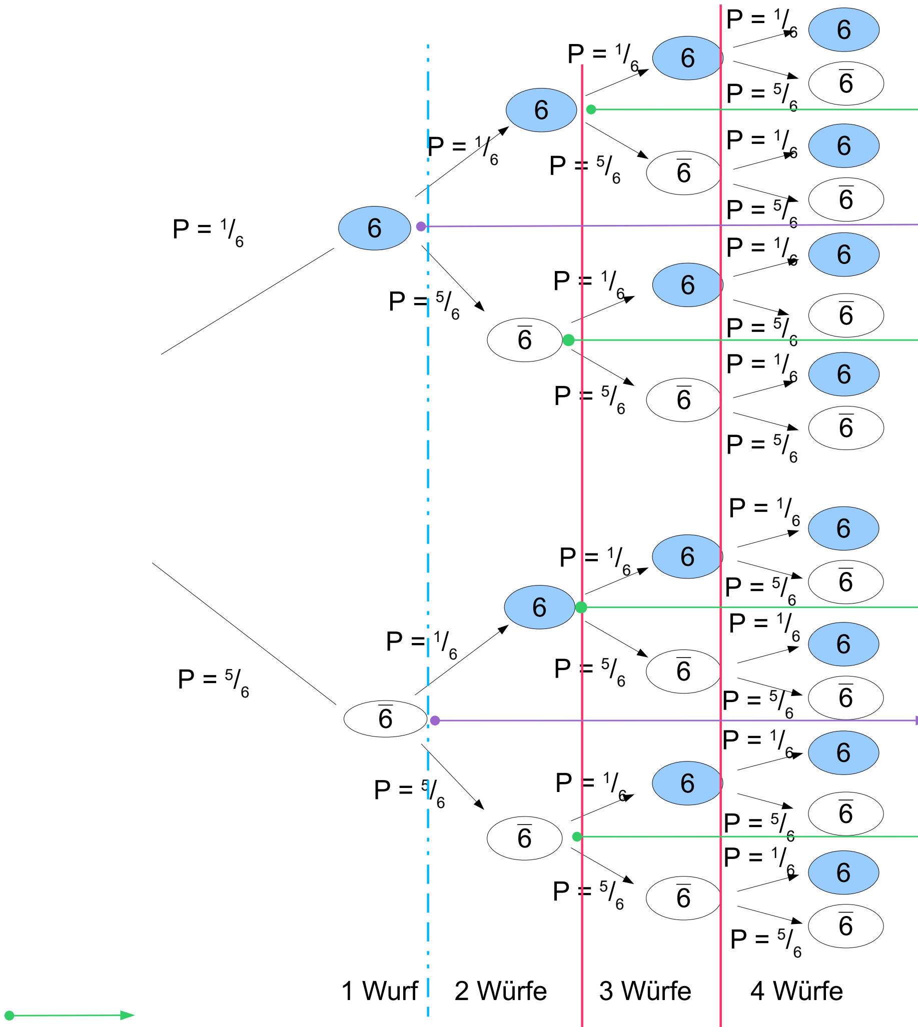
Dieser Wert wird für n = 27 erreicht. Die Berechnung sollte mit dem GTR unbedingt gemacht werden, um die Systematik zu erkennen.

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Erster und zweiter Wurf



Der Anfang eines jeden solchen Pfeiles liegt bei einem Ereignis des 2. Wurfes.
Das Ende des Pfeiles bei den Wahrscheinlichkeiten, die zu diesem Pfad gehören.
Die Anzahl der Pfeile ist die Anzahl der Ereignisse mit gleichen Wahrscheinlichkeiten, diese Anzahl wird durch den jeweils davor stehenden Binomialkoeffizienten bestimmt.

