Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Intergralrechnung		

Das unbestimmte Intergral

Das unbestimmte Integral ist die Umkehroperation zur Differentiation. Gesucht ist die Funktion, deren 1. Ableitung die im Integral angegebene Funktion ist. da die Ableitung einer Konstanten immer gleich 0 ist, ist das unbestimmte Integral eindeutig bis auf eine additive Konstante, hier mit C bezeichnet.

Grundintegrale

Funktion	Stammfunktion	Funktion	Stammfunktion
1	$x + C$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$	$\log_a x$	kein Grundintegral
		$\lg x$	kein Grundintegral
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\ln x$	kein Grundintegral
		$\tan(x)$	kein Grundintegral
e^x	$e^x + C$	$\cot(x)$	kein Grundintegral
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	Trigonometrische Funktionen	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$		
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$		

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Intergralrechnung	**Die Substitutionsmethode**	

Integrale der Form $\int f'(x)/f(x)\,dx$

Die Substitutionsmethode ist das Gegenstück zur Differentiation der ln(x) Funktion. Die erste Ableitung von ln(x) ist 1/x. Demzufolge ist: $\int 1/x \; dx =$ ln(x). Berücksichtigt man in der Funktion ln(x) an Stelle des Argumentes x eine weiter Funktion z.B. f(x) und beachtet dabei die notwendige Kettenregel, so ist die erste Ableitung einer Funktion y=ln(f(x)) die Funktion f '(x) / f(x).

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C}$$

Substitution: $f(x) = z$
$f'(x)\,dx = dz$

$$\int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C$$

Typische Beispiele für die Anwendung der Substitutionsmethode sind:

$$\int \frac{x^{n-1}}{x^n+a}\,dx = \frac{1}{n}\int \frac{n^* x^{n-1}}{x^n+a}\,dx = \frac{1}{n}\ln|x^n+a| + C$$

$$\int \frac{A}{x-x_1}\,dx = A^* \ln|x-x_1| + C$$

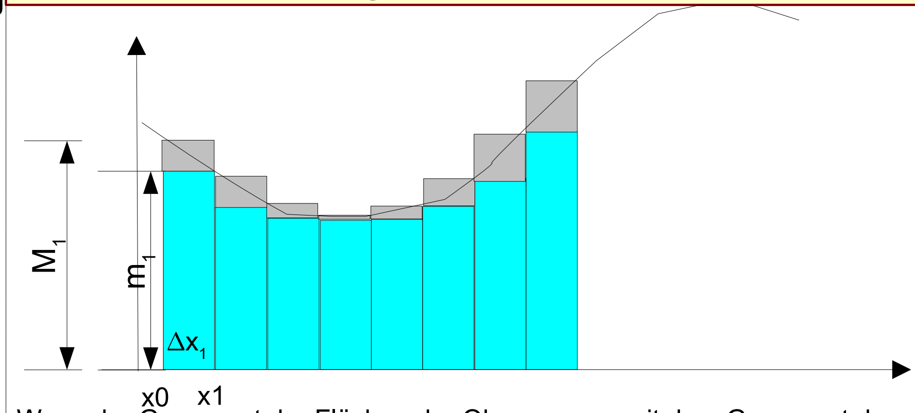
Trigonometrische Funktionen, die sich als Quotienten darstellen:

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = \ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \cot(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \ln|\sin(x)| + C$$

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Intergralrechnung	**Das bestimmte Integral**	

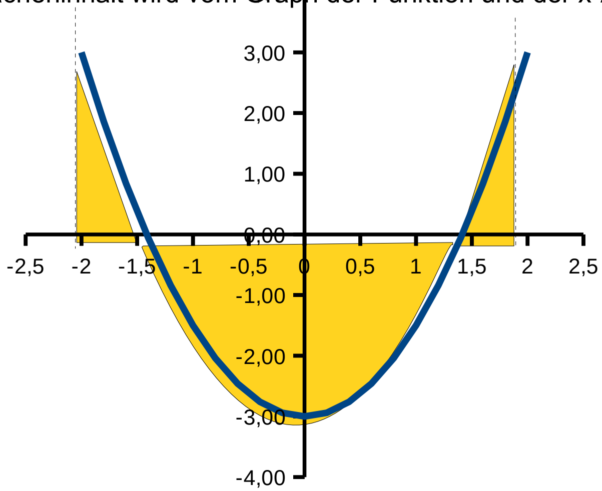


Wenn der Grenzwert der Flächen der Obergrenzen mit dem Grenzwert der Flächen der Untergrenzen im Intervall von a bis b existiert und übereinstimmt, dann heißt diese Funktion in dem Intervall von a bis b integrierbar und der Grenzwert wird als das bestimmte Integral der Funktion f(x) zwischen den Grenzen a und b bezeichnet.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i * \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i * \Delta x = F_a^{\,b} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Achtung!
In dieser Definition gibt es keinen Zusammenhang mit der Differentialrechnung und irgendwelchen Stammfunktionen. Es handelt sich nur um die Grenzwerte zweier Reihen von Flächen. Das $\int$ Zeichen dient nur als Symbolik.

Der Flächeninhalt wird vom Graph der Funktion und der x-Achse eingeschlossen.



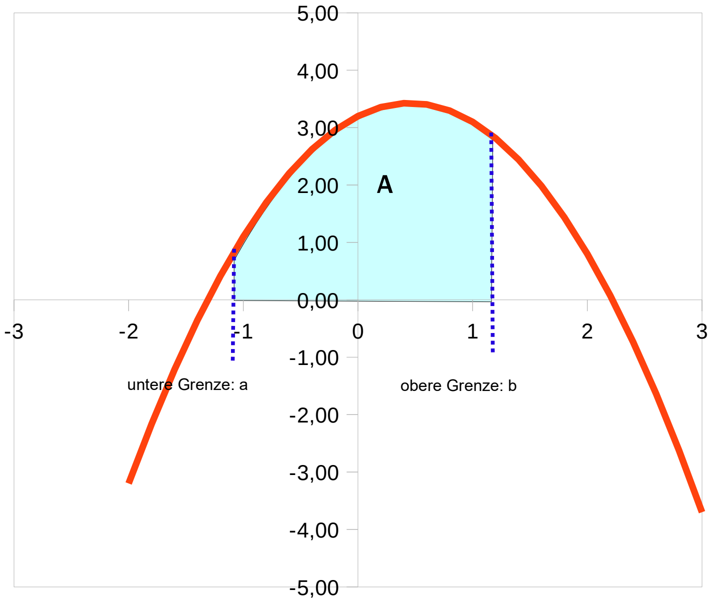
Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Intergralrechnung

Fläche unter einer Funktion

Der Flächeninhalt wird innerhalb eines **Intervalls** bestimmt. Dieses Intervall hat immer eine **untere Grenze** und eine **obere Grenze**. Die Grenzen entsprechen x-Werten, also Stellen auf der x-Achse. Innerhalb dieser Intervallgrenzen wird die Funktionskurve betrachtet, so dass die Fläche von der x- Achse, den beiden Senkrechten zur x-Achse an den Intervallgrenzen und der Funktionskurve begrenzt wird.



Die Intervallgrenzen eines bestimmten Integrals werden in der Schreibweise verdeutlicht.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Unter dem Integralzeichen steht immer die untere Grenze, darüber die obere Grenze. Die eckigen Klammern bedeuten: Intervall in den Grenzen von **a** bis **b**. **F(x)** bedeutet: Stammfunktion von **f (x)**.

Nach dem ***Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*** ist der Wert des bestimmten Integrals als Fläche, gleich der Berechnung des unbestimmten Integrals und der Differenz der Stammfunktion an der oberen Grenze minus dem Wert der Stammfunktion an der unteren Grenze

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Intergralrechnung

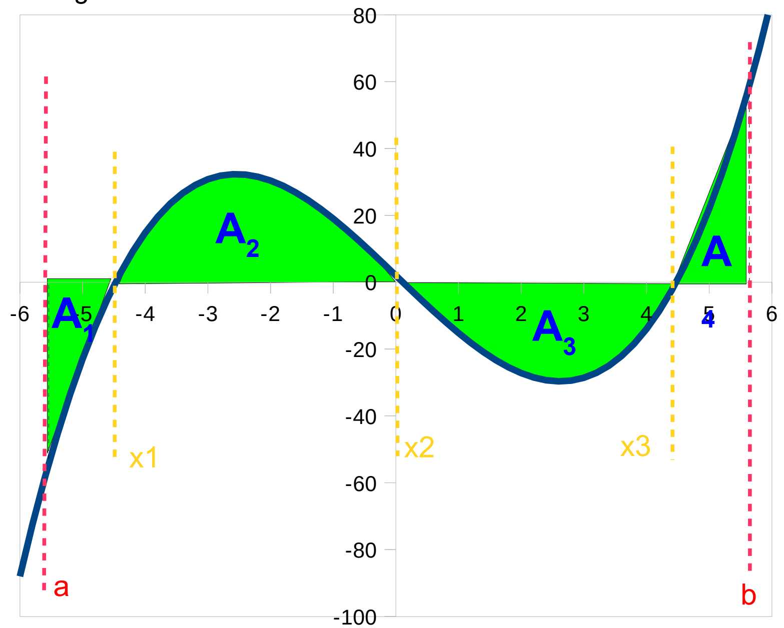
Das ‘bestimmte’ und das ‘unbestimmte’ Integral haben zunächst nichts miteinander zu tun, es sind völlig verschiedene Ansätze und Ziele:

- Das unbestimmte Integral ermittelt die Funktion F(x), deren 1. Ableitung die im Integral angegebene Funktion f(x) ist.
- Das bestimmte Integral ermittelt die Fläche unter einer Kurve als Grenzwert von zwei unendlichen Reihen.

