Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Differenzial-rechnung

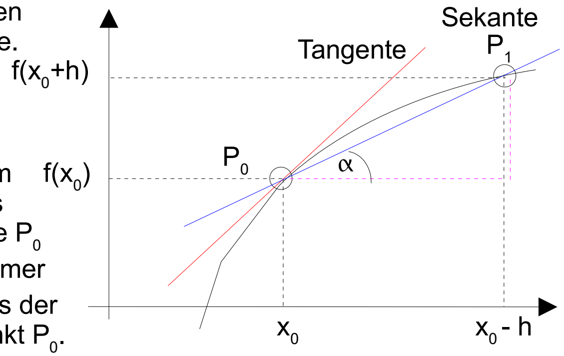
Abhängigkeit und Änderung – Ableitung

Differenzenquotient

Der Differenzenquotient ist der Anstieg der Sekante durch den Punkt P_0 und P_1 auf der Kurve.

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \tan(\alpha)$$

Dieser Quotient ist gleich dem Tangens des Anstiegswinkels der Sekante durch die Punkte P_0 und P_1. Verkleinert man h immer weiter gegen 0, dann wird aus der Sekante die Tangente im Punkt P_0.



Differentialquotient oder Ableitung

Wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

existiert, dann wird er **Differentialquotient** oder **Ableitung** der Funktion f(x) im Punkt P_0 genannt. Dieser Quotient ist gleich dem Tangens des Anstiegswinkels der Tangente im Punkt P_0.

Existiert der **Differentialquotient** der Funktion f(x) für alle Punkte eines Intervalls, so ist die Funktion im ganzen Intervall differenzierbar.
Jeden Abszissenwert x ist ein Wert des Differntialquotienten f'(x) in diesem Intervall zugeordnet.
Diese Abbildung genügt ebenfalls der Definition für eine Funktion, so dass man diese Abbildung die **abgeleitete Funktion** oder die **Ableitung** nennt.

Von dieser neuen Funktion ist es ebenfalls möglich die Differentialquotienten zu bestimmen, so dass man wieder eine Ableitung von der Ableitung erhält. In diesem Fall spricht man von der 2. Ableitung der Ausgangsfunktion f(x)

Musterbeispiele

Beispiel für die Funktion $y=f(x) = x^2$

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2+2*x*h+h^2 - x^2}{h} = \frac{2*x*h+h^2}{h} = \mathbf{2*x}$$

Beispiel für die Funktion y=f(x) = C (Konstante)

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{C - C}{h} = \mathbf{0}$$

Beispiel für die Funktion y=f(x) = sin(x)

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1)}{h} + \frac{\cos(x)\sin(h)}{h}$$

Additionstheorem des sin:
sin(x+h) = sin(x) cos(h) + cos(x) sin(h)

Achtung!
Die Ergebnisse der unteren beiden Ausdrücke sind undefiniert !
Das Ergebnis ist nicht ∞, da auch der Zähler 0 ist und nicht nur der Nenner.

$\frac{\cos(h) - 1}{h}$ dieser Ausdruck ist für h=0 undefiniert: $\frac{0}{0}$ Ergebnis: **0**

$\frac{\sin(h)}{h}$ dieser Ausdruck ist für h=0 undefiniert: $\frac{0}{0}$ Ergebnis: **1**

Beweis für die Richtigkeit der Ergebnisse folgt aus der Betrachtung der Potenzreihen zu den trigonometrischen Funktionen

Die Potenzreihen der trigonometrischen Funktionen:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\frac{\sin(x)(\cos(h) - 1)}{h} + \frac{\cos(x)\sin(h)}{h} = \mathbf{\cos(x)}$$

Betrachtet man die Potenz-reihen und setzt für x den Wert h ein, dann lässt sich jedes einzelne Polynomglied durch h dividieren und anschließend der Grenzwert h-> 0 berechnen. Somit erhalten wir die oben angegebenen Ergebnisse.

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Differenzial-rechnung	**Differentiationsregeln**	
	Faktorregel	
	$\frac{d}{dx}[c * f(x)] = c \left[\frac{d}{dx} f(x)\right]$	$F(x) = 7 * \ln(x)$: $c = 7$; $f(x) = \ln(x)$ $F'(x) = (c*f(x))' = C * f'(x) = 7 * 1/x = 7/x$
	Summenregel	
	$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$	$F(x) = x^6 + x^3$: $f(x) = x^6$; $g(x) = x^3$ $F'(x) = (f(x)+g(x))' = f'(x) + *g'(x) = 6 * x^5 + 3* x^2$
	Produktregel	
	$\frac{d}{dx}[f(x) * g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) * g(x) + f(x) * \frac{d}{dx} g(x)$	$F(x) = x * \ln(x)$: $f(x) = x$; $g(x) = \ln(x)$ $F'(x) = (f(x)*g(x))' = f'(x)*g(x) + f(x)*g'(x) = 1 * \ln(x) + x * 1/x = \ln(x) +1$
	Potenzregel	
	$\frac{d}{dx} x^n = n * x^{n-1}$	$F(x) = x^5$ $F'(x) = 5 * x^4$
	Quotientenregel	
	$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)} \left(\frac{d}{dx} f(x) * g(x) - f(x) * \frac{d}{dx} g(x)\right)$	$F(x) = \tan(x)$: $f(x) = \sin(x)$; $g(x) = \cos(x)$ $F'(x) = 1/g^2(x) (f'(x)*g(x) - f(x) * g'(x)) = 1/\cos^2(x) (\cos^2(x) + \sin^2(x))$
	Kettenregel	
	$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) * g'(x)$	$F(x) = x * \ln(x)$: $f(x) = x$; $g(x) = \ln(x)$ $F'(x) = (f(x)*g(x))' = f'(x)*g(x) + f(x)*g'(x) = 1 * \ln(x) + x * 1/x = \ln(x) +1$
	Logarithmische Differentiation	
	$\frac{d}{dx} f(x) = f(x) * \frac{d}{dx} \ln(f(x))$	$F(x) = x^{\sin(x)}$: $\ln F(x) = \ln(x^{\sin(x)}) = \sin(x) * \ln(x)$ $1/F(x) * F'(x) = \cos(x) * \ln(x) + \sin(x) * 1/x$ $F'(x) = \frac{x^{\sin(x)} *(x*\cos(x)* \ln(x)+\sin(x))}{x}$
	Ableitung inverser Funktionen (Umkehrfunktionen)	
	$y = f(x)$; $x = \varphi(y)$ $\quad \frac{d}{dy} \varphi(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx} f(x)}$	
	Differentiation von Parameterfunktionen	
	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ $\quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} * \frac{dx}{dt}$ y = f(x) ist gegeben durch $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ also $y = g(t)$ dann liefert die Kettenregel:da x eine Funktion von t ist, ist die innere Ableitung von x(t) nach t noch abzuleiten.	

Treff Lernen
Christina Strauch

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Differenzial-rechnung		

Die erste Ableitung elementarer Funktionen

Funktion	1. Ableitung	Umkehrfunktion	1.Ableitung
x^n	$n * x^{n-1}$		
C	0		
a^x	$a^x * \ln a$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$
		$\lg x$	$\frac{1}{x \ln 10} = \frac{\lg e}{x}$
e^x	e^x	$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Trigonometrische und Arcus Funktionen

$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1 + x^2}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\text{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1 + x^2}$

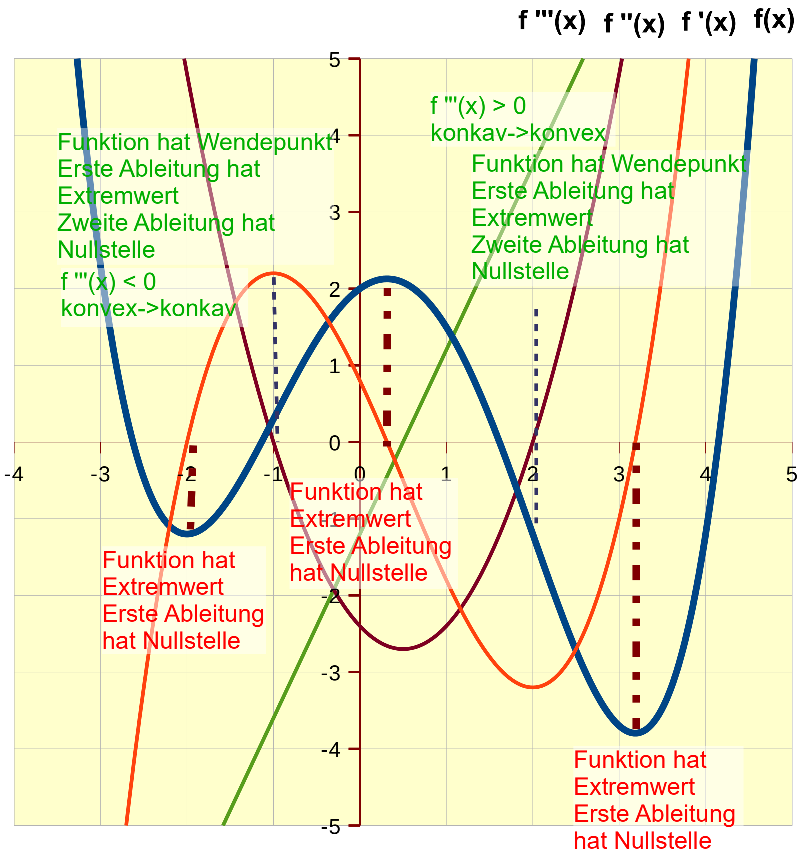
Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Kurvendiskussion

Eigenschaften von Funktionen

1) **Definitionsmenge** (vor allem bei gebrochenrationalen Funktionen)
2) **Symmetrie**
3) **Asymptoten**, bzw Verhalten für $x \to \pm\infty$
4) **Polstellen / Lücken** (bei gebrochen-rationalen Funktionen)
5) **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**
   a) Zuerst mit der y-Achse: S(0 | f(0))
   b) Dann mit der x-Achse: Nullstellen (Werte von x mit f(x) = 0)
6) **Ableitungen** (oft bis zur 3. Ableitung)
7) **Extrem- und Sattelpunkte** (Nullstellen der ersten Ableitung)
8) **Wendepunkte** (Nullstellen der zweiten Ableitung)
9) **Monotonie**: Die erste Ableitung bestimmt die Steigung der Kurve:
   $f'(x) > 0$: steigend;
   $f'(x) < 0$: fallend;
   $f'(x) = 0$: waagrecht
10) **Krümmung**: Die zweite Ableitung bestimmt das Krümmungsverhalten der Kurve:
   $f''(x) > 0$: linksgekrümmt
   $f''(x) < 0$: rechtsgekrümmt
11) **Zeichnen** einer Funktion



Definitionsmenge

Definitionsmenge spielt bei gebrochen rationalen Funktionen eine Rolle: Hier sind die Nullstellen des Nenners Werte, an denen die Funktion nicht definiert ist.

Weiter zu beachten sind verschachtelte Funktionen, bei denen eine der Funktionen nicht über den gesamten reellen Zahlenbereich definiert sind. Zu solchen Funktionen zählt die Logarithmenfunktionen oder Wurzelfunktionen.

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Kurvendiskussion

Symmetrieverhalten

Es gibt zwei Arten von Symmetrieverhalten:

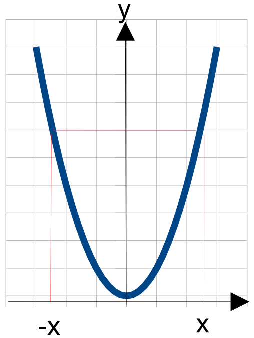
- achsialsymmetrisch zur y- Achse mit: **f(x) = f(-x)**
- Zentral (oder Punkt-)symmetrisch zum Ursprung mit : **f(x) = - f(-x)**

Gerade Funktionen achsialsymmetrisch zur y-Achse

f(x) = f(-x)

Ebenso kann eine Funktion achsialsymmetrisch zu einer Geraden $x=x_0$ sein, dann gilt:

$$f(x_0+h) = f(x_0-h)$$

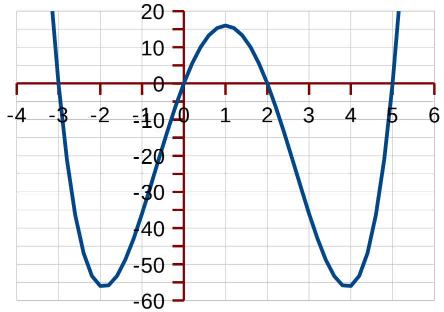


f(x) = f(-x)
gerade

Von quadratischen Funktionen ist bekannt, dass aus der Gleichung $y - y_0 = a(x-x_0)^2$ folgt, dass der Scheitel der Parabel vom Ursprung (0|0) in den Punkt $S(x_0|y_0)$ verschoben wurde. Will man jetzt die Kurve auf die y-Achse (zurück)verschieben, darf also nicht mit x = 1 verschoben werden, sondern mit x= -1. Damit erhält man die in symmetrisch zur y-Achse zurück verschobene Kurve (rote Kurve).