Musterbeispiele

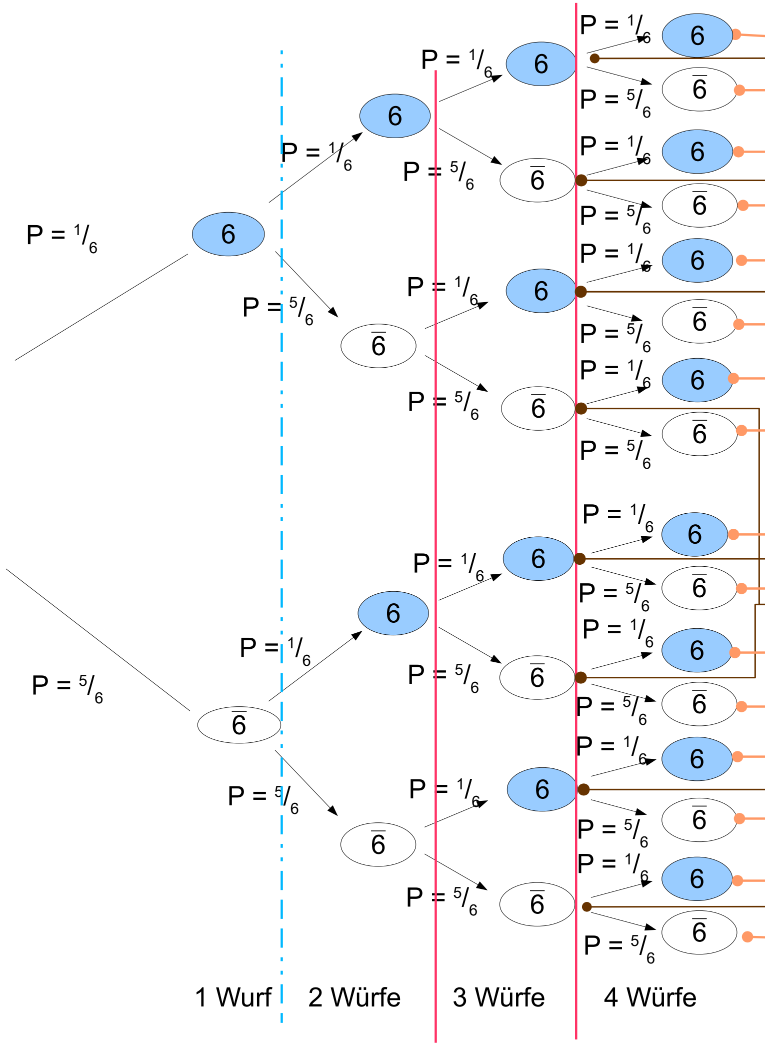
1 Wurf	2 Würfe
B(1;0,166; k)	**B(2;0,166; k)**
	$\binom{2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^0$
$\binom{1}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^0$	**B(2;0,166; 2) = 0,027$\overline{7}$**
B(1;0,166; 1) = 0,166$\overline{6}$	**F(2;0,166; 1) = 0,9722**
	$\binom{2}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^1$
	B(2;0,166; 1) = 0,277$\overline{7}$
$\binom{1}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^1$	
B(1;0,166; 0) = 0,83$\overline{3}$	$\binom{2}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^2$
	B(2;0,166; 0) = 0,694$\overline{4}$

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Dritter und vierter Wurf



Ereignisse des Wurfes 3

Ereignisse des Wurfes 4

Die Bedeutung der Pfeile auf der vorhergehenden Seite

B(3;0,166; k)

$\binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0$

B(3;0,166; 3)
$= 0{,}004\overline{629}$

$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1$

B(3;0,166; 2)
$= 0{,}069\overline{4}$

F(3;0,166; 1)
= 0,9259

$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2$

B(3;0,166; 1)
$= 0{,}347\overline{2}$

$\binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3$

B(3;0,166; 0)
$= 0{,}578\overline{703}$

3 Würfe

B(4;0,666; k)

$\binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$

B(4;0,166; 4)
= 0,0007716

$\binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$

B(4;0,166; 3)
= 0,015432

$\binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$

B(4;0,166; 2)
$= 0{,}115\overline{740}$

F(4;0,166; 1)
= 0,868055

$\binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3$

B(4;0,166; 1)
= 0,385802

$\binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4$

B(4;0,166; 0)
= 0,482253

4 Würfe

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Die Werte von F für n = 26 und einigen Prozentsätzen, der hier interessierende Prozentsatz ist 1/6 = 0,1666

		p				
n	**k**	**0,1667**	**0,1767**	**0,1867**	**0,1967**	**0,1000**
26	**0**	0,0087	0,0064	0,0046	0,0034	0,0646
	1	0,0542	0,0420	0,0324	0,0248	0,2513

Die Werte von F für n = 27 und einigen Prozentsätzen, der hier interessierende Prozentsatz ist 1/6 = 0,1666

		p				
n	**k**	**0,1667**	**0,1767**	**0,1867**	**0,1967**	**0,1000**
27	**0**	0,0073	0,0053	0,0038	0,0027	0,0581
	1	0,0466	0,0357	0,0272	0,0206	0,2326

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Binomial-verteilung	**Umkehrprobleme Binomialer Bäume**	

Gegeben n und p; Gesucht P

Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Beispiel

Ein Tierarzt behandelt 10 kranke Tiere mit einem Medikament, das nach Angaben des Herstellers in 80 % aller Anwendungen zur Heilung führt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 9 von 10 Tieren geheilt?