Erst der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stellt die Verbindung her:

“Den Grenzwert der beiden unendlichen Reihen erhält man auch, wenn man die Stammfunktion bestimmt und den Wert der Stamm-funktion an der oberen Grenze von dem Wert der Stammfunktion an der unteren Grenze subtrahiert”

Zur Berechnung des **Flächeninhalts** müssen die Integrale an den Nullstellen der Funktion getrennt werden. Da der Wert des bestimmten Integrals keine Maßeinheit besitzt, ist es für technische Anwendungen denkbar, dass über die Nullstellen hinwegintegriert werden muß, der Wert hat dann eine andere Bedeutung.



$$A = \int_a^{x1} f(x)\,dx + \int_{x1}^{x2} f(x)\,dx + \int_{x2}^{x3} f(x)\,dx + \int_{x3}^{b} f(x)\,dx$$

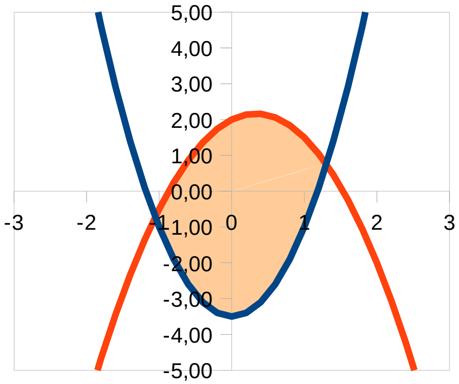
Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Intergralrechnung	**Fläche zwischen zwei Funktionen**	

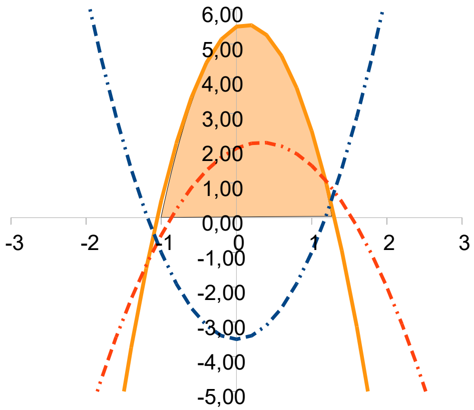
Bei Funktionen, die sich im Intervall nicht schneiden, berechnet sich die Fläche, indem man die Differenz der beiden Funktionen bildet. Damit führt man letztlich die Integration auf die Differenzfunktion zurück.

$$\int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx$$

Fläche zwischen den begrenzenden Funktionen



Fläche, die von der Differenzfunktion begrenzt wird

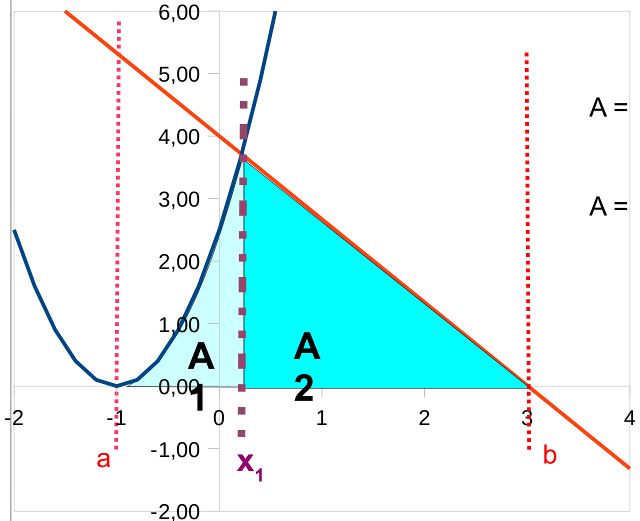


An den Schnittstellen der beiden Funktionenhat die Differenzfunktion eine Nullstelle.

Gibt es im Integrationsintervall mehrere Schnittpunkte der beiden Funktionen,
dann ist das Intervall an diesen Punkten zu trennen, denn es sind
Nullstellen der Differenzfunktion !!!!
an denen, wie vorher gezeigt die Integrale zu trennen sind.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Intergralrechnung	**Fläche, die von unterschiedlichen Funktionen begrenzt wird.**	

Die Fläche, die berechnet werden soll wird im Integrationsintervall von verschiedenen Funktionen begrenzt. Es müssen die Nullstellen der Funktionen und ihr Schnittpunkte ermittelt werden. Das Gesamtintervall besteht dann aus Teilintervallen, die an den Schnittpunkten aneinander grenzen. Jedes dieser Teilintervalle ist getrennt zu berechnen.



$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_a^{x1} f(x)\,dx + \int_{x1}^{b} g(x)\,dx$$

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Intergralrechnung

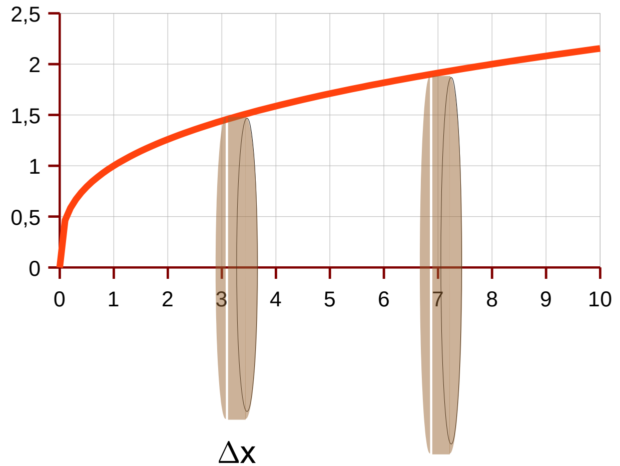
Rotationskörper

Rotation um die x – Achse

Wenn ein Kurvenbogen um eine Achse rotiert, entsteht ein dreidimensionaler Körper, den man aufgrund seiner Entstehung Rotationskörper nennt. Die Querschnittsflächen dieses Rotationskörpers sind Kreise, die ihren Mittelpunkt auf der Achse haben, um die die Kurve rotiert. Jeder Querschnittskreis hat an der Stelle x einen Radius von f(x).

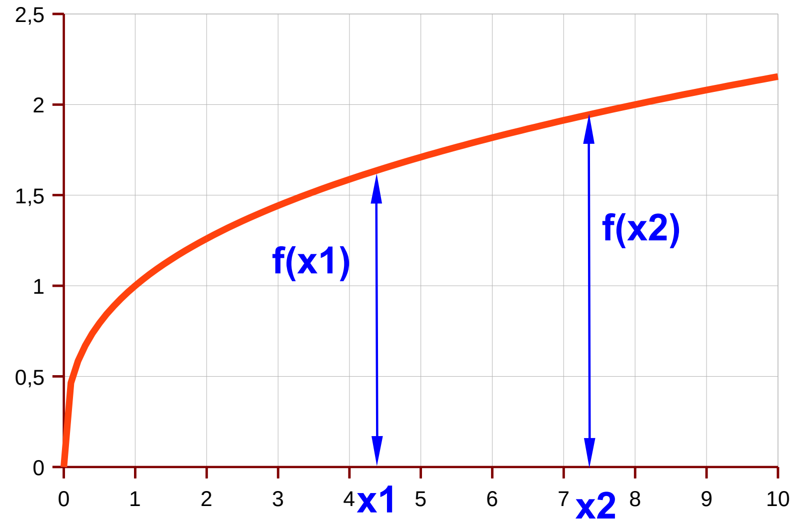
Damit hat jede Kreisscheibe eine Fläche von $\pi\cdot f(x)^2$
Diese Grundfläche ist mit der Höhe des Zylinders zu multiplizieren, um das Volumen zu erhalten. Die Höhe einer Kreisscheibe beträgt Δx.

Damit kann man sich den Rotationskörper als einen Stapel von sehr schmalen Zylindern vorstellen. Je schmaler die Zylinder werden, desto besser nähert man sich dem tatsächlichen Volumen des Körpers an. Die gedankliche Vorgehensweise ist also der des bestimmten Integrals zur Flächenberechnung völlig ähnlich. Man kann auch hier Obersummen und Untersummen von Zylindern bilden, die dann einem Grenzwert zustreben.



$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi\cdot f(x_i)^2\cdot\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi\cdot f(x_{i+1})^2\cdot\Delta x = F_a^{\,b} = \pi\cdot\int_a^b f(x)^2\,dx$$

Die Höhe des Rotationskörpers bestimmt die obere und untere Grenze des Integrals.



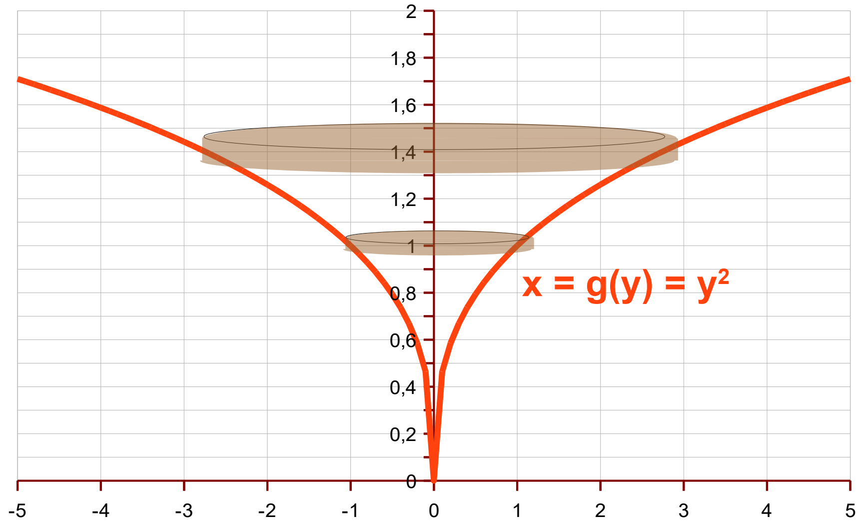
Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Intergralrechnung	**Rotation um die y – Achse**	

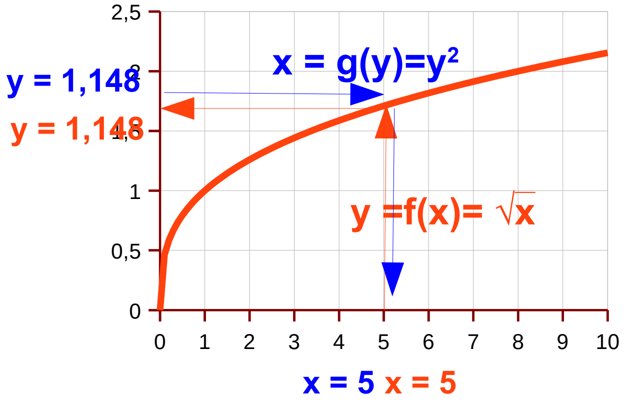
Bei der Rotation um die y – Achse entsteht ein kleines Problem. Die Grenzen des Integrals sind Werte auf der y- Achse, aber bei der Funktion ist die Variable y abhängig von x (deshalb y = f(x)) und es wurden x Grenzen angegeben.