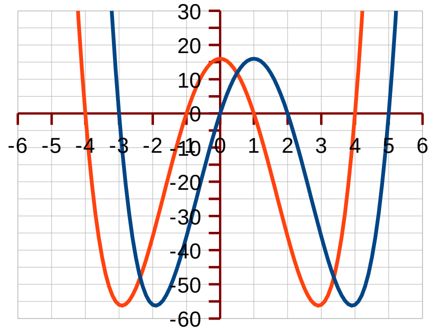
Musterbeispiele

Beispiel:
$y = x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 30x$ ist achsialsymmetrisch zu x = 1.



$$\begin{aligned}
f(x_0+h) &= \\
(1+h)^4 &= 1 + 4h + 6h^2 + 4h^3 + h^4 \\
-4(1+h)^3 &= -4 - 12h - 12h^2 - 4h^3 \\
-11(1+h)^2 &= -11 - 22h - 11h^2 \\
+30(1+h) &= 30 + 30h \\
& \quad 16 - 17h^2 + h^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x_0-h) &= \\
(1-h)^4 &= 1 - 4h + 6h^2 - 4h^3 + h^4 \\
-4(1-h)^3 &= -4 + 12h - 12h^2 + 4h^3 \\
-11(1-h)^2 &= -11 + 22h - 11h^2 \\
+30(1-h) &= 30 - 30h \\
& \quad 16 - 17h^2 + h^4
\end{aligned}$$

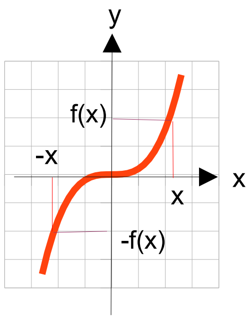


$$\begin{aligned}
y &= f(x-(-x_0)) \\
(x+1)^4 &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
-4(x+1)^3 &= -4x^3 - 12x^2 - 12x - 4 \\
-11(x+1)^2 &= -11x^2 - 22x - 11 \\
+30(x+1) &= 30x + 30 \\
\mathbf{y} &= \mathbf{x^4 - 17x^2 + 16}
\end{aligned}$$

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Kurvendiskussion		

Ungerade Funktionen
Zentralsymmetrisch (punktsymmetrisch) zum Ursprung

$f(x) = -f(-x)$



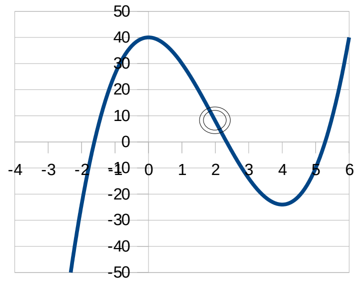
$f(x) = -f(-x)$
ungerade

Ebenso kann eine Funktion zentralsymmetrisch zu einem anderen Punkt $P_0(x_0|y_0)$ sein, dann gilt:

$f(x_0+ h) - y_0 = - (f(x_0- h) - y_0)$
$f(x_0+ h) + f(x_0- h) = 2y_0$
$\frac{1}{2} [f(x_0+ h) + f(x_0- h)] = y_0$

Von quadratischen Funktionen ist bekannt, dass aus der Gleichung $y-y_0 = a(x-x_0)^2$ folgt, dass der Scheitel der Parabel vom Ursprung (0|0) in den Punkt $S(x_0|y_0)$ verschoben wurde. Will man jetzt die Kurve in den Ursprung (zurück)verschieben, darf also nicht mit x=2 y=8 verschoben werden, sondern mit x= -2 und y = -8. Damit erhält man die in den Ursprung zurück verschobene Kurve (rote Kurve).

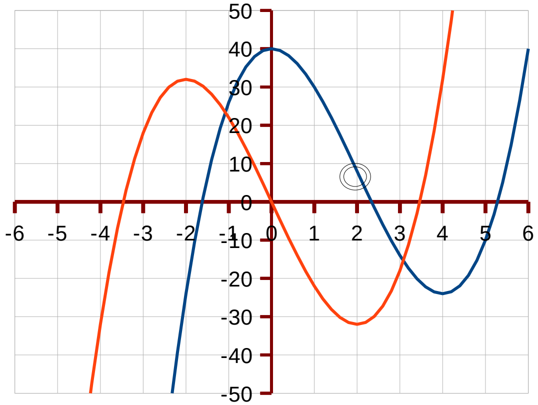
Beispiel:
$y = 2x^3 -12 x^2 +40$ ist punktsymmetrisch zum Punkt $P_0(2|8)$



$f(x_0+h) =$
$2*(2+h)^3 –12 (2+h)^2 + 40=$
$2* (2^3 + 3*2^2h + 3*2 h^2 +h^3) –12 (4 +4h+h^2) +40=$
$16 + 24h + 12h^2 +2h^3 – 48 – 48h – 12 h^2 +40 =$
$2h^3 -24h + 8$

$f(x_0-h) =$
$2*(2–h)^3 –12 (2–h)^2 + 40=$
$2* (2^3 – 3*2^2h + 3*2 h^2 –h^3) –12 (4 –4h+h^2) +40=$
$16 – 24h + 12h^2 –2h^3 – 48 + 48h – 12 h^2 +40 =$
$-2h^3 +24h + 8$

$\frac{1}{2} [f(x_0+ h) + f(x_0- h)] = \frac{1}{2} [(2h^3 -24h +8) + (-2h^3 +24h +8)] = 8 = y_0$



Aus der Verschiebung erkennt man deutlich, dass es eine ungerade Funktion ist, da nur ungerade Potenzen auftreten.

$y - (-y_0) = f(x - (- x_0))$
$y + 8 = 2*(x+2)^3 –12 (x+2)^2 + 40=$
$2* (x^3 + 3*x^22 + 3*x 2^2 +2^3) –12 (x^2 + 4x + 4) +40=$
$2x^3 + 12x^2 + 24x + 16 \quad -12x^2 - 48x -48 + 40 =$
$2x^3 - 24x + 8$
$y = 2x^3 -24x = 2x (x^2-12)$

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Kurvendiskussion

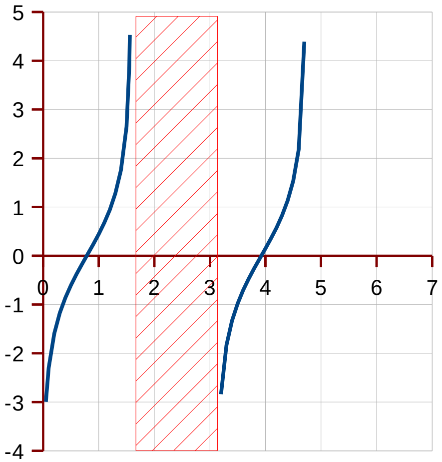
Lücken im Definitionsbereich

Als Lücken im Definitionsbereich gelten
1. Intervallbereiche, in denen die Funktion nicht definiert ist.
2. Behebbare Singularitäten
3. x-Werte, bei denen die Funktion nach $+\infty$ oder $-\infty$ verläuft (Polstellen)

Lücke im Definitionsbereich

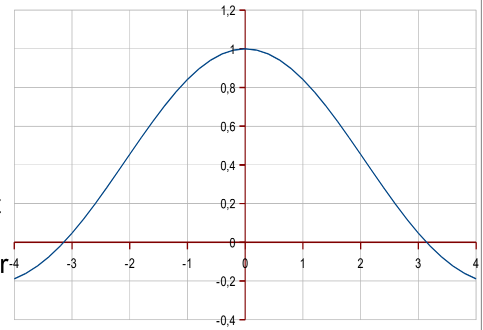
- Nicht jede Funktion ist für alle x von $-\infty \leq x \leq +\infty$ definiert. Zusammengesetzte Funktionen, deren Teilfunktionen nicht für alle x definiert sind (z.B. log) sind Beispiele dafür.
- Es ist auch möglich, dass der Definitionsbereich Lücken enthält, so dass die Funktion definiert ist von $-\infty \leq x \leq a$ und von $b \leq x \leq +\infty$.

In dem rot markierten Bereich ist dieFunktion $y = \ln(\tan x)$ nicht definiert. Gleichzeitig gibt es an den Grenzen Polstellen.



Behebbare Unstetigkeitsstellen

Funktionen, die sich als Quotient von zwei anderen Funktionen schreiben lassen, haben an den Nullstellen des Nenners meistens eine Polstelle. das trifft genau dann nicht zu, wenn der Zähler an dieser Stelle auch eine Nullstelle hat.das Funktionsergebnis ist dann 0:0, und dieser Ausdruck ist unbestimmt, er ist weder ∞ noch 0. Der Funktionswert muss mit speziellen Methoden ermittelt werden. das trifft nicht nur für gebrochen-rationale Funktionen zu, sondern auch für andere, wie z.B. $\sin(x) / x$ an der Stelle 0. Der Funktionswert konvergiert dort gegen 1.



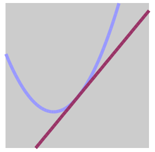
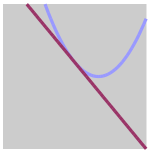
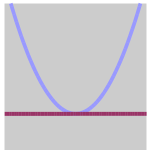
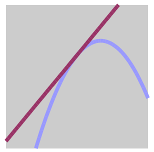
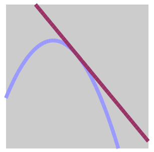
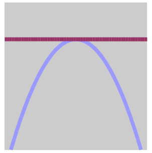
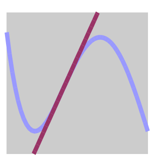
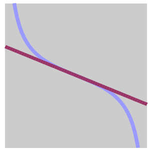
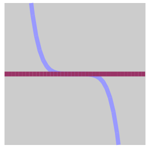
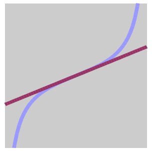
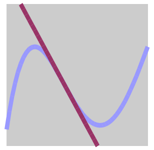
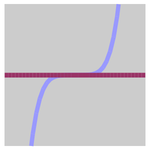
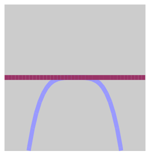
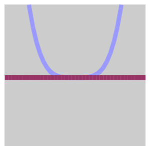
Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Kurvendiskussion

Extremwerte, Wendepunkte

Extremwerte: $f'(x)=0$ und eine nachfolgende gerade Ableitung $\neq 0$.
Wendepunkte: $f''(x)=0$ und eine nachfolgende ungerade Ableitung $\neq 0$.

f ''(x) \ f '(x)		> 0 monoton steigend	< 0 monoton fallend	= 0
> 0 konvex links gekrümmt				
< 0 konkav rechts gekrümmt				
= 0	$f^{(2n+1)}(x) < 0$ konvex-> konkav			
	$f^{(2n+1)}(x) > 0$ konkav-> konvex			
	$f^{(2n)}(x) < 0$			
	$f^{(2n)}(x) > 0$			

Die in der Mathematik üblichen Begriffe von konvex und konkav werden in Schulbüchern mit anderen Bezeichnungen belegt:

konvex = linksgekrümmt (beim Durchschreiten der Kurve in positive x– Richtung beschreibt man einen Bogen um den linken Arm)
konkav = rechtsgekrümmt (beim Durchschreiten der Kurve in positive x– Richtung beschreibt man einen Bogen um den rechten Arm)

Wendepunkte:
$f''(x)=0$ und
die erste Ableitung danach,
die nicht 0 ist,
ist eine **ungerade** Ableitung

Extremwerte:
$f'(x)=0$ und
die erste Ableitung danach,
die nicht 0 ist,
ist eine **gerade** Ableitung,

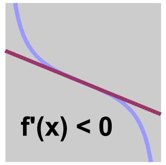
Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Kurvendiskussion	**Monotonie**	

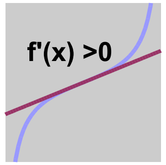
Monotonie

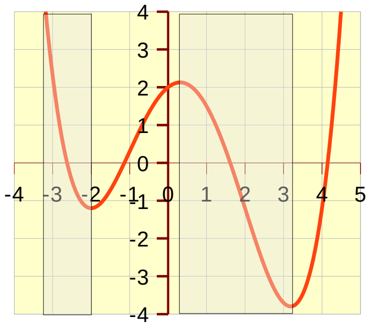
Die **Monotonie** einer Funktion wird durch die erste Ableitung bestimmt:

f (x) monoton fallend
(d.h. Tangentenanstieg negativ)

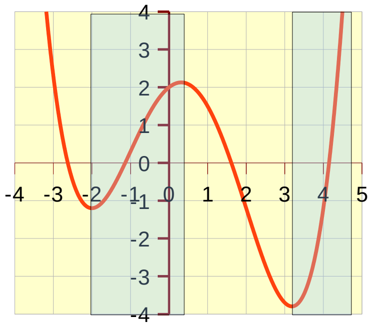


f (x) monoton steigend
(d.h. Tangentenanstieg positiv)

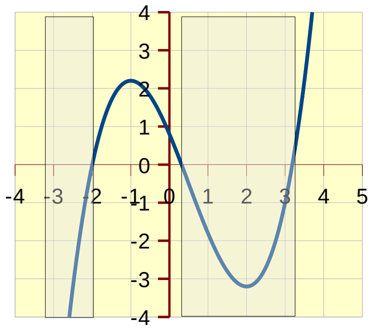




f (x)

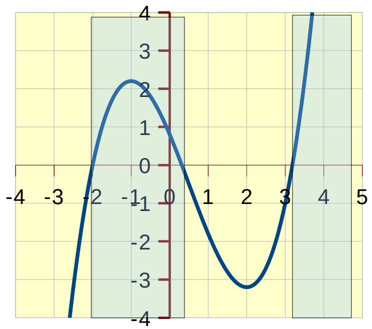


f '(x) < 0
(Funktionswerte von f'(x) negativ)



f' (x)

f '(x) > 0
(Funktionswerte von f'(x) positiv)



Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

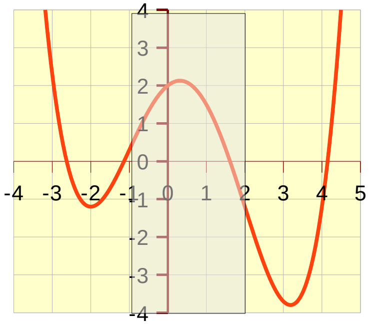
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Kurvendiskussion

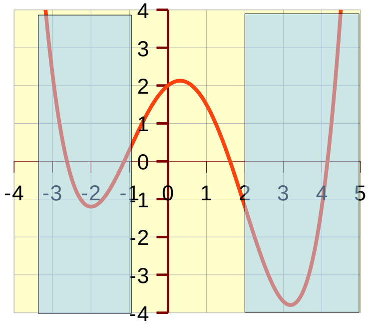
Krümmungsverhalten

Das **Krümmungsverhalten** einer Funktion wird durch die zweite Ableitung bestimmt:

f (x)
konkav oder
rechts gekrümmt

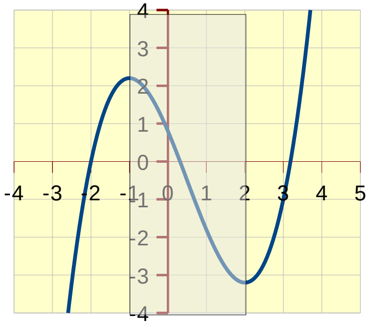


f (x)
konvex oder
links gekrümmt

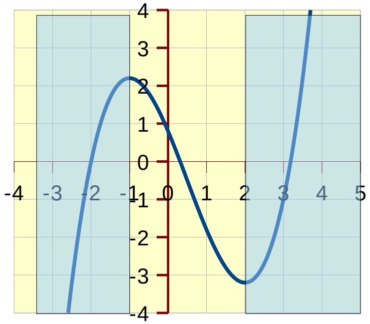


f (x)

f' (x)
monoton fallend

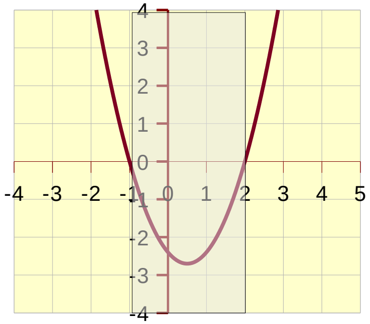


f' (x)
monoton wachsend

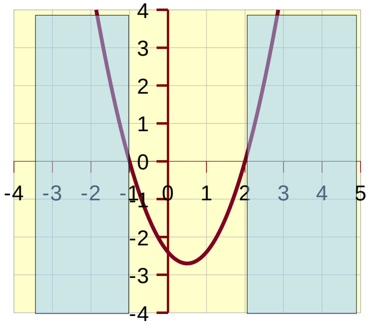


f' (x)

f'' (x) < 0



f'' (x) > 0

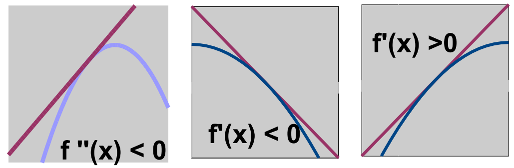


f'' (x)

f ''(x) < 0 Funktion konkav; Funktion rechts gekrümmt

Auf der Grundlage des Kurvenbildes sieht man, dass der Tangenten-anstieg für eine rechts gekrümmte Kurve mit einem 'hohen' positiven Wert beginnt, zum möglichen Extremum, das nur ein Maximum sein kann, gegen 0 geht und dann negativ wird. Damit ist die erste Ableitung monoton fallen, also die erste Ableitung der ersten Ableitung (= zweite Ableitung) kleiner 0.

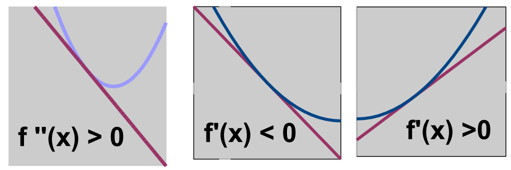
(d.h.: Tangente liegt beim Durchlaufen der Kurve in positive x-Richtung immer auf der linken Seite)



f ''(x) > 0 Funktion konvex; Funktion links gekrümmt.

Auf der Grundlage des Kurvenbildes sieht man, dass der Tangenten-anstieg für eine links gekrümmte Kurve mit einem 'hohen' negativen Wert beginnt, zum möglichen Extremum, das nur ein Minimum sein kann, gegen 0 geht und dann positiv wird. Damit ist die erste Ableitung monoton wachsend, also die erste Ableitung der ersten Ableitung (= zweite Ableitung) größer 0.

(d.h.: Tangente liegt beim Durchlaufen der Kurve in positive x-Richtung immer auf der rechten Seite)



Bemerkung zum Typ des Extremums durch Untersuchung der 2. Ableitung:
Die Aussage zum Typ des Extremums lautete etwa:
„Ist die 2. Ableitung > 0 handelt es sich um ein Minimum“
Da die zweite Ableitung aber das Krümmungsverhalten angibt müsste die exakte Begründung lauten:
„Wenn die zweite Ableitung > 0 ist, ist die Kurve linksgekrümmt und ein Extremwert einer linksgekrümmten Kurve kann nur ein Minimum sein“
Die Bilder links zeigen das.

Analog könnte man für das Maximum eine solche Aussage treffen.

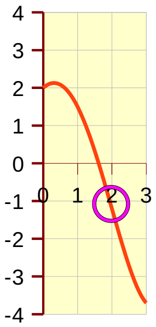
Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Kurvendiskussion

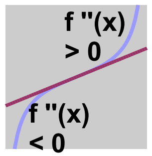
Wendepunkte

Wendepunkt Rechtskrümmung → Linkskrümmung

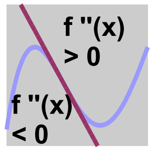


f(x)

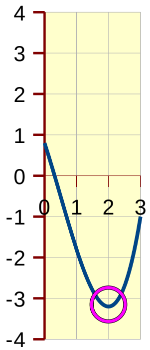
Die Steigung von f(x) sinkt vor dem Wendepunkt auf den größten negativen Wert, hat im Wendepunkt ein Minimum, und steigt nach dem Wendepunkt wieder an.
(Der Tangentenanstieg ist negativ und die Werte werden im Negativen immer größer, also damit immer kleiner)



Bei steigender Tangente bleibt der Anstieg zum Wendepunkt hin immer positiv, wird aber vom Wert her immer kleiner.



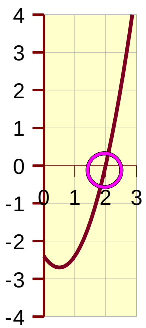
Bei fallender Tangente ist der Anstieg negativ und der Wert wird von Betrag her immer größer, deshalb als Wert selbst immer kleiner.



f'(x)

Die 1. Ableitung muss deshalb ein Minimum haben, da der Tangentenanstieg ein Minimum hat.
Von Extremwerten ist bekannt, dass man ein relatives Minimum einer Funktion daran erkennt, dass die 1. Ableitung dort gleich Null ist, und die Ableitung einen Vorzeichen-wechsel von Minus nach Plus durchführt.
Die 1. Ableitung der 1. Ableitung ist die 2. Ableitung.
Befindet sich der Wendepunkt auf einem steigenden Funktionsabschnitt, hat das Minimum einen positiven Funktionswert

> Bei einem Wendepunkt (mit Rechts-Links-Wechsel) an der Stelle x_0 hat die 1.Ableitung f '(x) dort ein relatives Minimum



f''(x)

Von Extremwerten ist auch bekannt, dass man ein relatives Minimum bedeutet,
(1) dass hier die 1. Ableitung von der 1. Ableitung null sein muss, und dass ein Wechsel des Vorzeichens von Minus nach Plus erfolgen muss.
oder
(2) Die 2. Ableitung von der 1. Ableitung (also die 3. Ableitung) muss größer 0 sein

Damit erhält man ein Kriterium für einen Wendepunkt Rechts → Links:

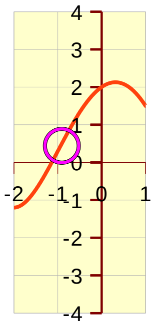
> A) Die 2. Ableitung an der Stelle x_0 ist Null
> B) a) die 2. Ableitung hat einen Vorzeichenwechsel von Minus nach Plus
> oder
> b) die 3. Ableitung ist größer 0

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

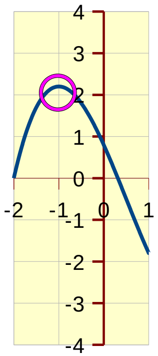
Kurvendiskussion

Wendepunkt Linkskrümmung → Rechtskrümmung



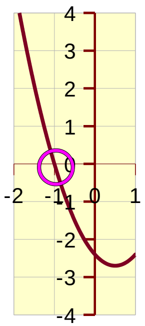
f(x)

Die Steigung von f(x) ist positiv, steigt vor dem Wendepunkt an, hat im Wendepunkt ein Maximum, und fällt nach dem Wendepunkt wieder, bleibt aber zunächst positiv.



f'(x)

Die 1. Ableitung muss deshalb ein Maximum haben, da der Tangentenanstieg ein Maximum hat.
Von Extremwerten ist bekannt, dass man ein relatives Maximum einer Funktion daran erkennt, dass die 1. Ableitung dort gleich Null ist, und die Ableitung einen Vorzeichen-wechsel von Plus nach Minus durchführt.
Die 1. Ableitung der 1. Ableitung ist die 2. Ableitung.

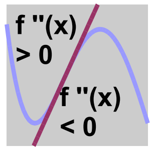


f''(x)

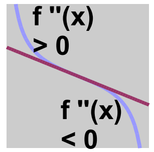
Von Extremwerten ist auch bekannt, dass man ein relatives Maximum bedeutet,

(1) dass hier die 1. Ableitung von der 1. Ableitung null sein muss, und dass ein Wechsel des Vorzeichens von Plus nach Minus erfolgen muss.
oder

(2) Die 2. Ableitung von der 1. Ableitung , das ist die 3. Ableitung, muss kleiner 0 sein



Bei steigender Tangente wird der Anstieg zum Wendepunkt hin immer steiler, danach wieder flacher



Bei fallender Tangente wird der Anstieg der Tangente flacher und nach dem Wendepunkt wieder steiler

> Bei einem Wendepunkt (mit Rechts-Links-Wechsel) an der Stelle x_0 hat die 1.Ableitung f '(x) dort ein relatives Maximum

Damit erhält man ein Kriterium für einen Wendepunkt Links → Rechts:

> A) Die 2. Ableitung an der Stelle x_0 ist Null
> B) a) die 2. Ableitung hat einen Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus
> oder
> b) die 3. Ableitung ist kleiner 0

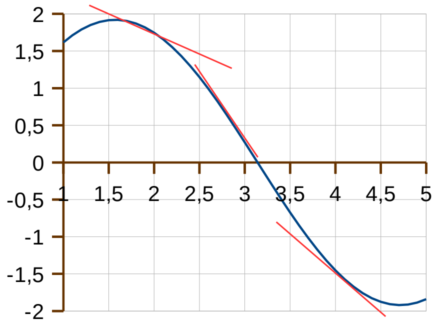
Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Kurvendiskussion

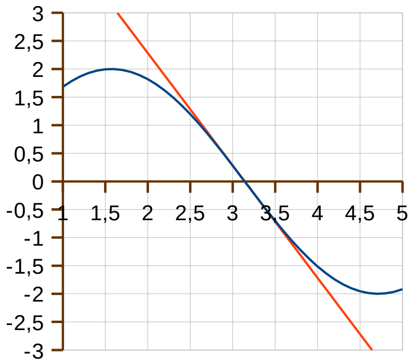
Wendetangente

Die Wendetangente, oder Tangente im Wendepunkt ist ein Phänomen unter den Tangenten. Genau die wichtigste Eigenschaft, die eine Tangente auszeichnet, hat sie nicht.



Die wichtigste Eigenschaft die eine Tangente auszeichnet, ist die, dass sie die Kurve in dem Punkte nur berührt und nicht schneidet. Daher hat sie ihren Namen: Tangente.
Das bedeutet, dass die Tangente links und rechts vom Berührungspunkt immer auf der gleichen Seite der Kurve liegt.

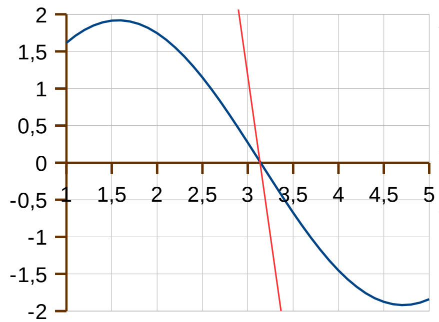
Jetzt zur Tangente im Wendepunkt:



Bis zum Wendepunkt ist die Kurve rechts gekrümmt, also liegt die Tangente links von der Kurve. Im Wendepunkt ist die Krümmung der Kurve 0 (da y''=0 = keine Krümmung)
Keine Krümmung hat aber nur eine Gerade. Im Wendepunkt entspricht die Kurve einer Geraden und nach dem Wendepunkt ist die Kurve linksgekrümmt, also muss die Tangente rechts von der Kurve liegen. das schafft die Tangente nur, wenn sie im Wendepunkt die Kurve scheidet.