Lösung:

Ereignis X: Tier wird geheilt

gegeben: n = 10; p = 0,8

gesucht: P

$$P^{10}_{0,8}\,(X\geq 9) = P(X=9) + P(X=10) = \binom{10}{9} 0{,}8^{9}\, 0{,}2^{1} + \binom{10}{10} 0{,}8^{10}\, 0{,}2^{0} = 0{,}3758$$

Lösung über die Verteilungsfunktion F :

$$F_{10\,;\,0,8}\,(X\geq 9) = 1 - F_{10\,;\,0,8}\,(X\leq 8)\;\; 1 - 0{,}6242 = 0{,}\,3758$$

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Binomial-verteilung	**Umkehrprobleme Binomialer Bäume**	

Umkehrprobleme Binomialer Bäume

Gegeben n und P; Gesucht p

Berechnung der Trefferwahrscheinlichkeit

Beispiel

Ein Gerät besteht aus 5 Bauteilen, die unabhängig voneinander mit der gleichen Funktionswahrscheinlichkeit arbeiten. Fällt ein Bauteil aus, so arbeitet das Gerät nicht mehr. Welche Funktionswahrscheinlichkeit müssen die Bauteile haben, wenn das Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % funktionieren soll?

Lösung:

Ereignis X: Bauteil funktioniert

gegeben: $n = 5$; $P > 0{,}95$

gesucht: p

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} p^5 q^0 > 0{,}95$$

$$1 \cdot p^5 > 0{,}95 \quad | \sqrt[5]{\ }$$

$$p > \sqrt[5]{0{,}95} \approx 98{,}98\%$$

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Umkehrprobleme Binomialer Bäume

Gegeben n und p (P aus Funktion bestimmen); Gesucht k

Berechnung der wahrscheinlichsten Treffer- oder Versuchsanzahl

Beispiel

Ein Großhändler versorgt 10 Geschäfte, von denen jedes Bestellungen mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 0,4 aufgibt.

a) Wie viel Bestellungen laufen mit **größter Wahrscheinlichkeit** ein? Welche Anzahl an Bestellungen ist am wahrscheinlichsten?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Zahl der Bestellungen um höchstens 1 vom wahrscheinlichsten Wert ab?

Lösung:

Ereignis X: Anzahl der Bestellungen

gegeben: n = 10; p = 0,4

gesucht: k

a) Bestimme aus der Funktion $P^{10}_{0,4}$ den Wert k, der die größte Wahrscheinlichkeit liefert: k = 4, da $P^{10}_{0,4}(X=4) = \mathbf{0{,}25}$

b) $P^{10}_{0,4}(3 \le X \le 5) = P(X \le 5) - P(X \le 2) = 66{,}6\%$

(Da die Summenfunktion immer das Gleichheitszeichen mit einschließt, braucht bei 5 nicht geändert werden, aber bei $P(X \le 3)$ wäre die 3 mit ausgeschlossen, was nicht sein soll, deshalb muss man die untere Grenze $P(X \le 2)$ wählen.)

Beispiel

Nach einem Maschinenschaden sind erfahrungsgemäß 70 % der Teile Ausschuss. Es werden 50 Teile beliebig entnommen. Mit wie vielen Teilen muss man mindestens rechnen, wenn man ein **Risiko von höchstens 10 %** eingehen möchte?

Lösung:

Ereignis X: Anzahl der schlechten Teile

gegeben: n = 50; p = 0,7 $\mathbf{P(X \ge k) \le 0{,}10}$

gesucht: k

$P^{50}_{0,7}(X \ge k) \le 0{,}10$

$1 - P^{50}_{0,7}(X \le k-1) \le 0{,}10$

(Alle Wahrscheinlichkeiten mit $P(X \ge k)$ müssen umgewandelt werden in eine Wahrscheinlichkeit $P(X \le k-1)$, da nur Funktionen existieren, die von 0 bis k aufsummieren. Damit kommt die Gegenwahrscheinlichkeit zum tragen. Es muss deshalb auch auf k – 1 zurückgegriffen werden, da es keine Funktionen für $P(X < k)$ gibt. Da es sich hier um diskrete Werte handelt, ist der nächst kleinere mögliche Wert k-1)

$P^{50}_{0,7}(X \le k-1) \ge 0{,}90$

Aus Tafeln oder einer Funktionstabelle ist der Wert von k abzulesen. Die Lösung kann also nur über Listen erfolgen und nicht direkt ausgerechnet werden. Aus der nebenstehenden Tabelle ist zu entnehmen, dass bei p=0,7 für k = 39 die vorgegebene Wahrscheinlichkeit erfüllt ist.