Erste Abhilfe schafft das Auflösen der Funktion y = f(x) nach der Variablen x. Damit erhält man eine neue Funktion x = g(y). Für die Funktionskurve hat das zunächst keine Änderung zur Folge, die Funktionskurve ist die Gleiche, aber der Wert x ist jetzt abhängig von Wert y und das Integral kann über die Variable y gebildet werden, mit Grenzen auf der y-Achse.

$$V = \pi \cdot \int_{y=a}^{y=b} g(y)^2 \, dy$$



x = g(y) ist noch **n i c h t** die Umkehrfunktion, es wurde lediglich die unabhängige Variable x zur abhängigen Variablen und die abhängige Variable y zur unabhängigen Variablen.



Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Intergralrechnung	**Benutzung der Umkehrfunktion an Stelle der nach x aufgelösten Funktion g(y)**	

Mit dem Umstellen der Funktion auf x = g(y) ist die gewohnte Darstellung von Funktionen gestört. Man ist es gewöhnt, dass eine Funktion in der Form y = Funktion(x) dargestellt wird.
Wie erhält man jetzt aus der Funktion x = g(y) eine solche Funktion, die bezüglich der x und y Werte ein Verhalten wie x = g(y) zeigt, aber in der gewohnten Form geschrieben werden kann.

Man tauscht einfach die Variablen um:

x = g(y) ⟹ y = g(x)

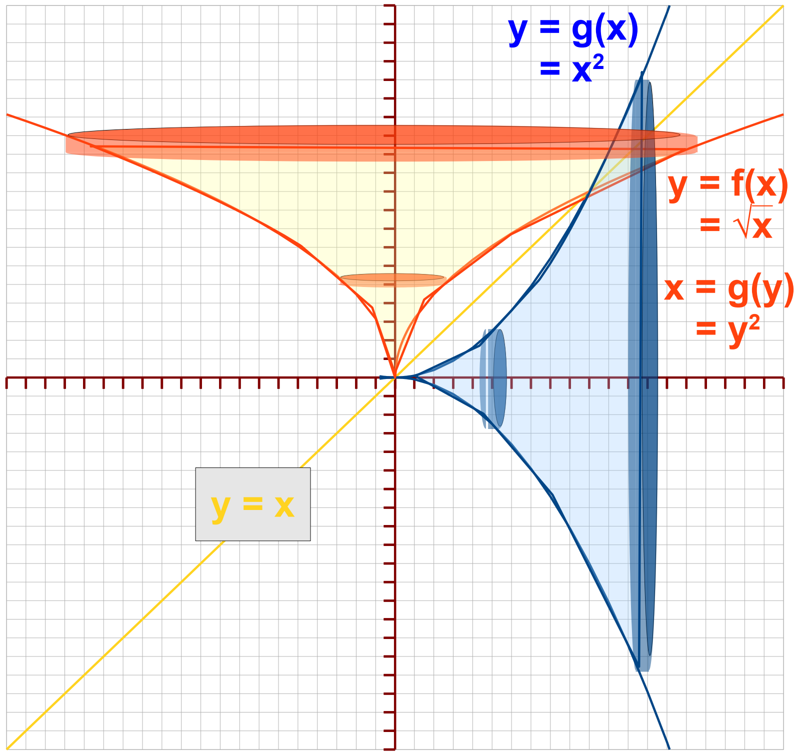
Diese Funktion bezeichnet man als **Umkehrfunktion**.

Was hat diese Funktion mit der Ausgangsfunktion y = f(x) zu tun:

1. x = g(y) ändert nicht den Graph der Funktion
2. Durch das Vertauschen der Variablen x und y in der Funktion g(x) wird die Ausgangsfunktion an der Geraden y = x gespiegelt

Jetzt kann man die Rotationszylinder, die um die y-Achse rotieren in gleicher Größe um die x – Achse rotieren lassen und benutzt dafür die Umkehrfunktion.

Nur bei einfachen Funktionen lassen sich Umkehrfunktionen wirklich erstellen. Für kompliziertere Funktionen gibt es noch andere Wege, auf die hier noch noch eingegangen wird.



Rotation der Funktion **y = √x** um die y – Achse

ist das Gleiche, wie

Rotation der Funktion **y = x²** um die x – Achse

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Wachstum	Wachstumsvorgänge	

Wachstumsvorgänge

Zunahme und Abnahme bei Wachstum

Bei einem Wachstum kann man die Änderung des Bestandes zwischen den Zeitpunkten t und t+Δt auf zwei verschiedene Weise beschreiben:

(1) Man berechnet man die Differenz der Werte zwischen den Zeitpunkten t und t + Δt : $B(t+\Delta t) = B(t) + \Delta B$, wobei **ΔB** die **Absolute Differenz** oder **Bestandsänderung** ist, die Änderung des bestandes innerhalb eines Zeitabschnittes.

(2) Man gibt die **relative** oder **prozentuale Änderung** **p** an. Diese wird durch den Quotienten

$$\frac{B(t+1) - B(t)}{B(t)} = p$$ bestimmt.

Der **Wachstumsfaktor** **q** bestimmt sich aus: $\frac{B(t+1)}{B(t)}$

oder aus q = 1 + p.

(3) Jedes Wachstum beginnt mit einem **Anfangsbestand** **B(0)**. Dieser Anfangsbestand muß von 0 verschieden sein, weil von 0 nichts wachsen kann.

(4) Der Anfangsbestand B(0) ist der Bestand zu einem Zeitpunkt, den man als t=0 bezeichnet, ansetzt. Es ist deshalb nicht korrekt, die Verlaufskurve nach links, in Richtung eines früheren Zeitpunktes, zu erweitern, da über diese Zeitpunkte nichts bekannt ist.
(In einer Nährlösung kann man mit 10 Bakterien begonnen haben und wartet ein Jahr, bis es 1000 sind. Erst ab diesem Zeitpunkt gilt der angegebene Wachstumsprozess, solange es weniger sind könnten andere Regeln gelten.
ODER:
Jemand kippt ein Gefäß mit 1000 Bakterien in die Nährlösung, die z.B aus verschiedenen Labors zusammengekauft wurden)

(5) B(t) ist der **Bestand zum Zeitpunkt t.**

(6) Ändert sich der Bestand B(t) in einem Zeitintervall Δt um die Bestandsänderung ΔB, so bezeichnet man den Quotienten ΔB/Δt als **Änderungsrate** **R**.

$$R = \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t}$$

Verkleinert man das Intervall t immer mehr kommt man zur 1. Ableitung der Funktion B(t) und kann sagen: Die Änderungsrate ist der Tangentenanstieg der Funktion B(t) im Punkt t. Änderungsraten sind auf ein bestimmtes Zeitintervall festgelegt, man kann sie beim Verdoppeln oder Halbieren des Zeitintervalls nicht ebenfalls verdoppelt werden.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lineares Wachstum

Lineares Wachstum

Das lineare Wachstum stellt noch keine wirkliche Neuerung dar. Es ist das gleiche wie eine lineare Zuordnung und besagt nichts weiter, als dass zwei Werte in einem proportionalen Verhältnis miteinander stehen. Ob es sich um Wachstum oder Abnahme handelt liegt an dem Vorzeichen des Steigungskoeffizienten der Geradengleichung.

Das lineare Wachstum ist gleichbleibend. Die Wachstumsrate pro Zeiteinheit ändert sich nicht, also bleibt die Änderungsrate konstant.

1. Dies verdeutlicht z.B. der Abbau von Alkohol im Blut. In einem bestimmten Zeitraum wird ein Teil des Alkohols im Blut abgebaut. Mit Hilfe des linearen Wachstums kann die Polizei also feststellen, wie hoch der Blutalkoholspiegel zur Zeit des Unfalls war.
2. Auch beim Auffüllen von Gefäßen oder einem Stausee kann das lineare Wachstum behilflich sein. Entscheidend ist, dass in der gleichen Zeiteinheit auch die gleiche Menge sich ändert.

(a) Beim linearen Wachstum braucht man

- einen **Anfangswert B(0)**
- und einen **konstanten Zuwachs k**

Der Zuwachs **ΔB = k** bleibt immer gleich (konstant).

(b) Als nächstes wird der Anfangsbestand mit dem Zuwachs addiert:
B(t) = B(0) + k (k Änderungsrate)
Dadurch entsteht ein neuer Bestand **B(t)**.

(c) Für den folgenden Zeitraum wird der neue Bestand B(t) zum Anfangsbestand für den Zeitraum t+1. Nun wird zu B(t) wieder der Zuwachs addiert und ein neuer Wert ermittelt: **B(t+1) = B(t) + k**.

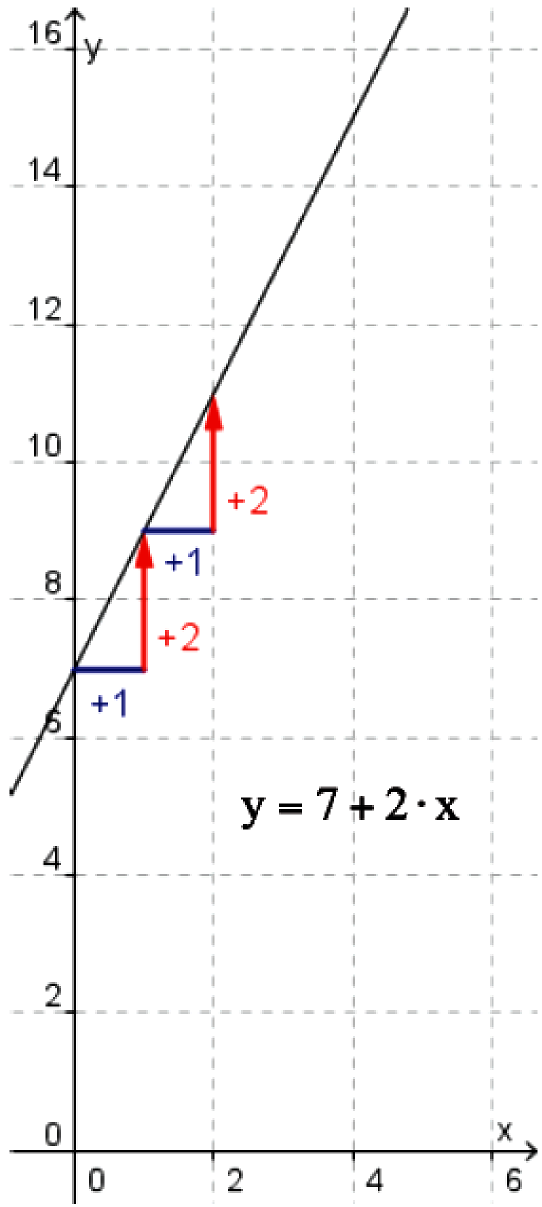
(d) Diese Rechnung kann man beliebig fortsetzen und erhält so die **Rekursionsgleichung:**

$$\boxed{B(t+1) = B(t) + k}$$

(e) Setzt man für B(t) die Formeln mit B(t-1), B(t-2),.. ein erhält man die **Funktionsgleichung:**

$$\boxed{B(t) = k \cdot t + B(0)}$$

die den aktuellen Bestand aus dem Anfangsbestand B(0) bestimmt.