Bis zum Wendepunkt liegt die Tangente also immer links. Im Wendepunkt entspricht die Kurve einer Geraden, ist also identisch mit der Tangente, die dann sowohl „links“ wie auch „rechts“ liegt, da sie deckungsgleich sind. Nach dem Wendepunkt liegt die Tangente dann auf der rechten Seite.
Damit könnte man sagen: Die Wendetangente scheidet nicht die Kurve, sondern im Wendepunkt sind Kurve und Tangente identisch, wie es bei jeder Geraden der Fall ist. Links und Rechts des Wendepunktes haben alle Tangenten wieder die Eigenschaft, dass sie die Kurve nicht schneiden.

Falls beim Zeichnen von Kurvenbildern die Wendetangente verlangt ist, hat das Konsequenzen auf die Zeichnung die im Fehlerfall zu massivem Punktabzug führen müsste !



Wenn die Kurve das Aussehen links hätte und die Wendetangente wäre die rot eingezeichnete Gerade, dann sollte es hier den vollen Punktabzug geben, da die Kurve nicht annähernd tangentiales Verhalten zur Tangente aufweist. Wie so etwas auszusehen hat, ist in der mittleren Spalte dargestellt.

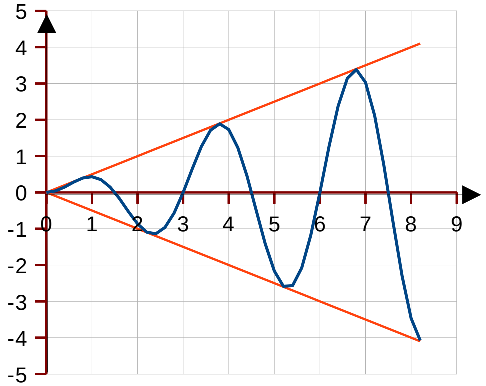
Es ist grundsätzlich zu verhindern, dass die Kurve vor oder nach dem Wendepunkt die Tangente schneidet, oder im Wendepunkt ein sichtbarer Winkel zwischen Kurve und Tangente entsteht.

Wird die Wendetangente nicht verlangt, ist das genaue Kurvenverhalten nicht weiter zu ermitteln und die Kurve wird dann auch so akzeptiert, wie sie gezeichnet wurde, wenn sie die Extrema und Nullstellen korrekt wiedergibt.

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Kurvendiskussion	**Begrenzung der Funktionswerte**	

Insbesondere bei Funktionen in denen die Funktion sin(x) oder cos(x) eine Rolle spielen, müssen die Maximalwerte nicht immer gleich sein, wie es bei der normalen sinus-Funktion der Fall ist.

Beispiel: Bei der Funktion $y= \frac{1}{2} x \cdot \sin(2/3\pi \cdot x)$ stellt dieFunktion $y=\frac{1}{2} x$ die Amplitudenbegrenzung dar, während die Amplituden selbst mit wachsendem x ebenfalls wachsen.



Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Kurvenbild und Ableitung	**Von der Funktion auf die Ableitung schließen** (a) Extrempunkte von f(x) ➔ Nullstellen von f ´(x) Hochpunkt von f(x) ➔ Nullstelle von f ´(x), die die x-Achse von + nach – schneidet Tiefpunkt von f(x) ➔ Nullstelle von f ´(x), die die x-Achse von - nach + schneidet (b) Wendepunkt von f(x) ➔ Extrempunkt von f ´(x) (c) Sattelpunkt von f(x) ➔ Nullstelle von f ´(x), die die x-Achse berührt (Extrempunkt von f ´(x)) (d) f(x) fällt streng monoton ➔ f ´(x) ist negativ f(x) wächst streng monoton ➔ f ´(x) ist positiv (e) f(x) ist rechtsgekrümmt ➔ f ´(x) fällt streng monoton f(x) ist linksgekrümmt ➔ f ´(x) wächst streng monoton (f) f(x) hat waagrechte Asymptote ➔ f ´(x) strebt gegen Null (g) f(x) hat senkrechte Asymptote ➔ f ´(x) hat ebenfalls senkrechte Asymptote	

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Kurvenbild und Ableitung

Anwendung auf eine Funktion

Die Ausgangsfunktion wird durch die **blaue Linie** angegeben
die erste Ableitung durch die rote Linie
die zweite Ableitung durch die braune Linie
die dritte Ableitung durch die grüne Linie

Teil 1:
Die Funktion ist

- monoton fallend
  → **Tangentenanstieg negativ**
  → Die erste Ableitung < 0
  → Werte negativ steigen zu 0 (werden größer!)
  → erste Ableitung monoton wachsend
  → Tangentenanstiege werden flacher

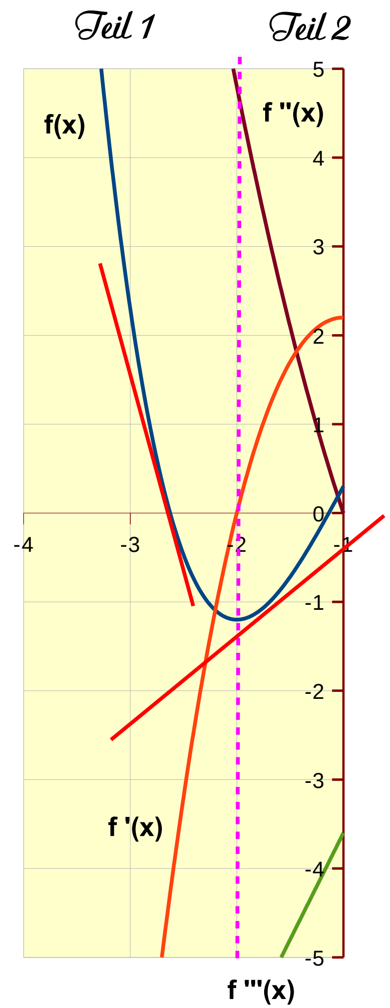
- links gekrümmt
  (beim Durchschreiten der Kurve von – ∞ nach + ∞ beschreibt man eine Kurve um seinen linken Arm)
  → Tangente liegt rechts von der Kurve
  → links gekümmte Kurven haben monoton wachsende erste Ableitung

- erste Ableitung monoton wachsend
  → Als erste Ableitung der ersten Ableitung ist die zweite Ableitung > 0

Wechsel Teil 1 nach Teil 2
Die Funktion besitzt

- einen Extremwert
  → Tangentenanstieg = 0
  → Erste Ableitung = 0
  → Wechsel der ersten Ableitung von negativ nach positiv
  → Änderung des Tangentenanstiegs von negativ nach positiv
  → Extremwerte ändern die Monotonie
  → Extremwerte ändern **nicht** die Krümmung

- Wechsel von monoton fallen nach monoton steigend
  → links gekrümmte Funktionen können als Extremwert nur ein Minimum haben
- keine Änderung der Krümmung
  → es bleibt **zweite Ableitung > 0**



Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Kurvenbild und Ableitung

Teil 2:
Die Funktion ist

- monoton steigend
  → **Tangentenanstieg positiv**
  → Die erste Ableitung > 0
  → Werte positiv steigen von 0 weiter an
  → erste Ableitung monoton wachsend
  → Tangentenanstiege werden steiler

- links gekrümmt
  → Tangente liegt rechts von der Kurve
  → links gekrümmte Kurven haben monoton wachsende erste Ableitung

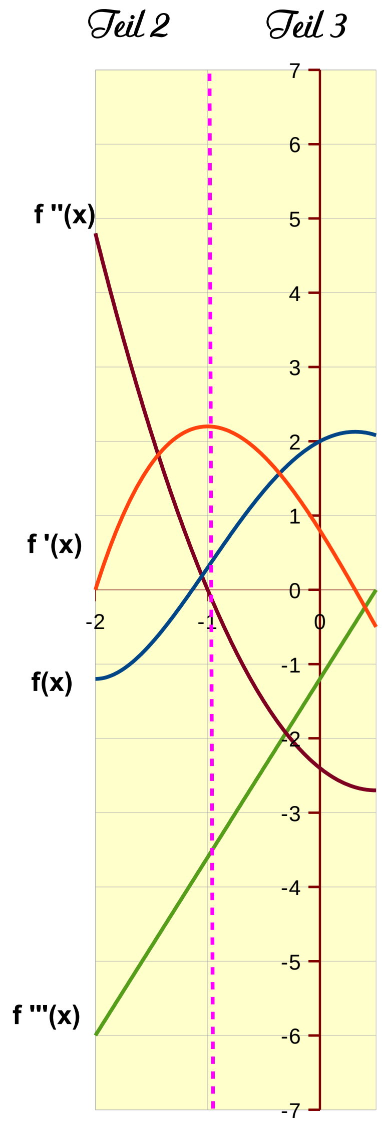
- erste Ableitung monoton wachsend
  → Als erste Ableitung der ersten Ableitung ist die zweite Ableitung > 0

Wechsel Teil 2 nach Teil 3:
Die Funktion besitzt

- einen Wendepunkt
  Für den Funktionsgraphen heißt das: An diesem Punkt gibt es keine Krümmung ! damit ist die Zweite Ableitung = 0
  → erste Ableitung hat einen Extremwert
  → Als erste Ableitung der ersten Ableitung ist die Zweite Ableitung = 0
  → da die erste Ableitung bis jetzt steigend war, kann der Extremwert für die erste Ableitung nur ein Maximum sein, ab jetzt ist die erste Ableitung fallend
  → Wendepunkte ändern **nicht** die Monotonie
  → Wendepunkte ändern die Krümmung

- Wechsel von links gekrümmt nach rechts gekrümmt
  → **Wende** der Tangente rechts von der Kurve nach links von der Kurve (der Wendepunkt ist der einzige Punkt einer Funktion, wo die Tangente die Funktion schneidet)
  → Im Wendepunkt hat die Kurve den (betragsmäßig) steilsten Anstieg, weil die erste Ableitung einen Extremwert hat.
  → Die erste Ableitung hat ein Maximum,
  → die 2. Ableitung der 1. Ableitung – Dritte Ableitung < 0
  → Die 1. Ableitung der 1. Ableitung, die zweiten Ableitung, hat einen Vorzeichenwechsel von + nach –
  → zweiten Ableitung monoton fallend

- keine Änderung der Monotonie
  ersten Ableitung > 0



Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Kurvenbild und Ableitung

Teil 3:

Die Funktion ist

- monoton steigend
  → **Tangentenanstieg positiv**
  → Die erste Ableitung > 0
  → Werte positiv werden kleiner
  → erste Ableitung monoton fallend
  → Tangentenanstiege werden positiv flacher

- rechts gekrümmt
  → Tangente liegt links von der Kurve
  (beim Durchschreiten der Kurve von – ∞ nach + ∞ beschreibt man eine Kurve um seinen rechten Arm)
  → rechts gekrümmte Kurven haben monoton fallende erste Ableitung

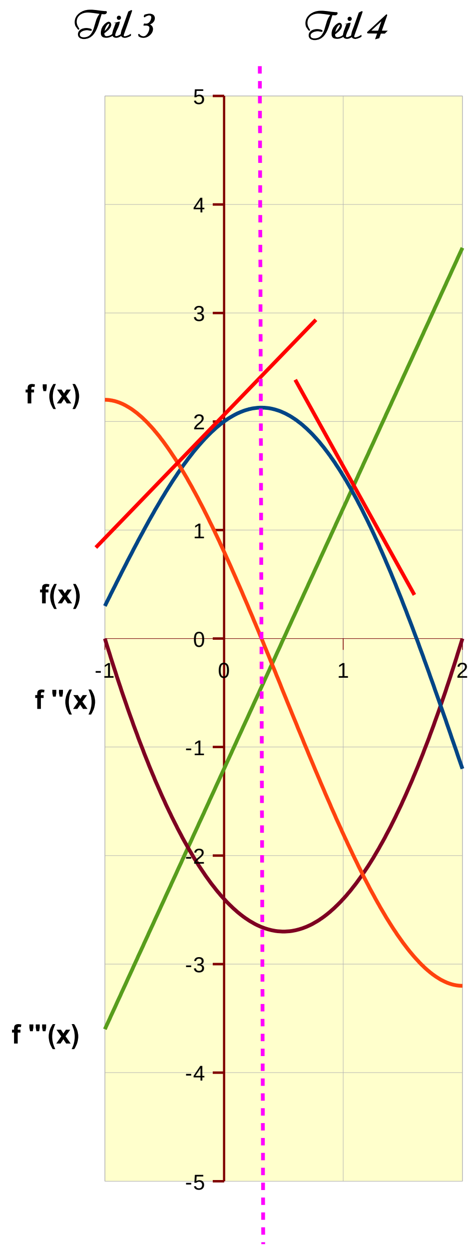
- erste Ableitung monoton fallend
  → Als erste Ableitung der ersten Ableitung ist die zweite Ableitung < 0

Wechsel Teil 3 nach Teil 4:

Die Funktion besitzt

- einen Extremwert
  → Tangentenanstieg = 0
  → Erste Ableitung = 0
  → Wechsel der ersten Ableitung von positiv nach negativ
  → Änderung des Tangentenanstiegs von positiv nach negativ
  → Extremwerte ändern die Monotonie
  → Extremwerte ändern **nicht** die Krümmung

- Wechsel von monoton steigend nach monoton fallend
  → rechts gekrümmte Funktionen können als Extremwert nur ein Maximum haben
- keine Änderung der Krümmung
  → es bleibt **zweite Ableitung < 0**



Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Kurvenbild und Ableitung

Teil 4:
Die Funktion ist
- monoton fallend
  → **Tangentenanstieg negativ**
  → Die erste Ableitung < 0
  → Werte steigen negativ (werden kleiner !)
  → erste Ableitung monoton fallend
  → Tangentenanstiege werden (negativ) steiler

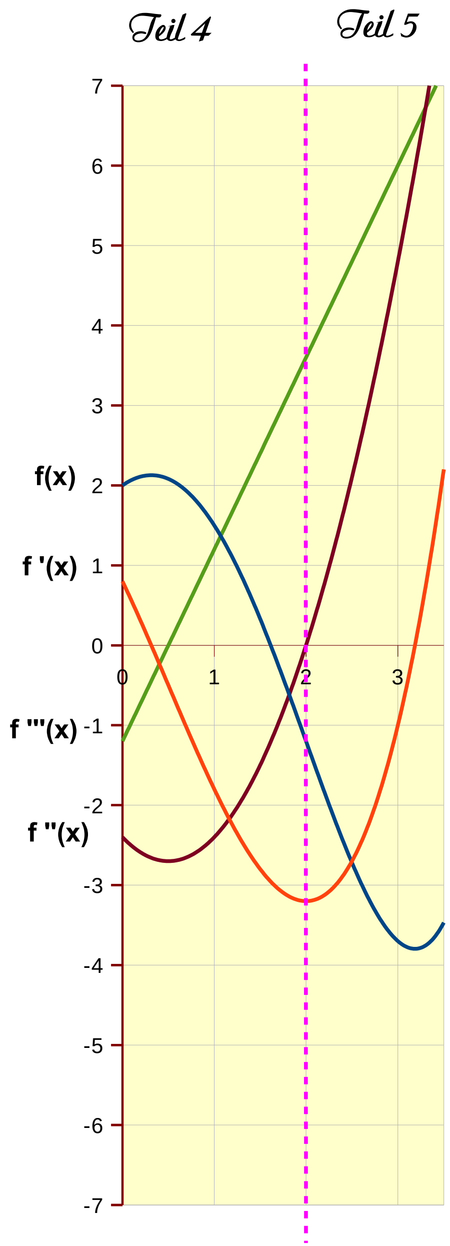
- rechts gekrümmt
  → Tangente liegt links von der Kurve
  → rechts gekrümmte Kurven haben eine fallende erste Ableitung

- erste Ableitung monoton fallend
  → Als erste Ableitung der ersten Ableitung ist die zweite Ableitung < 0

Wechsel Teil 4 nach Teil 5:
Die Funktion besitzt
- einen Wendepunkt
  Für den Funktionsgraphen heißt das: An diesem Punkt gibt es keine Krümmung ! damit ist die Zweite Ableitung = 0
  → erste Ableitung hat einen Extremwert
  → Als erste Ableitung der ersten Ableitung ist die Zweite Ableitung = 0
  → da die erste Ableitung bis jetzt fallend war, kann der Extremwert für die erste Ableitung nur ein Minimum sein, ab jetzt ist die erste Ableitung steigend
  → Wendepunkte ändern **nicht** die Monotonie
  → Wendepunkte ändern die Krümmung

- Wechsel von rechts gekrümmt nach links gekrümmt
  → **Wende** der Tangente links von der Kurve nach rechts von der Kurve (der Wendepunkt ist der einzige Punkt einer Funktion, wo die Tangente die Funktion schneidet)
  → Im Wendepunkt hat die Kurve den (betragsmäßig) steilsten Anstieg, weil die erste Ableitung einen Extremwert hat.
  → Die erste Ableitung hat ein Minimum,
  → die 2. Ableitung der 1. Ableitung – Dritte Ableitung (grüne Linie) > 0
  → Die 1. Ableitung der 1. Ableitung, die zweiten Ableitung, hat einen Vorzeichenwechsel von – nach +
  → zweiten Ableitung monoton wachsend

- Monotonie bleibt erhalten



Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Kurvenbild und Ableitung

Teil 5:
Die Funktion ist
- monoton fallend
  → **Tangentenanstieg negativ**
    → Die erste Ableitung < 0
    → Werte negativ steigen zu 0 (werden größer!)
      → erste Ableitung monoton steigend
    → Tangentenanstiege werden (negativ) flacher

- links gekrümmt
  → Tangente liegt rechts von der Kurve
  → links gekrümmte Kurven haben eine steigende erste Ableitung

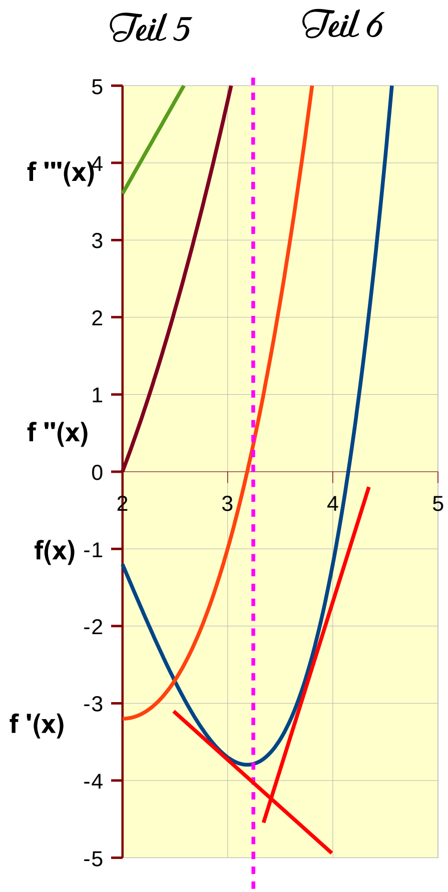
- erste Ableitung monoton steigend
  → Als erste Ableitung der ersten Ableitung ist die zweite Ableitung > 0

Wechsel Teil 5 nach Teil 6:
Die Funktion besitzt
- einen Extremwert
  → Tangentenanstieg = 0
    → Erste Ableitung = 0
    → Wechsel der ersten Ableitung von negativ nach positiv
    → Änderung des Tangentenanstiegs von negativ nach positiv
    → Extremwerte ändern die Monotonie
    → Extremwerte ändern **nicht** die Krümmung

- Wechsel von monoton fallend nach monoton steigend
  → links gekrümmte Funktionen können als Extremwert nur ein Maximum haben
- keine Änderung der Krümmung
  → es bleibt **zweite Ableitung > 0**

Teil 6:
Die Funktion ist
- monoton wachsend
  → **Tangentenanstieg positiv**
    → Die erste Ableitung > 0
    → Werte positiv steigen
      → erste Ableitung monoton steigend
    → Tangentenanstiege werden steiler

- links gekrümmt
  → Tangente liegt rechts von der Kurve
  → links gekrümmte Kurven haben eine steigende erste Ableitung



Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Kurvendiskussion

Von der Ableitung auf die Funktion schließen

(Beliebte Abitur-Prüfungsaufgaben sind Kurvenbilder der 1. Ableitung und es sollen Rückschlüsse auf die Funktion erfolgen)

(a) Das Vorzeichen von f '(x)

f ´(x) > 0 ➡ f(x) ist monoton steigend
f ´(x) < 0 ➡ f(x) ist monoton fallend

(b) Die Monotonie von f '(x)

f ´(x) fällt streng monoton ➡ f(x) ist rechts gekrümmt
(Wende die Aussage (a) auf die 1. Ableitung an:)
➡ f '(x): streng monoton fallend
➡ (f '(x))' = f ''(x): < 0 (s. Krümmungsverhalten)
➡ f(x): rechts gekrümmt

f ´(x) wächst streng monoton ➡ f(x) ist links gekrümmt
➡ f '(x): streng monoton wachsend
➡ (f '(x))' = f ''(x): > 0 (s. Krümmungsverhalten)
➡ f(x): links gekrümmt

(c) Das asymptotische Verhalten von f '(x)

f ´(x) strebt gegen Null ➡ f(x) hat waagrechte Asymptote
f ´(x) strebt gegen konstanten Wert ➡ Die Asymptote ist eine Gerade
f ´(x) hat senkrechte Asymptote ➡ f(x) hat senkrechte Asymptote
f '(x) → +∞ für x → +∞ dann auch f(x) → +∞
f '(x) → –∞ für x → +∞ dann auch f(x) → –∞
f '(x) → +∞ für x → –∞ dann auch f(x) → –∞
f '(x) → –∞ für x → –∞ dann auch f(x) → +∞
(Achtung! Für x → –∞ dreht sich das Verhalten von f '(x) und f(x) um !)

(d) Die Nullstellen von f '(x)

Einfache Nullstellen von f ´(x) ➡ Extrempunkte von f(x)

1. Nullstelle von f ´(x), die die x-Achse von + nach – schneidet
   ➡ Hochpunkt von f(x)

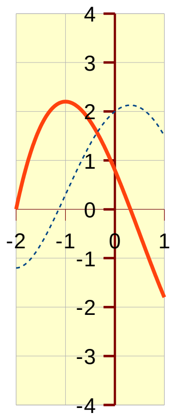
2. Nullstelle von f ´(x), die die x-Achse von - nach + schneidet
   ➡ Tiefpunkt von f(x)

3. Nullstelle von f ´(x), die die x-Achse berührt (Extrempunkt von f ´(x))
   ➡ Sattelpunkt von f(x)
   (Kein Extremwert von f, weil der Funktionswert von f'(x) positiv bleibt, für einen Extremwert muss der Tangentenanstieg wechseln – Deshalb Wendepunkt, auch deshalb, weil f'(x) durch die Berührung einen Extremwert hat und die erste Ableitung von f '(x) = f ''(x) = 0 sein muss)

Musterbeispiele

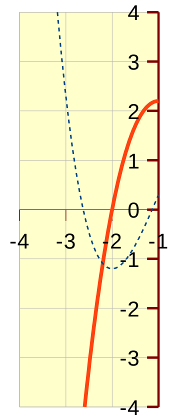
Erste Ableitung rote Linie, Ausgangsfunktion Blaue Linie

(a)1.



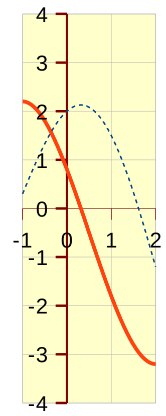
Bereich –2< x <0,4

(a)2.



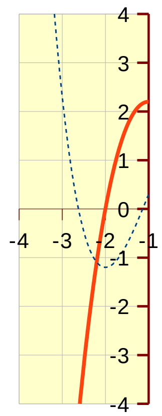
Bereich –4< x <–2

(b)1.



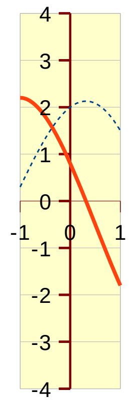
Bereich –1< x <2

(b)2.



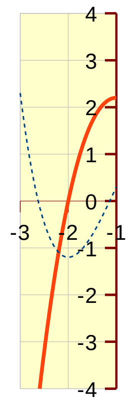
Bereich –4< x <0

(d)1.



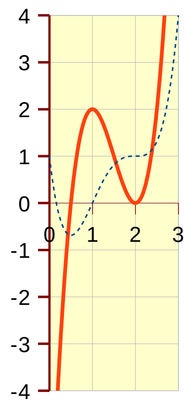
x = 0,4

(d)2.



x = –2

(d)3.



x = 2

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Kurvendiskussion

(e) Die Extrema von f '(x)

Extrempunkt von f ´(x) ➡ Wendepunkt von f(x)

1. Anstieg von f ´(x), wechselt von + nach –
   - ➡ f'(x): Hochpunkt
   - ➡ f(x): Wechsel von links gekrümmt nach rechts gekrümmt
   - ➡ f"(x): Hochpunkt von f '(x) bedeutet, dass die erste Ableitung von f'(x) (=f"(x)) von + nach – wechselt
     - ➡ Wendepunkt 1

2. Anstieg von f ´(x) wechselt von - nach +
   - ➡ f'(x): Tiefpunkt
   - ➡ Wechsel von rechts gekrümmt nach links gekrümmt
   - ➡ f"(x): Tiefpunkt von f '(x) bedeutet, dass die erste Ableitung von f'(x) (=f"(x)) von – nach + wechselt
     - ➡ Wendepunkt 2

(Die Vorzeichen der Tangentenanstiege ändern sich nicht, aber die Beträge entwickeln sich im Fall 1. zu einem Maximum und im Fall 2 zu einem Minimum, dh. im Wendepunkt hat die Funktion betragsmäßig den größten Anstieg: = f'(x) hat einen Extremwert)

(f) Symmetrieeigenschaften von f(x) aus f '(x) bestimmen:

1. f (x) symmetrisch zur y -Achse
   - ➡ f'(x) muss punktsymmetrisch zum Ursprung sein

   (Für die Achsensymmetrie muß der Tangentenanstieg links und rechts von der y-Achse betragsmäßig gleich sein, aber mit dem anderen Vorzeichen. Außerdem muss die Ausgangsfunktion einen Extremwert haben und somit f'(x) eine Nullstelle)

2. f(x) punktsymmetrisch zum Ursprung
   - ➡ f'(x) muss achsensymmetrisch zur y -Achse sein.

   (Für Punktsymmetrie sind die Tangentenanstiege links und rechts vom Symmetriepunkt gleich und die Funktion muss an dieser Stelle einen Wendepunkt haben, also f'(x) einen Extremwert.)