		p			
n	**k**	**0,3**	**0,7**	**0,96**	**0,98**
50	**35**	1,0000	0,5532	0,0000	0,0000
	36	1,0000	0,6721	0,0000	0,0000
	37	1,0000	0,7771	0,0000	0,0000
	38	1,0000	0,8610	0,0000	0,0000
	39	1,0000	0,9211	0,0000	0,0000
	40	1,0000	0,9598	0,0000	0,0000
	41	1,0000	0,9817	0,0001	0,0000

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Binomial-verteilung

Erwartungswert der Binomialverteilung

Hat eine Zufallsvariable X die Werte x_1; x_2; x_3; ..x_n dann heißt

$$E(X) = x_1 \bullet P(X=x_1) + x_2 \bullet P(X=x_2) + x_3 \bullet P(X=x_3) + \ldots + x_n \bullet P(X=x_n)$$

Erwartungswert von X.

Wir betrachten eine Bernoulli-Kette der Länge n = 3 und bestimmen den Erwartungswert der Zufallsvariablen X(ω), die die Anzahl der Treffer (Einsen) angibt, z.B. X(1, 0, 1) = 2, dann erhalten wir für alle möglichen Ereignisse folgende Angaben.

	Treffer
ω1 = (0 ,0 , 0)	**0**
ω2 = (0 ,0 , 1) ω3 = (0 ,1 , 0) ω4 = (1 ,0 , 0)	**1**
ω5 = (0 ,1 , 1) ω6 = (1 ,0 , 1) ω7 = (1 ,1 , 0)	**2**
ω8 = (1 ,1 ,1)	**3**

k	0	1	2	3
P(X=k)	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Damit liefert die Formel für den Erwartungswert:

$$E(X) = 0 \bullet q^3 + 1 \bullet 3pq^2 + 2 \bullet 3p^2q + 3 \bullet p^3$$

Da der erste Summand wegen des Koeffizienten 0 wegfällt haben alle Summanden den Faktor p:

$$\begin{aligned} E(X) &= 3p\,(q^2 + 2pq + p^2\,) \\ &= 3p\,(q + p)^2 \\ &= 3\,p \end{aligned}$$

Dabei gilt : q + p = 1
Die Zahl 3 entspricht dem n.

Damit liegt die Vermutung nahe, die sich auch allgemein bestätigen läßt:

$$\boxed{E(X) = n \bullet p}$$

Binomialverteilung

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Binomial-verteilung	**Varianz der Binomialverteilung**	

Der Erwartungswert μ gibt an, wo das "Zentrum" der Verteilung ist, er sagt nichts darüber aus, wie die Verteilung um ihr Zentrum gruppiert ist. Wir benötigen für statistische Anwendungen ein Maß für die Streuung einer Zufallsvariablen um ihren Erwartungswert.
Um eine mittlere Abweichung zu definieren, müssen wir wie beim Erwartungswert die Häufigkeit beachten, mit der die Abweichungen $k_i - \mu$ auftreten.
Zudem sind wir nicht am Vorzeichen der Abweichungen interessiert, daher nehmen wir die Quadrate $(ki - \mu)^2$. Möglich wären auch die Beträge $| k_i - \mu |$ gewesen, jedoch ist das Rechnen mit ihnen recht unhandlich.

Die Formel für die Varianz

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$$

wobei h_i die relativen Häufigkeiten sind, liefert für das beim Erwartungswert betrachtete Beispiel:

$\omega 1 = (0, 0, 0)$ **$(0 - 3p)^2$**

$\omega 2 = (0, 0, 1)$
$\omega 3 = (0, 1, 0)$ **$(1 - 3p)^2$**
$\omega 4 = (1, 0, 0)$

k	0	1	2	3
P(X=k)	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

$\omega 5 = (0, 1, 1)$
$\omega 6 = (1, 0, 1)$ **$(2 - 3p)^2$**
$\omega 7 = (1, 1, 0)$

$\omega 8 = (1, 1, 1)$ **$(3 - 3p)^2$**

$$V(X) = q^3 \cdot (0 - 3p)^2 + 3pq^2 \cdot (1 - 3p)^2 + 3p^2q \cdot (2 - 3p)^2 + p^3 \cdot (3 - 3p)^2$$

$$= q^3 \cdot 9p^2 + 3pq^2 \cdot (1 - 3p + 9p^2) + 3q^2p \cdot (4 - 6p + 9p^2) + p^3 \cdot (9 - 18p + 9p^2)$$

führt nach längerem Umrechnen zu

$$= 3 \cdot p \cdot q$$

Damit liegt die Vermutung nahe, die sich auch allgemein bestätigen läßt:

$$\boxed{V(X) = n \cdot p \cdot q}$$

Treff Lernen
Christina Strauch