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Lineares Wachstum	(f) Häufig werden Wachstumsprozesse mit Differenzialgleichungen beschrieben, weil sie kürzer und aussagefähiger sind. Für eine lineare Funktion würde diese Aussage lauten: Der Anstieg (=1. Ableitung) ist an jeder Stelle (g) der Kurve konstant: **Differenzialgleichung** **B'(t) = k k Änderungsrate** **Lösung der Differenzialgleichung** **B'(t) = k k Änderungsrate** Diese Differenzialgleichung hat die Form: y' = k. Aus der Differenzialrechnung ist bekannt, dass die erste Ableitung von y = kx die obige Gleichung erfüllt. Außerdem ist bekannt, dass bei jeder Integration eine unbestimmte Konstante zu addieren ist. Also ist die Lösung der Differenzialgleichung: **B(t) = k t + C** Da der Wert von k aus der Differenzialgleichung bekannt ist, ist der Wert für die Konstante C noch zu bestimmen. In diesem Zusammenhang spricht man bei Differenzialgleichungen von einem „Anfangswertproblem“. Es muß zu einem festen Zeitpunkt t (meist t=0) gegeben werden, welchen Funktionswert die ermittelte Funktion haben muss. Aus dieser Bedingung wird die Konstante C bestimmt. Für Wachstumsaufgaben ist es üblicherweise der bestand zum Beginn des Versuchs, also der Wert von B(0), was dann zur endgültige Gleichung führt: **B(t) = k t + B(0)**	

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Lineares Wachstum

Bestimmung des Koeffizienten k

Ein erstes und wichtiges Merkmal ist, dass der Koeffizient k eine Maßeimnheit haben muß und diese Maßeinheit ein Maß pro Zeiteinheit darstellt. Meter pro Stunge, Liter pro Minute, m³ pro 2 Tage.

In ein Wasserbecken, das bereits 10 Liter Wasser enthält, läuft gleichmäßig Wasser ein. Es ist bekannt, daß pro Minute 2 Liter zufließen.

B(0) = 10 l

k = 2 l/min

Aus einem Rohr fließen pro Minute 5 Liter Wasser in ein Becken, das anfänglich noch mit 25 Litern gefüllt war.
a) Berechne die Wassermenge, die sich nach 1, 2, 3, 5, 10, 60 Minuten im Becken befinden.
b) Wie lautet die Berechnungsformel für die Menge m(t) in Litern, die sich zum Zeitpunkt t im Becken befindet ?
c) Wann ist das 800 Liter fassende Becken voll ?

B(0) = 25 l

k = 5 l/min

a) t = 1, 2, 3,4 …

B(t) = ?

c) B(t)= 800

t = ?

Ein Becken wird so mit Wasser gefüllt, daß in 8 Minuten 50 Liter zufließen.
Zwei Stunden nach Füllungsbeginn betrug der Beckeninhalt 900 Liter.
Stelle die Wachstumsgleichung auf.

B(0) = 0 l

k = 50 l/ 8min

B(2h) = 900

ACHTUNG! Zur Berechnung sind Zeiteinheiten von 8 min zugrunde zu legen. Damit sind nach 2 Stunden 15 Zeiteinheiten vergangen und 120 min.

Beim Füllen eines Beckens stellt ein Bademeister fest, daß nach 2 Stunden 14.000 L im Becken sind und nach 14 Stunden 50.000 L.
a) Ermittle die Zuflußfunktion V(t).
b) Wieviel Wasser ist nach 10 Stunden im Becken ?
c) Nach welcher Zeit ist das Becken voll, wenn es 104.000 L faßt ?

B(2) = 14.000 l

B(14) = 50.000 l

$k = \dfrac{50.000\ l - 14.000\ l}{12\ h}$

= 3.000 l/h

B(t) = 104.000 l

t = ?

Aus einem Swimmingpool fließt Wasser aus. Es ist bekannt, daß die Füllmenge nach 40 Minuten noch 368 000 Liter und nach 3 Std. noch 256 000 Liter beträgt.
Ermittle die zugehörige Abflußfunktion, die Füllmenge sowie die Dauer der Leerung.

B(40) = 368.000 l

B(180) = 256.000 l

$k = \dfrac{256.000\ l - 368.000\ l}{140\ min}$

= – 800 l/min

B(0) = B(40) – k * 40

= 358.000 + 32.000

Es geht um einen Abfluß, also muß k ein negativer Wert sein. Nimmt man konsequent den Wert zum späteren Zeitpunkt und subtrahiert den Wert vom früheren Zeitpunkt entsteht das Vorzeichen automatisch.
Beim Rückrechnen auf den Zeitpunkt 0 muß man von einem beliebigen Zeitpunkt t subtrahieren, deshalb steht in der Formel B(0) = B(40) **–** k*40 ein Minuszeichen. Durch den neagtiven Wert von k wird aber schließlich addiert.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Exponentielles Wachstum

Exponentielles Wachstum

Anders als beim linearen Wachstum erfolgt der Zuwachs beim exponentiellen Wachstum nicht konstant, sondern proportional zum vorhandenen Bestand.

Hier ändert sich also die Wachstumsrate pro Zeiteinheit, indem sie mit dem vorhandenen Bestand multipliziert wird. Da manche Wachstumsvorgänge in der Natur so verlaufen, nennt man das exponentielle Wachstum auch natürliches Wachstum. Man kann damit aber nicht nur das Wachstum von Bakterien, Viren oder Tierarten ermitteln, sondern es dient z.B. auch zur Rechnung mit Zinseszinsen.

(a) Beim exponentiellen Wachstum braucht man zunächst einmal einen **Anfangsbestand B(0)** und einen **Faktor q**.

(b) Man benutzt hier verschiedene Größen, die genau auseinanderzuhalten sind. Zunächst kennt man die Größe **Wachstumsrate p**, die die Vermehrung des bisherigen Bestandes darstellt und nur die Änderung zwischen den einzelnen Zeitpunkten darstellt. Diese Wachstumsrate wird häufig in Prozent angegeben.

(c) Anders als beim linearen Wachstum ändert sich hier der Zuwachs proportional zum aktuell vorhandenen Bestand B(t) und nicht unabhängig vom Bestand: $B(t+1) = B(t) + k\,B(t)$.
Dabei ist k der prozentuale Wert des Wachstumsrate p: $k = p/100$. Aus der vorherigen Gleichung folgt durch Umformung:

$$\begin{aligned} B(t+1) &= B(t) + k\,B(t) \\ &= B(t) + p/100\ \ B(t) \\ &= B(t)\ (1 + p/100)\ B(t) \end{aligned}$$

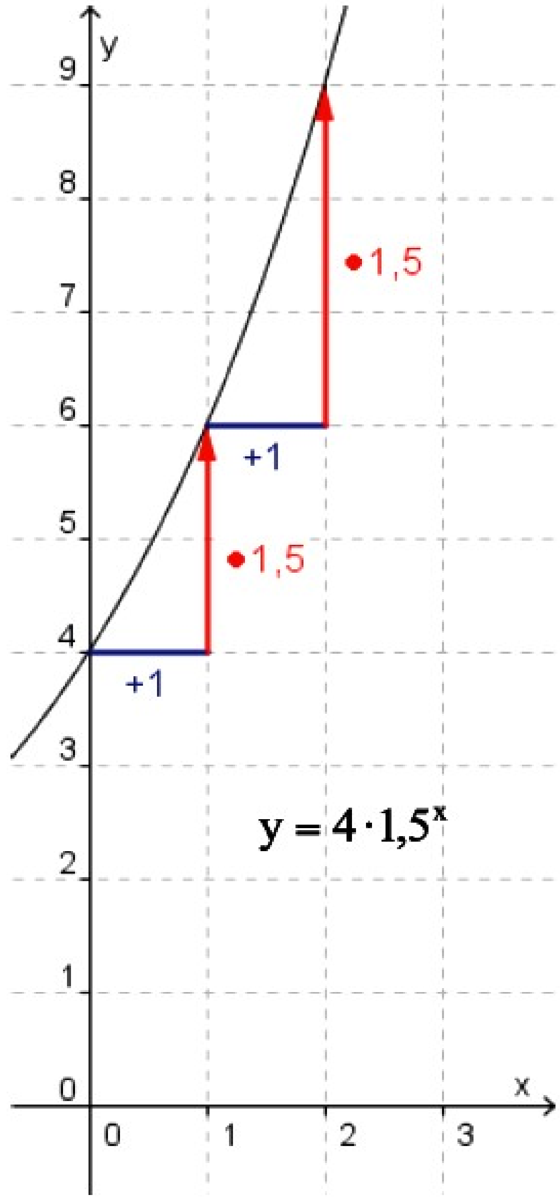
Somit erhält man als **Rekursionsgleichung:**

$$\boxed{\mathbf{B(t+1) = q \bullet B(t)}}$$

Damit ergibt sich die Änderungsrate als:

$$\mathbf{R = p \bullet B(t)}$$

(d) Dabei ist der **Wachstumskoeffizienten q**, die nächste verwendete Größe, die sich aus q = p% + 1 ergibt und zum neuen Gesamtbestand führt.