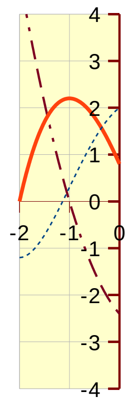
Aus den Ableitungen **nicht** zu bestimmen sind:

1. Schnittpunkte mit der x- oder y-Achse
2. Verlauf der Kurve durch einen beliebigen Punkt im Koordinatensystem
3. Ob die Funktionswerte an einer Stelle größer oder kleiner 0 sind.
4. Der <u>Wert</u> der waagerechten Asymptote kann aus der Tatsache, dass eine solche existiert nicht ermittelt werden, deshalb kann nicht entschieden werden, ob die x-Achse eine Asymptote ist.

Musterbeispiele

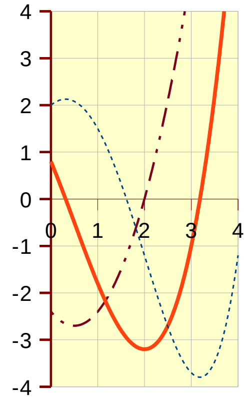
Erste Ableitung rote Linie,
Ausgangsfunktion Blaue Linie
Zweite Ableitung Braune Linie

(e)1.



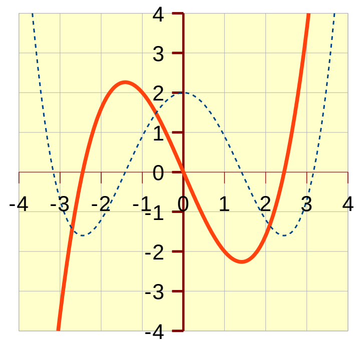
x = –1

(e)2.

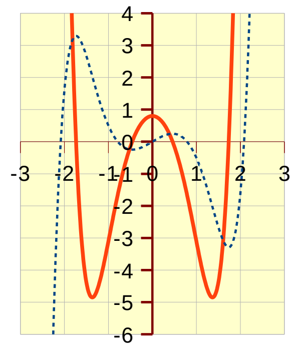


x = 2

(f)1.



(f)2.



Ein Polynom, das punkt-symmetrisch ist, hat nur ungerade Exponenten, damit hat die Ableitung nur gerade Exponenten, aber Polynome, die nur gerade Exponenten haben sind achsen-symmetrisch zur y-Achse. Genau so gilt es auch umgekehrt, wenn das Ausgangspolynom achsen-symmetrisch ist.

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Kurvendiskussion	**Vom Kurvenbild zur Funktion** *(Beliebte Abitur-Prüfungsaufgaben sind Kurvenbilder und Funktionsausdrücke, die zusammengeführt werden sollen))* **Markante Eigenschaften von Funktionsbildern, die auch in dieser Reihenfolge untersucht werden sollten:** (a) Symmetrie von Funktionen Ist das Kurvenbild symmetrisch zur y-Achse, dann geht das bei Polynomen nur, wenn das Polynom nur gerade Potenzen hat. Bei gebrochen-rationalen Funktionen müssen Zähler und Nenner nur gerade Potenzen haben, oder nur ungerade Potenzen Ist das Kurvenbild symmetrisch zum Ursprung, dann geht das bei Polynomen nur, wenn das Polynom nur ungerade Potenzen hat. Bei gebrochen rationalen Funktionen muss der Zähler nur ungerade und der Nenner nur gerade Potenzen haben, oder umgekehrt (also immer verschieden) (b) Definitionslücken und senkrechte Asymptoten Können bei Polynomen nicht auftreten, bei gebrochen rationalen Funktionen an den Nullstellen des Nenners (c) Verhalten für $x \to \infty$ Bei gebrochen-rationalen Funktionen durch Polynomdivision ermitteln Die höhere Potenz im Zähler oder Nenner entscheidet über das Asymptotische Verhalten. Bei allen anderen gilt: Exponentialfunktionen sind stärker als Potenzen Potenzen sind stärker als Logarithmen (d) Periodizität Kommt nur in Betracht, wenn trigonometrische Funktionen im Spiel sind. (e) Nullstellen der Funktion Produkte von Einzelfunktionen haben ihre Nullstellen an den Nullstellen der einzelnen Teilfunktionen. Exponentialfunktionen haben keine Nullstellen, Logarithmen eine Nullstelle bei x=1 ABER ACHTUNG Durch Verschiebung in x- und y-Richtung können sich hier Änderungen ergeben.	Höchste Potenz im Zähler größer als im Nenner und beide gerade, oder beide ungerade: Funktion strebt nach ∞ , ob + oder – hängt vom Vorzeichen der Koeffizienten vor den höchsten Potenzen ab, ob dieser Quotient positiv oder negativ ist. Höchste Potenz im Zähler größer als im Nenner und eine gerade und eine ungerade: Höchste Potenzen streben für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$ und für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ Ist der Quotient der Koeffizienten der höchsten Potenzen > 0, bleibt diese Verhalten bestehen, ist dieser Quotient < 0, dreht sich das Verhalten um. Höchste Potenz im Zähler kleiner als im Nenner Asymptotisches Verhalten gegen die x-Achse
 Treff Lernen CHRISTINA STRAUCH		

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Polynome

Ganzrationale Funktionen

(a) Symmetrie:

Achsensymmetrie (egal zu welcher senkrechten Achse):
Grad der Funktion ist gerade
Achsensymmetrie zur y-Achse:
zusätzlich fallen alle ungeraden Exponenten weg
Punktsymmetrie (egal zu welchem Punkt)
Grad der Funktion ist ungerade
Punktsymmetrie zum Ursprung:
zusätzlich fallen alle geraden Exponenten weg

(b) Verhalten im Unendlichen:

$f(x) \longrightarrow +\infty$, $x \to \pm\infty$: Koeffizient vor der höchsten Potenz ist positiv und der Grad des Polynoms ist gerade.

$f(x) \longrightarrow -\infty$, $x \to \pm\infty$: Koeffizient vor der höchsten Potenz ist negativ und der Grad des Polynoms ist gerade.

$f(x) \longrightarrow \pm\infty$, $x \to \pm\infty$: Koeffizient vor der höchsten Potenz ist positiv und der Grad des Polynoms ist ungerade.

$f(x) \longrightarrow \mp\infty$, $x \to \pm\infty$: Koeffizient vor der höchsten Potenz ist negativ und der Grad des Polynoms ist ungerade.

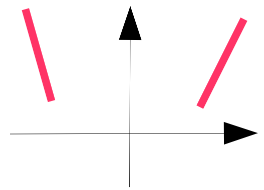
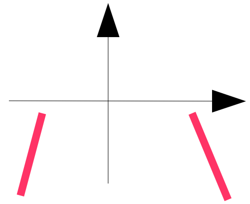
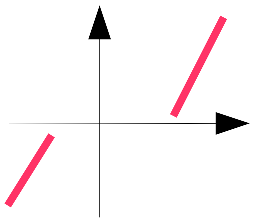
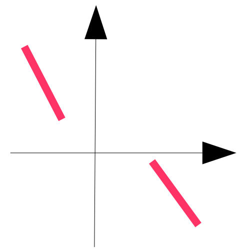
(c) Nullstellen:

Vielfachheit 1: Nullstelle x1 schneidet x-Achse ➡ $(x - x1)^1$
Vielfachheit 2: Nullstelle x1 ist Extrempunkt ➡ $(x - x1)^2$
Vielfachheit 3: Nullstelle x1 ist Sattelpunkt ➡ $(x - x1)^3$

(d) Extrempunkte: $(x_E|y_E)$ Gleichungen $f(x_E) = y_E$ und $f'(x_E) = 0$
n Extrempunkte Grad der Funktion ≥ n+1

(e) Wendepunkte: $(x_W|y_W)$ Gleichungen $f(x_W) = y_W$ und $f''(x_W) = 0$
n Wendepunkte: Grad der Funktion ≥ n+2

(f) Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0 \mid s)$ ➡ konstantes Glied = s

	Der Koeffizient vor der höchsten Potenz hat **positives Vorzeichen:**	Der Koeffizient vor der höchsten Potenz hat **negatives Vorzeichen:**
höchste Potenz ist gerade	$x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$ $x \to -\infty$ $f(x) \to +\infty$ 	$x \to +\infty$ $f(x) \to -\infty$ $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$ 
höchste Potenz ist ungerade	$x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$ $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$ 	$x \to +\infty$ $f(x) \to -\infty$ $x \to -\infty$ $f(x) \to +\infty$ 

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Polynome

Nullstellen eines Polynoms

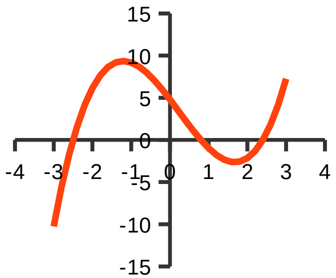
Für gebrochen rationale Funktionen in der Form Z(x)/N(x) mit P(x) =0.
Nullstellen und Polstellen einer gebrochen rationalen Funktion können nur in der Form ohne eingesondertes Polynom ermittelt werden.

1. Jedes Polynom hat soviele Nullstellen, wie seine höchste Potenz angibt
2. Nicht jede dieser Nullstellen ist innerhalb der reellen Zahlen vorhanden, sondern kann auch eine komplexe Zahl sein. Damit läßt sich diese Nullstelle im Graphen der Funktion nicht sichtbar machen.
3. Wenn ein Polynom komplexe Nullstellen hat, dann treten die immer paarweise auf.

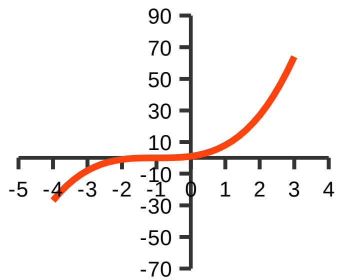
Die höchste Potenz des Polynoms ist ungerade

(hier dargestellt an einem Polynom 3. Grades; a >0)

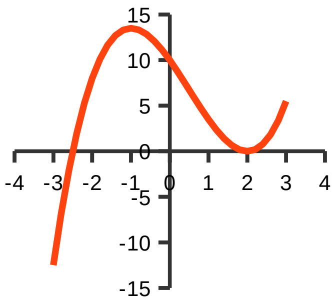
3 einfache Nullstellen
y= (x-x1)(x-x2)(x-x3)



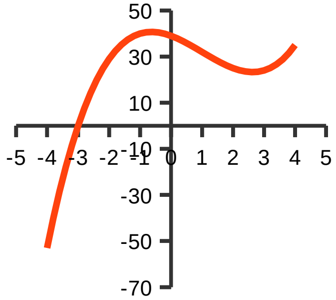
1 dreifache Nullstelle (Stufenwendepunkt)
y = (x-x1)³



1 einfache reelle Nullstelle
1 doppelte reelle Nullstelle
y = (x-x1) (x-x2)²



1 einfache reelle Nullstelle
1 doppelte komplexe Nullstelle
y = (x-x1)(ax²+bx+c)

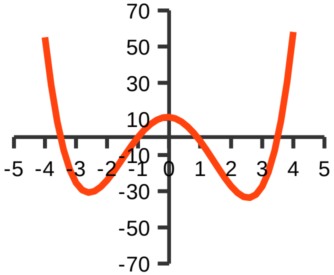


Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

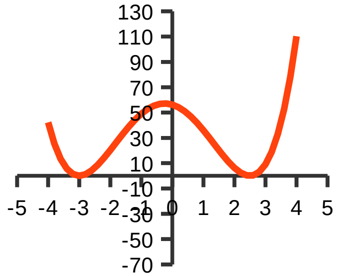
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Polynome	★ **Die höchste Potenz des Polynoms ist gerade**	

(hier dargestellt an einem Polynom 4. Grades; $a > 0$)

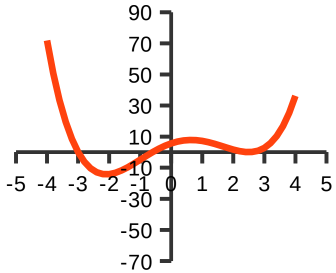
4 einfache reelle Nullstellen
$y=(x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)$



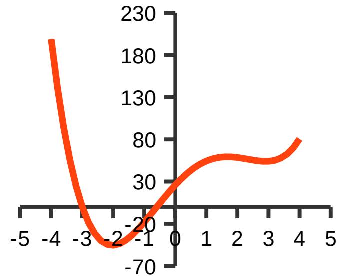
2 doppelte reelle Nullstellen
$y= (x-x1)^2(x-x2)^2$



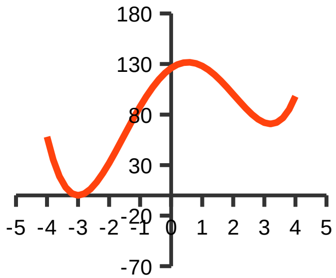
2 einfache reelle Nullstellen
1 doppelte reelle Nullstelle
$y=(x-x1)(x-x2)(x-x3)^2$



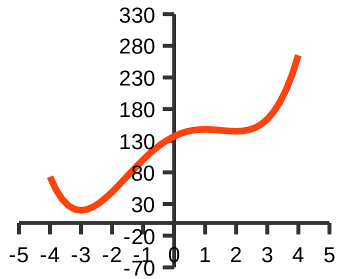
2 einfache reelle Nullstellen
1 doppelte komplexe Nullstelle
$y=(x-x1)(x-x2)(ax^2+bx+c)$



1 doppelte reelle Nullstelle
1 doppelte komplexe Nullstelle
$y=(x-x1)^2(ax^2+bx+c)$