Treff Lernen
Christina Strauch

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Exponentielles Wachstum	see below	see below

Exponentielles Wachstum

Gesetze und Regeln

(e) Setzt man in die Rekursionsgleichung wieder Rückwärts die Formeln für B(t–1); B(t–2);.. ein, ergibt sich:

$B(1) = q \bullet B(0)$

$B(2) = q \bullet B(1) = q^2 \bullet B(0)$

$B(3) = q \bullet B(2) = q^3 \bullet B(0)$

und erhält die **Funktionsgleichung:** $\boxed{B(t) = q^t \bullet B(0)}$

Ein solches Wachstum kann man auch mit Hilfe einer e Funktion beschreiben. Es gilt bekanntermaßen: $a = e^{\ln(a)}$ woraus folgt:

$$\boxed{B(t) = q^t \bullet B(0) = e^{t \cdot \ln(q)} \bullet B(0)}$$

(f) Der Sachverhalt, dass sich die Änderungsrate proportional zum Bestand verhält ergibt als **Differenzialgleichung**

$$\boxed{B'(t) = \ln(q)\, B(t)}$$

Bestimmung des Koeffizienten q

Der Wert q, der aus dem Wert p resultiert ist ein vom beschriebenen Wachstum abhängige Zahl und kann deshalb nur aus der Aufgabenstellung ermittelt werden.

- Ergibt sich für q >1, dann handelt es sich um ein **exponentielles Wachstum**,
- ist 0 < q < 1 handelt es sich um eine **exponentielle Abnahme** oder **exponentiellen Zerfall**.

Lösung der Differenzialgleichung

$$B'(t) = \ln(q)\, B(t)$$

Diese Gleichung läßt sich durch B(t) dividieren:

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \ln(q)$$

Diese Gleichung ist nach t zu integrieren:

$$\int \frac{B'(t)}{B(t)}\,dt = \int \ln(q)\,dt$$

$$\ln|B(t)| = t\ln(q) + C$$

Musterbeispiele

$$B(0) = \frac{B(t)}{q^t}$$

$$q = \sqrt[t]{\frac{B(t)}{B(0)}}$$

$$t = \frac{\lg\left(\frac{B(t)}{B(0)}\right)}{\lg(q)}$$

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Exponentielles Wachstum

Durch exponieren folgt eine Auflösung nach B(t).

$$\boxed{B(t) = e^{t \cdot \ln(q)} \bullet e^{C} = q \bullet e^{t} \bullet B(0)}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems (s. Lineares Wachstum) führt dazu, dass die Konstante e^C identisch mit dem Bestand zum Zeitpunkt 0 ist, da zum Zeitpunkt t=0 die e – Funktion den Wert 1 liefert.

Charakteristisch für das exponentielle Wachstum ist die Eigenschaft, dass der Zuwachs immer proportional zur vorhandenen Population erfolgt. Mathematisch lässt sich dieses Wachstum auch als eine geometrische Reihe beschreiben, wenn es sich dabei um diskrete Schritte handelt oder durch eine Exponentialfunktion im kontinuierlichen Fall bzw. bei genügend großer Anzahl von Individuen. Der kontinuierliche Fall ist mathematisch einfacher zu handhaben als der diskrete Fall.
Das mathematische Modell des exponentiellen Wachstums ist, wie die meisten Modelle, natürlich nur eine Idealisierung, die in dieser vereinfachten Art in der Natur so nicht verwirklicht ist. Exponentielles Wachstum setzt voraus, dass es keine Begrenzung durch Ressourcen und Raum gibt. Diese Forderung ist in der Natur natürlich im allgemeinen nicht erfüllt, zumindest nicht über längere Zeiträume hinweg. Wesentlich allerdings ist, dass jede Population das Potential für exponentielles Wachstum hat, daher ist dieses Modell auch so wichtig!

Für exponentielles Wachstum müssen folgende Modellannahmen erfüllt sein:
1. Abgeschlossene Population, kein Austausch mit anderen Populationen und keine Wanderungsbewegungen.
2. Konstante Geburten- und Sterberate, unbegrenzte Resourcen.
3. Keine genetische Struktur. Die Nachkommen sind wie die Vorfahren, alle Individuen vermehren sich in der gleichen Weise.
4. Keine Altersstruktur und keine Größenstruktur.
5. Kontinuierliches Wachstum ohne Zeitlücken- aus einem Individuum geht in einer bestimmten Zeitspanne ein weiteres Individuum mit gleichen Eigenschaften hervor, aus diesem wiederum ein weiteres in einer ebenso langen Zeitspanne usw.

Bei ausreichendem Angebot an Raum und Nährstoffen vermehrt sich eine Pilzkultur stündlich um p = 4%. In einem biologischen Labor gelangen versehentlich Z(0) = 1000 Zellen dieser Kultur in den Vorratsbehälter für die Nährstofflösung.

a) Wie viele Zellen enthält die Kultur am nächsten Tag bzw. nach einer Woche um die gleiche Uhrzeit?

b) Gib eine Formel an, mit der sich Z(t) nach t Stunden berechnen lässt.

c) Nach wie vielen Stunden hat sich der Bestand verdreifacht?

d) Gib eine Formel an, mit der sich Z(t') nach t' Minuten berechnen lässt.

e) Gib eine Formel an, mit der sich Z(t'') nach t'' Tagen berechnen lässt.

$q = 1 + p\% = 1,04$

b) Z(t) für Stunden: $Z(t) = 1000 * 1,04^{t}$
a) nach 24 Stunden: $Z(24) = 1000 * 1,04^{24} = 1000 * 2,563$
nach 1 Woche: $Z(24*7) = 1000 * 1,04^{168} = 1000 * 727,1114$

c) $Z(t) = 3000 = 1000 * 1,04^{t}$

$$\frac{\log (B(t)/B(0))}{\log q} = \frac{\lg (3.000/1.000)}{\lg 1,04} = \frac{\lg 3}{\lg 1,04} = \frac{0,4771}{0,0170} = 28,06 \text{ Stunden}$$

d) Es ist über die Wachstumsformel der Bestand nach einer Minute auszurechen und daraus ein neues q zu bestimmen.
$Z(1/60) = 1000 * 1,04^{1/60} = 1000,6539$

$$q = \frac{1000,6539}{1000} = 1,0006539$$ (Benutze die obige Formel für t=1)

e) Analog zu d) ein neues q zu bestimmen.
$Z(24) = 1000 * 1,04^{24} = 2563,304$

$$q = \frac{2563,304}{1000} = 2,563304$$

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Exponentielles Wachstum

Überlagerung von exponentiellem und linearen Wachstum

Überlagerung einer linearen Zunahme mit einer exponentiellen Abnahme

$$B(t+1) = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot B(t) + B(0),$$

Für die Grenze G gilt:

$$G = B(t+1) = B(t) \quad \Rightarrow \quad B(0) = \frac{p}{100} \cdot G$$

$$\Rightarrow \quad G = B(0) / k$$

$$\text{mit } k = \frac{p}{100}$$

Im Fall einer exponentiellen Abnahme liegt ein begrenztes Wachstum vor, da der Ausdruck $q < 1$:

$B(0) = B(0);$

$B(1) = B(0) \cdot q + B(0) = B(0) \cdot (1 + q)$

$B(2) = B(1) \cdot q + B(0) = (B(0) \cdot q + B(0))\, q + B(0)$

$= B(0) \cdot (1 + q + q^2)$

$B(3) = B(2) \cdot q + B(0) = (B(0) \cdot (1 + q + q^2) \cdot q + B(0)$

$= B(0) \cdot (1 + q + q^2 + q^3)$

Es entseht eine geometrische Reihe, mit deren Summenformel man auf folgende Gleichung kommt:

$$\boxed{B(t) = B(0) \bullet \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

oder als Rekursionsformel (s. oben):

$$\boxed{B(t+1) = q \cdot B(t) + B(0)}$$

Überlagerung einer linearen Zunahme mit einer exponentiellen Zunahme

Ratensparen mit einer zusätzlichen jährlichen festen Einzahlung entsprechen dem Modell einer linearen mit einer exponentiellen Zunahme. Als Kurve kommt eine stärter wachsende Exponentialfunktion heraus, die nach oben keine Grenze hat.

Musterbeispiele

Eine Forschungsanstalt führt einen Versuch auf einem Feld aus. Auf den Acker werden wöchentlich 5 kg eines Unkrautvertilgungsmittel ausgestreut. Der Bestand nimmt wöchentlich um 31,3 % ab.
Nach wieviel Wochen gibt es 15 kg des Unkrautvertilgungsmittel auf diesem Feld ?

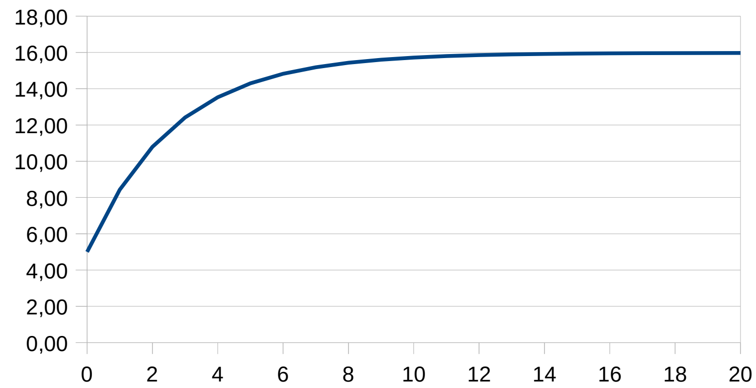
Teil 1 Geometrische Abnahme: $B_1(t) = q^t \; B_1(t)$
mit $q = 1 – p\% = 0{,}687$

Teil 2 Lineares Wachstum: $B_2(t) = k\, t$
mit k = 5kg/Woche

B(0) = 5 kg
B(1) = 0,687 * 5kg + 5 kg = 8,435
B(2) = 0,687 * 8,435 kg + 5 kg = 10,79 kg
B(3) = 0,687 * 10,79 kg + 5 kg = 12,41 kg
B(4) = 0,687 * 12,41 kg + 5 kg = 13,53 kg
B(5) = 0,687 * 13,53 kg + 5 kg = 14,29 kg
B(6) = 0,687 * 14,29 kg + 5 kg = 14,82 kg
B(7) = 0,687 * 14,82 kg + 5 kg = 15,18 kg
B(8) = 0,687 * 15,18 kg + 5 kg = 15,43 kg
B(9) = 0,687 * 15,43 kg + 5 kg = 15,60 kg

$$B(9) = 5 \bullet \frac{1 - 0{,}687^{10}}{1 - 0{,}687} = 5 \bullet \frac{0{,}97658}{0{,}313} = 5 \bullet 3{,}1200 = 15{,}60 \text{ kg}$$

Als Grenze ergibt sich in diesem Fall: G = 5 / 0,313 = 15,9744 kg
Bei t = 19 ist der Wert 15,97 schon erreicht.



Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Exponentielles Wachstum

Ein Baggersee von derzeit 2750 m² Größe wird nach dem Plan der Baufirma pro Woche um 650 m² ausgebaut. Eine Algenart bedeckt 13 m² der Wasserfläche. Die mit Algen bedeckte Fläche wächst jede Woche auf das 1,34-fache.

a) Fertige eine Wertetabelle an. Nach wie vielen Wochen ist die gesamte Fläche des Sees mit Algen bedeckt?

b) Gib jeweils eine Funktionsgleichung und den Definitionsbereich an, und stelle beide Funktionen im selben Koordinatensystem dar (Skizze). Achte dabei auf geeignete Skalierungen.

Wachstum des des Sees durch den Bagger linear, da jede Woche die gleiche Fläche dazukommt.

$F_{SEE} = 2750m^2 + 650m^2/Woche * \ t$

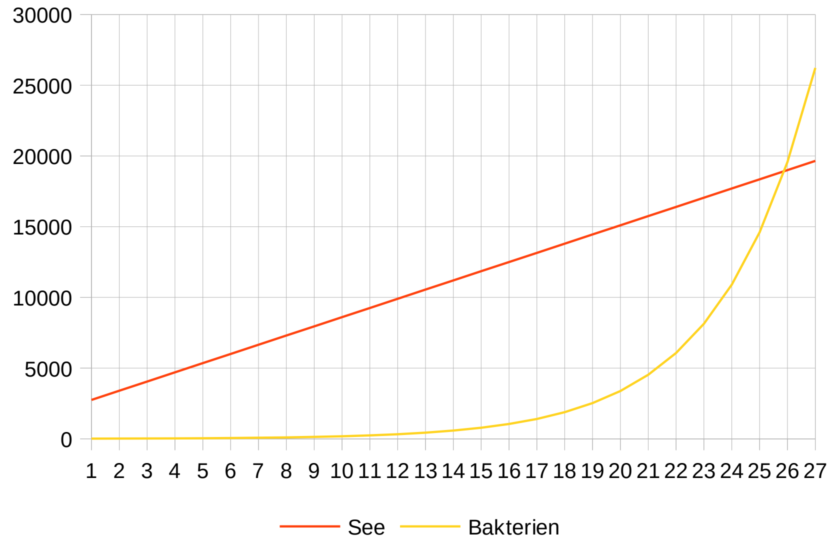
Das Wachstum der Bakterien ist exponentiell, da die Vermehrung vom Bestand abhängt.

$F_{BAKTERIEN} = 13m^2 * 1{,}34^t$

Es ist zu erkennen, dass die Algen den See nach 25 Tagen bedeckt haben.
Es ist der Schnittpunkt der beiden Kurven zu bestimmen. Für diese Art Aufgaben (lineare Funktion mit Exponentialfunktion) gibt es keine Algorithmen. Man muß auf Näherungslösungen des GTR zurückgreifen, oder den Schnittpunkt graphisch bestimmen

Auch hier handelt es sich um eine Überlagerung von Wachstumsprozesssen, auch, wenn es sich um zwei verschiedenen Stoffen handelt:
Das Wachstum des Sees beeinflußt das Wachstum der Algen.

Woche	See	Bakterien
0	2750	13
1	3400	17,42
2	4050	23,34
3	4700	31,28
4	5350	41,91
5	6000	56,17
6	6650	75,26
7	7300	100,85
8	7950	135,14
9	8600	181,09
10	9250	242,66
11	9900	325,16
12	10550	435,71
13	11200	583,86
14	11850	782,37
15	12500	1048,37
16	13150	1404,82
17	13800	1882,46
18	14450	2522,49
19	15100	3380,14
20	15750	4529,39
21	16400	6069,38
22	17050	8132,97
23	17700	10898,17
24	18350	14603,55
25	19000	19568,76
26	19650	26222,14



Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Beschränktes Wachstum

Beschränktes Wachstum

Anders als beim exponentiellen Wachstum ist beim begrenzten Wachstum der Zuwachs proportional zu einem Restbestand.

Dies ist die Differenz zwischen einem Zielwert (Grenze) und dem vorhandenem Bestand und wird auch „Sättigungsmanko" genannt). Hier kann ein bestimmter Bestand nicht überschritten werden und es gibt eine Grenze , die der Grapgh der Funktion nicht übersteigen kann (Horizontale Asymptote).

Die Änderungsrate sinkt je weiter wir uns der Grenze nähern.
Dieses Wachstum braucht man zum Beispiel, um den Verlauf bei Erwärmungsvorgängen nachzuvollziehen, da man eine bestimmte Temperatur nicht überschreiten kann. Ein Wachstum mit konstanter Wachstumsdifferenz heißt beschränktes Wachstum.

Anders als beim linearen und exponentiellen Wachstum braucht man
- einen **Anfangsbestand B(0)**
- einen **Faktor k**
- und eine **Grenze G**.

Diese wird durch den Prozess selbst bestimmt und kann, mathematisch gesehen, jeden beliebigen Wert annehmen. Um den Zuwachs zu ermitteln, bildet man zuerst die Differenz zwischen der Grenze und dem vorhandenem Bestand B(t) und multipliziert dann mit dem Faktor k. B(t+1) ist die Summe aus B(t) und dem Zuwachs.

Rekursionsgleichung

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{B(t+1) = B(t) + k \bullet (G-B(t)) = (1 - k) \bullet B(t) + k \bullet G} \\ \mathbf{B(t+1) - B(t) = k \bullet (G - B(t))} \end{array}}$$

Mit der Gegengröße **d(t) = G – B(t)** Differenz zur Grenze stellt das Sättigungsmanko dar und nimmt exponentiell ab.

$d(t) = G - B(t) \quad \Leftrightarrow B(t) = G - d(t)$

$d(t+1) = G - B(t+1) = G - (1-k) \bullet B(t) - k \bullet G = (1-k)\,(B(t) - G)$

oder

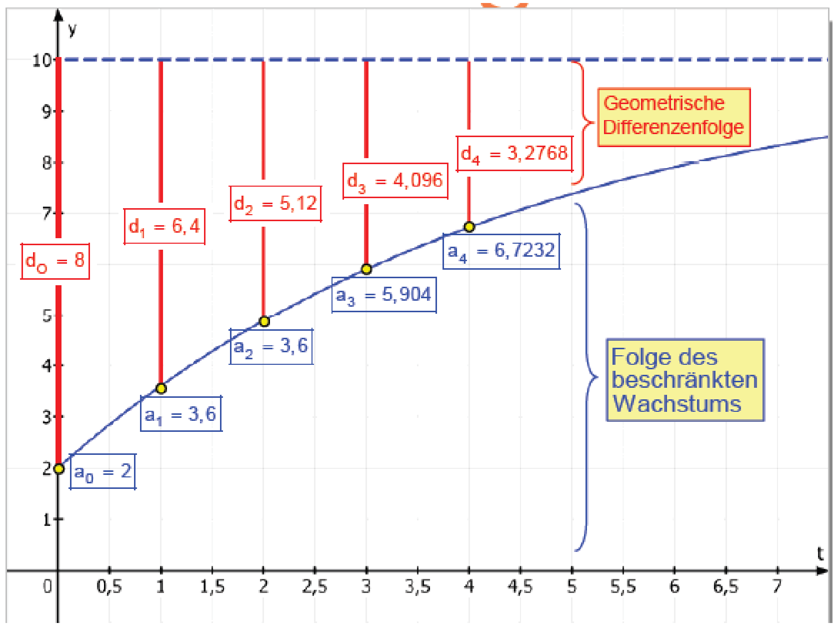
$d(t) = (1-k) \bullet d(t-1)$

$\quad = (1-k)^2 \bullet d(t-2)$

. . . .

$d(t) = (1-k)^t \bullet d(0)$

Damit zeigt die Differenzfunktion d(t) exponentielles Verhalten *(Der neue Wert entsteht aus einem Faktor mit einem Exponenten und einem Grundwert)*.



B(t+1) = q B(t)
mit q = 1+p%

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Beschränktes Wachstum

Die Änderungsrate R bestimmt sich damit aus:

$$\mathbf{R = k \cdot (G - B(t))}$$

Unter Benutzung der Differenzfunktion und des dort erzeugten Exponentialausdrucks erhält man für die Bestandsentwicklung

$$\begin{aligned} B(t) &= G - d(t) \\ &= G - (1-k)^t \cdot d(0) \\ &= G - (1-k)^t \cdot (G - B(0)) \end{aligned}$$

dabei ist zu berücksichtigen, dass bei einem exponentieellem Wachstum der konstante Faktor q in diesem Fall gleich 1 – k ist. Da andererseits q = 1 + p% oder 1 + p/100 ist, folgt daraus, dass der Wert k des beschränkten Wachstums dem Wert p% oder

$$\mathbf{-k = p/100}$$

Daraus folgt, dass k gleich dem Wachstum in Prozent entspricht. Dieser Zusammenhang wird zwar in manchen Aufgaben verlangt, ist aber nirgens klar ausgeführt !
Das führt damit zu folgender **Funktionsgleichung:**

$$\boxed{\mathbf{B(t) = G - (1-k)^t \cdot (G - B(0)) = G - (G - B(0)) \cdot e^{t \cdot \ln(1-k)}}}$$

Die Differenzialgleichung erhält man aus der Feststellung, dass die Zuwachsrate zum Zeitpunkt t proportional zur Differenz von der Grenze zum aktuellen Bestand ist.

Differenzialgleichung:

$$\boxed{\mathbf{B'(t) = -\ln(1-k) \cdot (G - B(t))}}$$

Nach dem Logarithmengesetz folgt aus:

$$\mathbf{e^{t \cdot \ln(1-k)} = {e^{\ln(1-k)}}^t = (1-k)^t}$$

$$\mathbf{B'(t) = \ln(1-k) \cdot (1-k)^t \cdot (G - B(0))}$$

$$\mathbf{B(t) = G - (1-k)^t \cdot (G - B(0))}$$

$$\mathbf{-(1-k)^t \cdot (G - B(0)) = G - B(t)}$$

$$\mathbf{B'(t) = -\ln(1-k) \cdot (G - B(t))}$$

Dieser Ausdruck entspricht der Änderungsrate, wenn man die Beziehungen zwischen den zwei unterschiedlichen k Werten berücksichtigt, wie sie anschließend ausgeführt sind.

Bestimmung des Koeffizienten k

Der Koeffizient k, der Wert von B(0) und die Grenze G sind normalerweise durch das fachliche Problem begründet und <u>nicht</u> über mathematische Mittel zu bestimmen. Trotzdem tauchen in Schulbüchern Aufgaben auf, bei denen aus dem Bestand zu einem Zeitpunkt t_1 (meist wird dazu der Zeitpunkt t=0 benutzt) und einem Zeitpunkt t_2 (meist der Zeitpunkt t=1) der Wert des Parameters k zu berechnen ist. Dazu ist dann die Rekursionsformel

$$\mathbf{B(t+1) = B(t) + k \cdot (G - B(t))}$$

zu benutzen.

Bezeichnet man an dieser Stelle die Konstante der Differenzialgleichung sauber mit k' , so kann man den Zusammenhang

$$\mathbf{k' = -\ln(1-k)}$$

herstellen.
Andererseits kann man über eine Wertetabelle einfach zeigen, dass für kleine k die Werte für k und k' sich kaum unterscheiden. Für k'=0,04 beträgt die Differenz 0,0008 und für 0,09 noch 0,004, also ganze Zehnerpotenzen kleiner als der tatsächliche Wert.

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Beschränktes Wachstum

Lösung der Differenzialgleichung

$$B'(t) = -\ln(1-k) \cdot (G - B(t))$$

Eine relativ einleuchtende Methode diese Differenzialgleichung zu lösen, ist die Einführung einer neuen Funktion h(t) = G – B(t) , bei der für die erste Ableitung h'(t) = – B'(t), so dass aus der obigen Differenzialgleichung entsteht:

$$-h'(t) = \quad -\ln(1-k) \cdot h(t)$$

Die Lösung der Differenzialgleichung erfolgt wie bei der Lösung exponentiellen Wachstums.

$$\ln|h(t)| = t\ln(1-k) + C$$

Das Auflösen dieser Gleichung nach h(t) führt zu:

$$h(t) = e^{t\ln(1-k)}\ e^{C}$$

Jetzt erfolgt eine Rücksubstitution der Funktion h(t)

$$G - B(t) = (1-k)^t \cdot e^c$$

Das Anfangswertproblem für t = 0 führt auf der linken Seite zu G – B(0) und damit auf der rechten Seite zu $e^C = G - B(0)$. Beachtet man das Minuszeichen auf der rechten Seite folgt aus der obigen Funktion

$$B(t) = G - (1-k)^t \cdot (G - B(0))$$

Bemerkung:
Die Einführung der neuen Funktion h(x) ist keine undurchsichtige Trixerei, da im anderen Fall die Umstellung der Differenzialgleichung zu folgendem Ausdruck führt:

$$\int \frac{B'(t)}{(G - B(t))}\, dt = -\int \ln(1-k)\, dt$$

Das linke Integral ist auch nur über eine Substitutionsmethode lösbar, die darauf hinausläuft, dass die neue Funktion h(t) = G – B(t) gesetzt werden muß.

Musterbeispiele

Auflösen der Formel für B(t) nach den einzelnen Formelbestandteilen:
(Auf negative Vorzeichen im Exponenten der e-Funktion achten!)

$$B(0) = \frac{B(t) - G}{(1-k)^t} + G \quad = (B(t) - G)\, e^{-t\cdot\ln(1-k)} + G$$

$$k = \sqrt[t]{\frac{G - B(t)}{G - B(0)}} + 1$$

$$t = \frac{\lg\left(\frac{G - B(t)}{G - B(0)}\right)}{\lg(1-k)} = \frac{\lg(G - B(t)) - \lg(G - B(0))}{\lg(1-k)}$$

Zum Berechnen benutzt man den Logarithmus zur Basis 10(Basisumrechnung), oder den natürlichen Logarithmus.

$$t = \frac{\ln\left(\frac{G - B(t)}{G - B(0)}\right)}{\ln(1-k)} = \frac{\ln(G - B(t)) - \ln(G - B(0))}{\ln(1-k)}$$

$$G = \frac{B(t) - (1-k)^t\, B(0)}{1 - (1-k)^t} \qquad \frac{B(t) - B(0)\cdot e^{t\cdot\ln(1-k)}}{1 - e^{t\cdot\ln(1-k)}}$$

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Beschränktes Wachstum

Bestimmung des Koeffizienten k

Eine Petrischale mit einer Gesamtfläche von 40 cm^2 ist zur Zeit t = 0 bereits zur Hälfte mit einer Pilzkultur bedeckt. Für das weitere Wachstum wurde experimentell die Formel $B(t + 1) = 0{,}75 \cdot B(t) + 10$ ermittelt. Dabei ist B(t) die nach t Tagen bedeckte Fläche in cm^2.

a) Berechne B(t) für t = 1, 2, 3, 4 und 5 Tage.
b) Zeige, dass es sich um beschränktes Wachstum handelt und gib die Sättigungsgrenze G sowie den Änderungsfaktor k an. Bringe dazu die ermittelte Gleichung auf die Form $B(t + 1) - B(t) = k\,[G - B(t)]$

$B(0) = 20\ cm^2$
$B(t+1) = (1- k)\,B(t) + k\,G$

$1- k = 0{,}75$;
$k = 0{,}25$;
$G = 10 : 0{,}25 = 40\ cm^2$

a)
$B(1) = 40 - 20 \cdot 0{,}75 = 25$
$B(2) = 40 - 20 \cdot 0{,}75^2 = 28{,}75$
$B(3) = 40 - 20 \cdot 0{,}75^3 = 31{,}56$
$B(4) = 40 - 20 \cdot 0{,}75^4 = 33{,}67$
$B(5) = 40 - 20 \cdot 0{,}75^5 = 35{,}25$

$B(t) = G - (G - B(0)) \cdot (1-k)^t$
$= 40 - 20 \cdot 0{,}75^t$

b) $B(t+1) = \underbrace{0{,}75\,B(t) + 0{,}25\,B(t)}_{\text{damit } 1 * B(t) \text{ entsteht}} - 0{,}25B(t) + 10$

$B(t+1) - B(t) = 10 - 0{,}25\,B(t)$
$= 0{,}25 \cdot (40 - B(t))$

Einem Patienten werden 5 mg eines Medikamentes pro Minute per Tropfinfusion ins Blut geleitet. Von der im Blut vorhandenen Menge werden jede Minute 4 % über die Nieren wieder ausgeschieden.
a) Berechne den Gehalt B(t) des Medikamentes im Blut für t = 1, 2, 3 und 4 Minuten.
b) Zeige, dass es sich um beschränktes Wachstum handelt und gib die Sättigungsgrenze S sowie den Änderungsfaktor k an.

$B(0) = 5$ mg
$k = p\%$ $\quad k = 0{,}04$
$B(t+1) = 5$ mg $+ 0{,}96\,B(t)$

$B(t) = G - 0{,}96^t\,(G - B(0))$

$B(1) = 5$ mg $+ 0{,}96 * 5$ mg
$B(1) = 9{,}8$ mg

$B(t+1) - B(t) = k\,(G - B(t))$
$B(1) - B(0) = k\,(G - B(0))$
$9{,}8$ mg $- 5{,}0$ mg $= 0{,}04(G - 5{,}0\text{mg})$

$G = \dfrac{9{,}8 - 5{,}0}{0{,}04}$ mg $+ 5{,}0$ mg $= 125$ mg

Exponentielle Abnahme und beschränktes Wachstum beim radioaktiven Zerfall)
Radon-222 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 3,6 Tagen in das sehr viel stabilere Isotop Polonium-218 ($t_{1/2}$ = 3 Mio Jahre).
a) Gib die tägliche Zerfallsrate p in % an.
b) Wie viele Polonium-Atome sind nach 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20 und 30 Tagen aus ursprünglich 1000 Radon-Atomen gebildet worden?.
c) Stelle ein Formel auf, mit der sich die Zahl B(t) der nach t Tagen gebildeten Polonium-Atome berechnen lässt.
d) Beschreibe das Verhalten von B(t) für t und gib die **Sättigungsgrenze G** an.
e) Zeige, dass der Zuwachs $B(t+1) - B(t)$ proportional zum **Sättigungsmanko** $S - B(t)$ ist und berechne die Wachstumskonstante k: $B(t + 1) - B(t) = k\,[S - B(t)]$.

a) Man nimmt einen willkürlichen Angangsbestand, z.B. 1000 Atome nach 3,6 Tagen sind es noch 500. (Halbwertszeit heißt, dass die Hälfte der Atome in dieser Zeit zerfallen sind).

$B(3{,}6) = 500 = B(0) \cdot (1- k)^{3,6} = 1000 \cdot (1-k)^{3,6}$

$1 - k = \sqrt[3,6]{\dfrac{500}{1000}} = \left(\dfrac{500}{1000}\right)^{\frac{10}{36}} = 0{,}8247$

$k = 0{,}1753$

$k = \dfrac{p}{100} \qquad p = -17{,}53\ \%$

c) $B(t) = 1000 * 0{,}8247^t$

b)
$B(1) = 1000 - 1000 * 0{,}8247 = 175$
$B(2) = 1000 - 1000 * 0{,}8247^2 = 319$
$B(3) = 1000 - 1000 * 0{,}8247^3 = 439$
$B(4) = 1000 - 1000 * 0{,}8247^4 = 537$
$B(5) = 1000 - 1000 * 0{,}8247^5 = 618$
$B(10) = 1000 - 1000 * 0{,}8247^{10} = 854$
$B(20) = 1000 - 1000 * 0{,}8247^{20} = 978$
$B(30) = 1000 - 1000 * 0{,}8247^{30} = 996$

c) Sättigungsgrenze ist 1000, weil mit dieser Zahl gestartet wurde und alle Atome zerfallen können, da es keine Zeitbegrenzung gibt.
d) k ist oben schon berechnet worden mit k = 0,1753

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Logistisches Wachstum

Logistisches Wachstum *(Kein Abiturstoff)*

Das **logistische Wachstum** erfolgt proportional zu einem Restbestand (dies ist die Differenz zwischen einem Zielwert (Grenze) und dem vorhandenem Bestand: „Sättigungsmanko“) und proportional zum Ist-Bestand (B alt), d.h. zuerst hat man näherungsweise ein exponentielles Wachstum , dann aber verlangsamt sich das Wachstum und kommt langsam zum Erliegen.

> Ein Wachstum heißt logistisches Wachstum mit der Schranke G, wenn sich der Bestand B(t) nach t Zeitschritten im nächsten Zeitschritt um **k · B(t) · [G – B(t)]** ändert, wenn also die Änderungsrate zum Produkt aus Bestand und Sättigungsmanko proportional ist.

Die meisten Wachstumsvorgänge in der Natur verlaufen so, da zwar erst der Artenbestand wie beim exponentiellen Wachstum wächst, dann aber irgend-wann nicht weiter wachsen kann, da es nicht genug Platz oder Futter gibt. Dieses Modell kommt der Realität also sehr nah, da es mehr Faktoren als das lineare, beschränkte oder exponentielle Wachstum berücksichtigt.

Um mit dem logistischen Wachstum rechnen zu können, braucht man

- einen **Anfangsbestand**,
- eine Zahl für den **Faktor**
- und eine **Grenze**.

Der (Anfangs-) Bestand (**B alt**) ändert sich nach jeder Rechnung. Um den neuen Bestand (**Bneu**) zu errechnen, addiert man **B alt** mit dem Zuwachs.

Da der Zuwachs sich aber bei jeder Rechnung ändert, muss man für ihn eine Formel aufstellen. Um den Zuwachs zu ermitteln, multipliziert man zuerst den Faktor mit dem vorhandenen Bestand (Anfangsbestand oder B alt). Dieses Produkt wird dann mit der Differenz von der Grenze und B alt multipliziert.

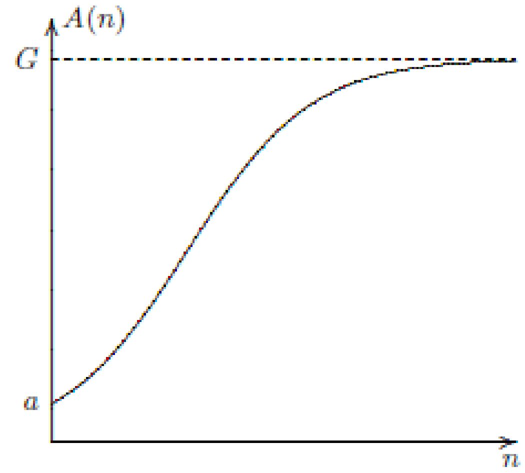
Rekursionsgleichung

$$B(t+1) = B(t) + k' \cdot B(t) \cdot \left(1 - \frac{B(t)}{G}\right)$$

$$= B(t) + k' \cdot B(t) \cdot \frac{G - B(t)}{G}$$

$$= B(t) + k'/G \cdot B(t) \cdot (G - B(t))$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= B(t) + k \cdot B(t) \cdot (G - B(t)) \\ &= (1 + k \cdot G) \cdot B(t) - k \cdot B(t)^2 \end{aligned}}$$



Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Logistisches Wachstum

Gesetze und Regeln

Die Änderungsrate R bestimmt sich damit aus:

$$R = k \cdot B(t) \cdot (G - B(t))$$

Funktionsgleichung:

$$\boxed{B(t) = \frac{G}{1 - \frac{G}{B(0)} - 1 \; * \; e^{-kGt}}}$$

bzw. ohne Doppelbruch:

$$\boxed{B(t) = \frac{B(0) * G}{B(0) + (G - B(0)) * e^{-kGt}}}$$

Differentialgleichung

$$\boxed{B'(t) = k * B(t) * (G - B(t))}$$

Bestimmung des Koeffizienten k

Wegen der nichttrivialen Funktionsgleichung für das logistische Wachstum wird im schulischen Bereich mit der Rekursionsformel gerechnet.

$$B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (G - B(t))$$

womit sich Berechnung von k auf die Formel reduziert:

$$k = \frac{B(t+1) - B(t)}{B(t) \cdot (G - B(t))}$$

$$G = B(t) + \frac{B(t+1) - B(t)}{k \cdot B(t)}$$

Musterbeispiele

Da die Grenze G im Exponenten der e-Funktion und im normalne Bruch auftaucht, kann dieser Wert nicht berechnet werden. (Mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln)

$$k = -\frac{1}{G * t} \ln\left(\frac{B(0)}{G - B(0)} \; \frac{G - B(t)}{B(t)}\right)$$

$$B(0) = \frac{G\,B(t) * e^{-kGt}}{B(t)\,(e^{-kGt} - 1) + G}$$

Es existieren besonders fiese Varianten von Aufgaben, bei denen k und G gesucht sind. Nach dem mathematischen Grundsatz, dass mit einer Gleichung nur eine Variable zu bestimmen ist, werden in diesem Fall zwei Gleichungen benötigt, was bedeutet, es müssen entweder

- 3 zusammenhängende B(t): B(t), B(t+1) und B(t+2) oder
- 4, wobei jeweils zwei sich nur um eine Zeiteinheit unterscheiden dürfen: $B(t_1)$,$B(t_1 +1)$ und $B(t_2)$, $B(t_2+1)$

damit entsteht ein lineares Gleichungssystem von zwei Variablen: k und G.
Es wäre auch noch möglich grundsätzlich 2 Zeiteinheiten zu nehmen, aber es müssen in beiden Gleichungen die gleichen Zeiteinheiten sein.

Beliebt ist auch folgende Aufgabenkombination: Es ist nur der Anfangswert B(0) bekannt, man geht davon aus, dass sich zu Beginn ein exponentielles Wachstum einstellt (was dem Kurvenverlauf entspricht) und gibt einen Wert k an, der einem exponentiellen Wachstum entspricht. Damit erreicht man einen Wert B(1). Dann ist unter Berücksichtigung einer Grenze ein neuer Wert k für ein logistisches Wachstum zu berechnen.

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 2

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Logistisches Wachstum

Gesetze und Regeln

Im Jahre 1705 wurden 5 Hasen auf einer Pazifikinsel ausgesetzt, um die Frischfleischversorgung bei künftigen Besuchen zu sichern. Ein Jahr später wurden bereits 12 Hasen gesichtet.

(a) Bestimme die jährliche Zuwachsrate in %.
(b) Wie viele Hasen wären bei der Annahme exponentiellen Wachstums im Jahre 1711 auf der Insel zu erwarten?
(c) Nach jeweils wie vielen Monaten verdoppelt sich der Bestand unter der Annahme exponentiellen Wachstums?
(d) Tatsächlich wurden auch Jahrzehnte nach der Aussetzung niemals mehr als 100 Hasen auf der Insel gezählt. Setze logistisches Wachstum an und berechne den Änderungsfaktor k auf 4 Nachkommastellen genau.
(e) Wie viele Hasen wären im Jahr 1711 auf der Insel zu erwarten, wenn man den Ansatz für logistisches Wachstum verwendet?
(f) Begründe den Ansatz für logistisches Wachstum anhand der Lebensumstände einer Hasenpopulation auf einer einsamen Insel: Warum ist der Zuwachs proportional zum Bestand ? Warum ist der Zuwachs aber auch proportional zum Sättigungsmanko?

(a) B(0) = 5; B(1) = 12;

Als exponentielles Wachstum: $B(1) = q * B(0)$ mit $q = \left(1+ \frac{p}{100}\right)$

$q = B(1) / B(0) = 12 / 5 = 2{,}4 \Rightarrow p = 1{,}4 = 140\ \%$

(b) $B(0) = 5 ; t = 6 \Rightarrow B(6) = 5 \cdot 2{,}4^{6} = 955$ Hasen

(c) $B(t) = 2\, B(0) = q^t \cdot B(0) = 2{,}4^{t} \cdot 5$

$$t = \frac{\lg(2 * 5 / 5)}{\lg(2{,}4)} = 0{,}8 \text{ Jahre}$$

(d) G=100

Berechnung des Wertes für k mittels Rekursionsformel:

$$k = \frac{B(t+1) - B(t)}{B(t) \cdot (G - B(t))} = \frac{B(1) - B(0)}{B(0) \cdot (G - B(0))} = \frac{12 - 5}{5 \cdot (100 - 5)} = 0{,}0147$$

Musterbeispiele

Berechnung des Wertes für k mittels Funktionsgleichung:

$$\mathbf{k\hat{}} = -\frac{1}{G * t} \ln\left(\frac{B(0)}{G - B(0)} \cdot \frac{G - B(t)}{B(t)}\right)$$

$$= \frac{1}{100 * 1} \ln\left(\frac{5}{100 - 5} \cdot \frac{100 - 12}{12}\right)$$

$0{,}01 \ln(0{,}0526 * 7{,}33) = 0{,}01 * \ln(0{,}3857) = 0{,}009526$

(e) t = 6

Rekursionsformel mit k = 0,0147

$$\mathbf{B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (G - B(t))}$$

$B(1) = B(0) + 0{,}0147\, B(0)\, (G - B(0))$
$= 5 + 0{,}0147*5*95 = 11{,}98$
$B(2) = B(1) + 0{,}0147\, B(1)\, (G - B(1))$
$= 11{,}98 + 0{,}0147*11{,}98*88{,}02 = 27{,}48$
$B(3) = B(2) + 0{,}0147\, B(2)\, (G - B(2))$
$= 27{,}48 + 0{,}0147*27{,}48*72{,}52 = 56{,}77$
$B(4) = B(3) + 0{,}0147\, B(3)\, (G - B(3))$
$= 56{,}77 + 0{,}0147*56{,}77*46{,}23 = 95{,}34$
$B(5) = B(4) + 0{,}0147\, B(4)\, (G - B(4))$
$= 95{,}34 + 0{,}0147*95{,}34*4{,}66 = 101{,}87$
$B(6) = B(5) + 0{,}0147\, B(5)\, (G - B(5))$
$= 101{,}87 + 0{,}0147*101{,}87*(-1{,}87) = 99{,}06$

Berechnung mittels Funktionsformel

$$\mathbf{B(t)} = \frac{B(0) * G}{B(0) + (G - B(0)) * e^{-kGt}}$$

$$= \frac{5 * 100}{5 + (100 - 5) * e^{-0{,}009526*100*6}} = \frac{500}{5 + 95 * 0{,}00329}$$

$$= \frac{500}{5 + 0{,}3125} = \frac{500}{5{,}3125} = 94{,}11$$

Am Beispiel der Rekursionsformel zeigt sich die Fragwürdigkeit dieser Methode, das k zu berechnen, da der Bestand sogar über 100 steigt. Rechnet man den Wert k^um auf den Wert k (k^= – ln(1-k)) so erhält man für k den Wert 0,0094. Rechnet man mit diesem Wert die Rekursionsformeln durch erhält man bessere Werte, die auch nicht die 100 übersteigen.