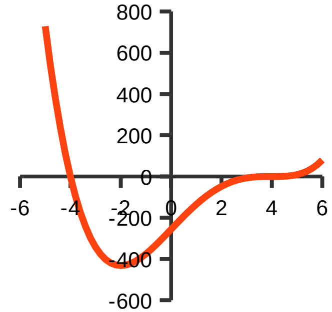


2 doppelte komplexe Nullstellen
$y=(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)$

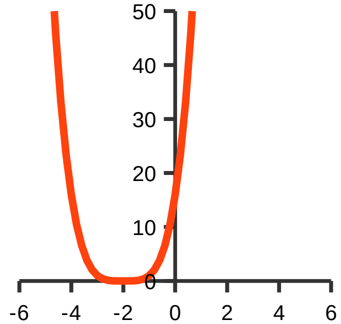


Musterbeispiele

1 einfache reelle Nullstelle
1 dreifache reelle Nullstelle
$y= (x-x1)(x-x2)^3$



1 vierfache Nullstelle
$y = (x-x1)^4$



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Gebrochen rationale Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen

a) Symmetrie:

Achsensymmetrie zur y-Achse:
Zähler und Nenner beide achsensymmetrisch oder beide punktsymmetrisch

Punktsymmetrie zum Ursprung:
Zähler und Nenner haben unterschiedliche Symmetrie

b) Verhalten im Unendlichen:

waagrechte Asymptote y = 0 (x-Achse):
Zählergrad < Nennergrad

waagrechte Asymptote $y = c \neq 0$:
Zählergrad = Nennergrad und
Vorfaktoren vor dem Bruch = c (und Vorfaktoren vor den höchsten Exponenten = 1)

schiefe Asymptote y = mx + n:
Zählergrad = Nennergrad + 1 oder
zweiteilig: $f(x) = mx + n + \frac{u(x)}{v(x)}$
mit Grad(u) < Grad(v)

Näherungspolynom n(x):
Zählergrad > Nennergrad + 1 oder
zweiteilig: $f(x) = n(x) + \frac{u(x)}{v(x)}$
mit Grad(u) < Grad(v)

c) Nullstellen:

Vielfachheit 1: Nullstelle $x1$ schneidet x-Achse : $(x - x1)^1$
Vielfachheit 2: Nullstelle $x1$ ist Extrempunkt : $(x - x1)^2$
Vielfachheit 3: Nullstelle $x1$ ist Sattelpunkt: $(x - x1)^3$

d) Polstellen (=Nullstellen des Nenners):

Vielfachheit 1: Polstelle $x1$ mit Vorzeichenwechsel $(x - x1)$
Vielfachheit 2: Polstelle $x1$ ohne Vorzeichenwechsel $(x - x1)^2$

e) Extrempunkte: $(x_E|y_E)$ Gleichungen $f(x_E) = y_E$ und $f'(x_E) = 0$

f) Wendepunkte: $(x_W|y_W)$ Gleichungen $f(x_W) = y_W$ und $f''(x_W) = 0$

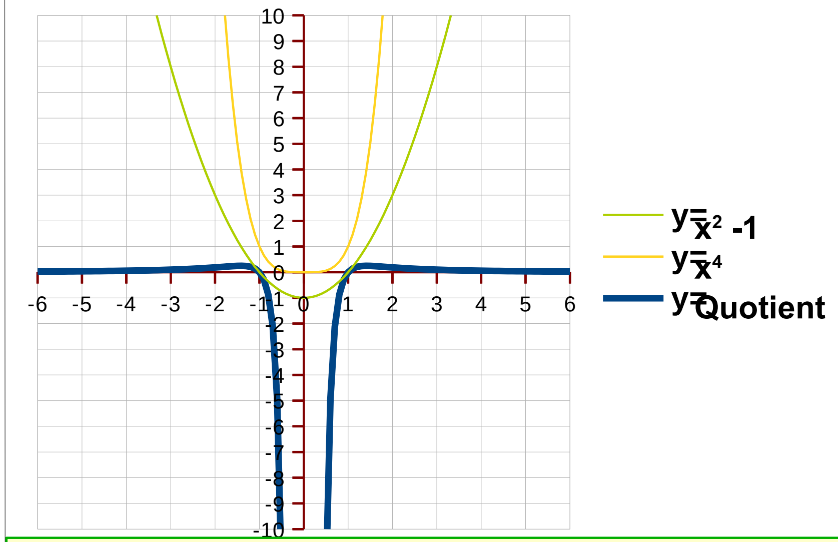
Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Gebrochen rationale Funktionen		

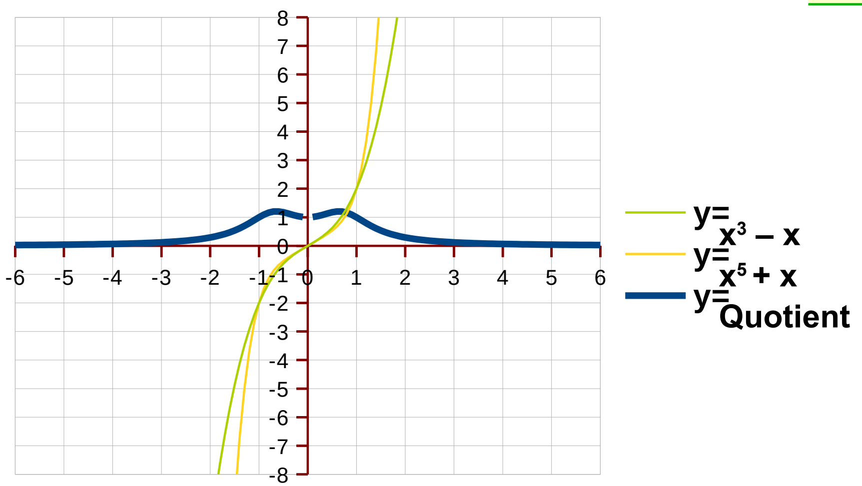
Symmetrieverhalten

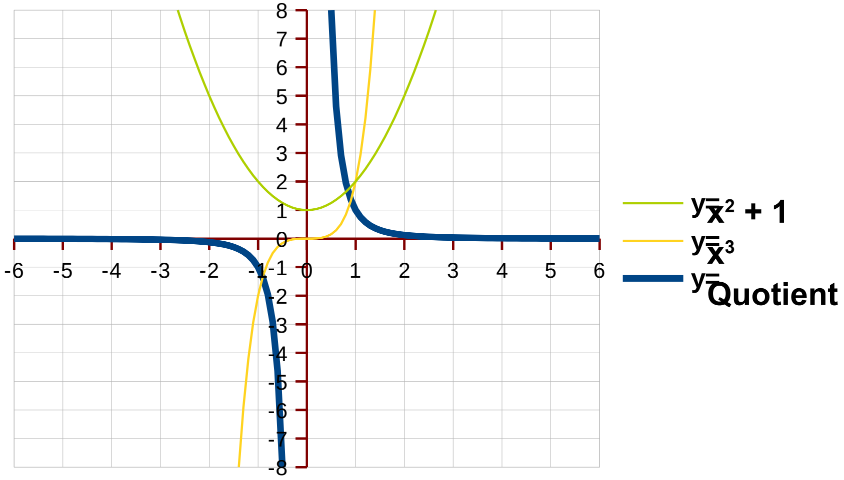
Diese sind schwierig an Hand der Definition nachzuweisen, aber man kann dabei folgende Regeln beachten

Zähler und Nenner achsensymmetrisch
=> Quotient achsensymmetrisch



Zähler und Nenner punktsymmetrisch
=> Quotient achsensymmetrisch



Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Gebrochen rationale Funktionen	**Zähler achsensymmetrisch und Nenner punktsymmetrisch => Quotient punktsymmetrisch** 	

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Gebrochen rationale Funktionen

Asymptotisches Verhalten für x-> - ∞ oder x-> +∞

Gebrochen rationale Funktionen lassen sich allgemein in der Form

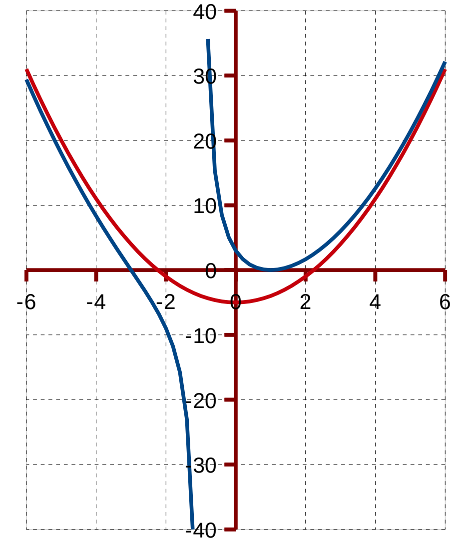
R(x) = P(x) + Z(x) / N(x)

schreiben. Auch Funktionen, die nur aus einer Funktion Z(x) und N(x) bestehen können mittels Polynomdivision auf die obige Form zurückgeführt werden.

Ist die höchste Potenz des Zählerpolynoms kleiner aus die höchste Potenz des Nennerpolynoms, dann ist P(x) =0;

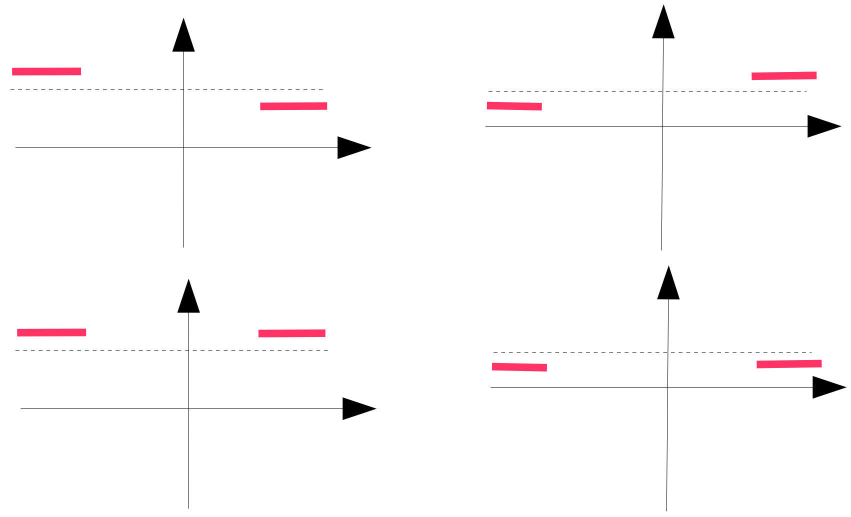
Ist die höchste Potenz des Zählerpolynoms gleich der höchsten Potenz des Nenner-polynoms, dann ist P(x) eine Konstante (= Polynom 0-ter Ordnung). In allen anderen Fällen ist P(x) ein Polynom mindestens erster Ordnung.

Das Polynom P(x) (rot) ist die Asymptote der gebrochen rationalen Funktion R(x) (blau) für x ⟶ + ∞ und x ⟶ - ∞



Für gebrochen rationale Funktionen in der Form R(x) = Z(x) / N(x)
Für die die höchste Potenz des Zählers gleich der höchsten Potenz des Nenners ist die Asymptote ein Parallele zur x- Achse. Der Wert ist der Quotient des Koeffizienten der höchsten Potenz des Zählers durch den Koeffizienten der höchsten Potenz im Nenner. In diesem Fall wäre bei einer Polynomdivision der Funktion P(x) eine Konstante.

Es sind alle vier Varianten der Annäherung an die Asymptote möglich. Das ist abhängig von den nachfolgenden Koeffizienten. Wenn die höchste Potenz des Zählers kleiner ist, als die des Nenners, dann ist die Asymptote die x-Achse selbst.



Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

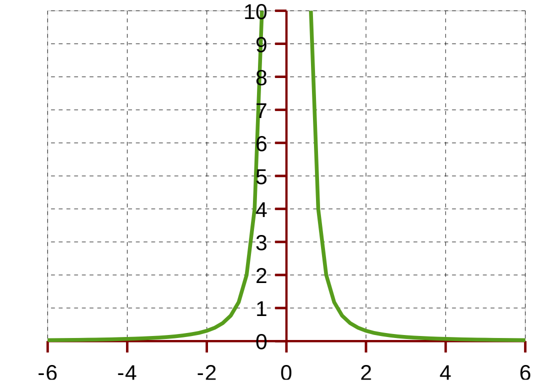
Gebrochen rationale Funktionen

Asymptotisches Verhalten für x-> - ∞ oder x-> +∞

Grad des Zählerpolynoms < Grad des Nennerpolynoms

In diesen Fällen ist die x-Achse eine waagerechte Asymptote

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^4}$$

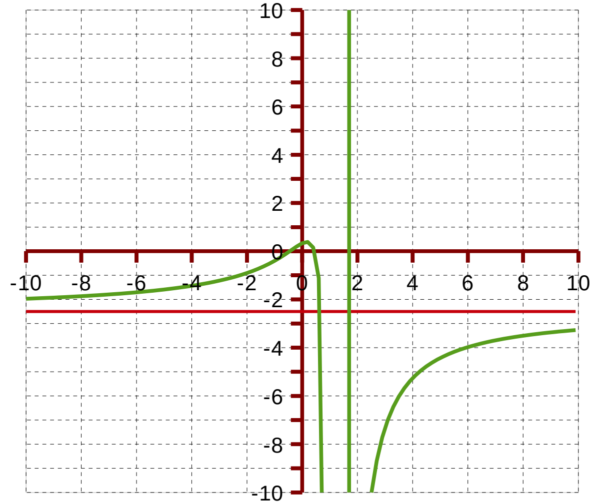


Grad des Zählerpolynoms = Grad des Nennerpolynoms

In diesen Fällen existiert eine waagerechte Asymptote. Der y-Wert ist der Quotient der beiden Koeffizienten der höchsten Potenzen.

$$y = \frac{-5x^2 - 1}{2x^2 - 5x + 3}$$

Asymptote y = -5/2

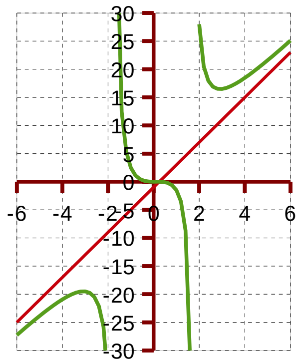


Grad des Zählerpolynoms = Grad des Nennerpolynoms + 1

In diesen Fällen ist die Asymptote eine Gerade, die durch Polynomdivison erzeugt werden kann.

$$y = \frac{4x^3 - x^2}{x^2 - 3}$$

Asymptote y = 4x – 1



Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

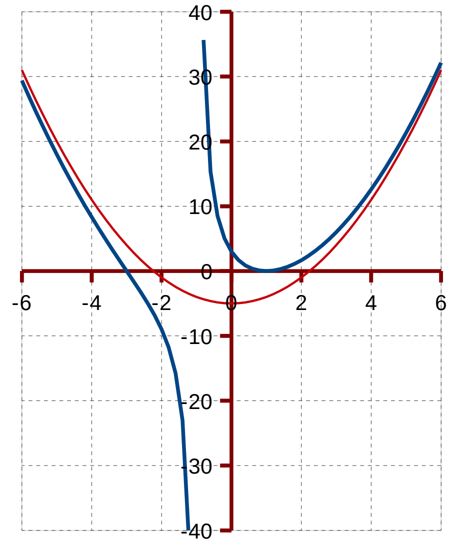
Gebrochen rationale Funktionen

Grad des Zählerpolynoms > Grad des Nennerpolynoms + 1

In all diesen Fällen ist die Asymptote ein Polynom, das aus Polynomdivision des Zählers und Nenners erzeugt werden kann.

$$y = \frac{(x-1)^2(x+3)}{x+1}$$

Asymptote $y = x^2 - 5$

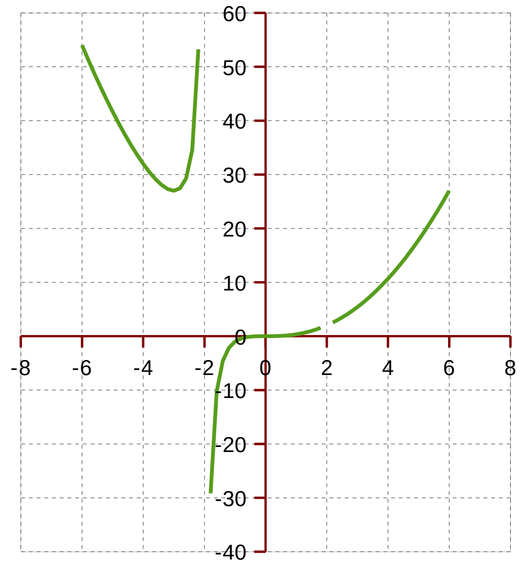


Behebbare Unstetigkeitsstellen

Funktionen, die sich als Quotient von zwei anderen Funktionen schreiben lassen, haben an den Nullstellen des Nenners meistens eine Polstelle. das trifft genau dann nicht zu, wenn der Zähler an dieser Stelle auch eine Nullstelle hat.das Funktionsergebnis ist dann 0:0, und dieser Ausdruck ist unbestimmt, er ist weder ∞ noch 0. Der Funktionswert muss mit speziellen Methoden ermittelt werden.

$$y = \frac{x^4 - 2x^3}{x^2 - 4} = \frac{x^3\,(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

x=-2 und x=2 sind Nullstelle der Nennerfunktion, aber x=2 ist auch Nullstelle der Zählerfunktion. Deshalb lässt sich der Linearfaktor (x-2) kürzen. Am Kurvenverlauf ist deutlich zu erkennen, dass es sich bei x=2 nicht um eine Polstelle handelt.



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Gebrochen rationale Funktionen

Nullstellen und Achsenschnittpunkt mit der y-Achse

Zur Bestimmung dieser Werte dienen die Regeln und Gesetze, die aus dem Kapitel Gleichungen bekannt sind. Für x=0 erhält man den Schnittpunkt mit der y-Achse. Nach der Definition für Funktionen kann es nur einen geben.
Wenn man den Funktionswert gleich 0 setzt und nach x auflöst erhält man die Schnittstellen mit der x-Achse.

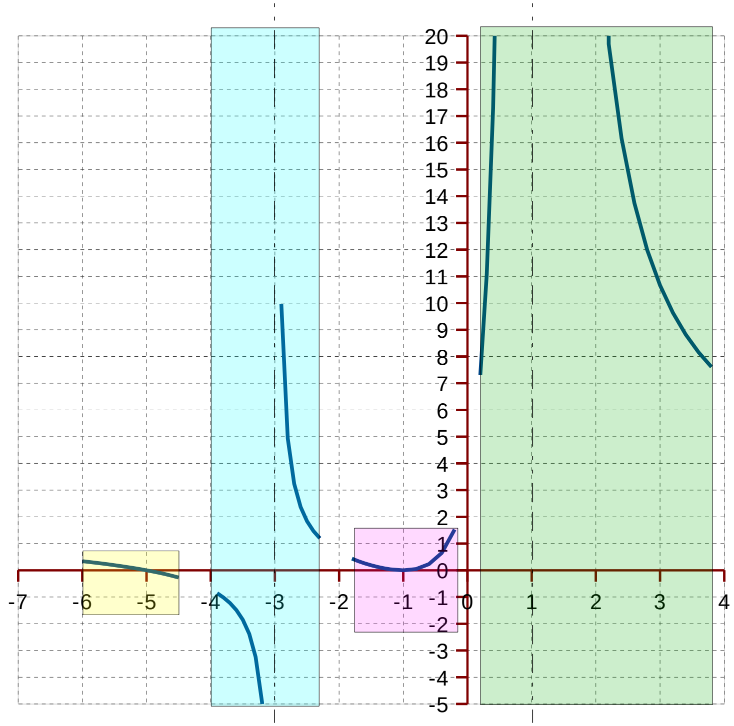
Funktionsverlauf aus der Linearfaktorzerlegung bestimmen

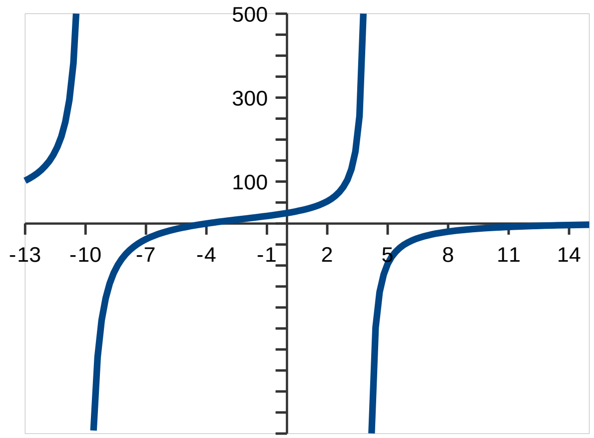
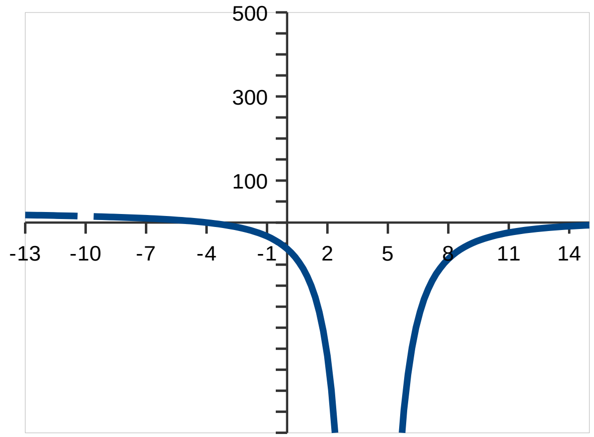
Falls es möglich ist, alle Nullstellen der Zähler und Nennerfunktion einer gebrochen-rationalen Funktion zu bestimmen, kann man über den Wurzelsatz des Vieta eine Linearfaktorzerlegung vornehmen. An Hand der Nullstellen des Zählerpolynoms und der Vielfachheit ihres ihres Auftretens kann man das Vorzeichenverhalten in der Umgebung der Nullstellen und Polstellen bestimmen.
Dazu ermittelt man nur das Vorzeichen der Linearfaktoren, die nicht zu der Nullstelle gehören und dann das Verhalten des Faktors an der Nullstelle.

$$y = \frac{(x-x_1)^{k1}(x-x_2)^{k2}\dots(x-x_n)^{kn}}{(x-x_{p1})^{m1}(x-x_{p2})^{m2}\dots(x-x_{pt})^{mt}}$$

Beispiel: $y = \frac{(x+1)^2(x+5)}{(x-1)^2(x+3)}$

Nullstelle x = - 5		Polstelle x = - 3		Nullstelle x = - 1		Polstelle x = 1	
$(x+1)^2$	+	$(x+1)^2$	+	$(x+1)^2$	+ / +	$(x+1)^2$	+
$(x+5)$	− / +	$(x+5)$	+	$(x+5)$	+	$(x+5)$	+
$(x-1)^2$	+	$(x-1)^2$	+	$(x-1)^2$	+	$(x-1)^2$	+ / +
$(x+3)$	−	$(x+3)$	− / +	$(x+3)$	+	$(x+3)$	+
=>	**+ / −**	**=>**	**− / +**	**=>**	**+ / +**	**=>**	**+ / +**



Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Gebrochen rationale Funktionen	**Polstellen** Gebrochenrationale Funktionen, deren Nennerfunktion Nullstellen besitzt, besitzt an diesen Stellen Polstellen, an denen die Funktion nicht definiert ist. **Achtung!** Hat an dieser Stelle die Zählerfunktion ebenfalls eine Nullstelle, entsteht ein undefinierter Ausdruck, der näher untersucht werden muss. Das Ergebnis ist in diesem Fall noch unbestimmt. Besitzt die Nennerfunktion eine **einfache Nullstelle**, wechselt das Vorzeichen der Funktion auf der anderen Seite der Polstelle.	
	Besitzt die Nennerfunktion eine **doppelte Nullstelle**, bleibt das Vorzeichen der Funktion auf der anderen Seite der Polstelle erhalten. Bezüglich des Vorzeichenwechsels an den Polstellen gilt das gleiche wie bei Nullstellen. (Es sind ja die Nullstellen des Nenners). Hat der Nenner eine ungerade Nullstelle gibt es Vorzeichenwechsel. Hat der Nenner eine gerade Nullstelle, gibt es keinen Vorzeichenwechsel.	

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Funktionen

Umkehrfunktionen

Zu jeder Funktion gibt es eine passende **Umkehrzuordnung**, die die jeweilige Zuordnung rückgängig macht.

f: x |–> 2x + 1 $\qquad$ f^{-1}: x |–> 0,5 x – 0,5

Den Graphen einer Umkehrzuordnung erhält man, indem man den Graphen der ursprünglichen Funktion an den Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten y = x spiegelt.

Nicht jede Umkehrzuordnung ist eine **Umkehrfunktion**.

Die Potenzfunktion x|–> x^n $\mathbb{D}=\mathbb{R}$ und geradem Exponenten n ordnet a und -a die gleiche Zahl a^n zu. Die Umkehrzuordnung ordnet also der Zahl an die beiden Zahlen a und -a zu. Die Umkehrzuordnung ist damit keine Funktion ! (Bei einer Funktion darf einem Ausgangswert nur ein eindeutiger Zielwert zugeordnet werden. Es können aber mehrere Ausgangswerte den gleichen Zielwert haben. Deshalb ist x^n für gerade n auch eine Funktion, da sie für a und -a nur einen eindeutigen Wert zuordnet, auch, wenn der Zielwert bei beiden gleich ist.)

Eine Funktion ist nur dann umkehrbar, wenn sie streng monoton wachsend oder fallend ist. (Das ist genau dann der Fall, wenn jedem Element aus $\mathbb{D}$ ein anderes Element aus $\mathbb{W}$ zugeordnet wird!)

Eine Funktion x|–> x^n $\mathbb{D}=\mathbb{R}_0^+$ und x|–> x^{-n} $\mathbb{D}=\mathbb{R}_0^+$ ist umkehrbar, die Umkehrfunktion lautet x|–> $x^{1/n}$ $\mathbb{D}=\mathbb{R}_0^+$ bzw x|–> $x^{-1/n}$ $\mathbb{D}=\mathbb{R}_0^+$

Den Ausdruck einer Umkehrfunktion kann man rechnerische ermitteln:

Beispiel 1:

1 Funktionsvorschrift aufschreiben: x|–> 3 x + 7
2 Funktionsgleichung aufschreiben y = 3 x + 7
3 Nach x auflösen

$y = 3x + 7$ | -7 (Umkehroperation zu +)
$y - 7 = 3x$ | : 3 (Umkehroperation zu *)
$⅓ y - 7/3 = x$

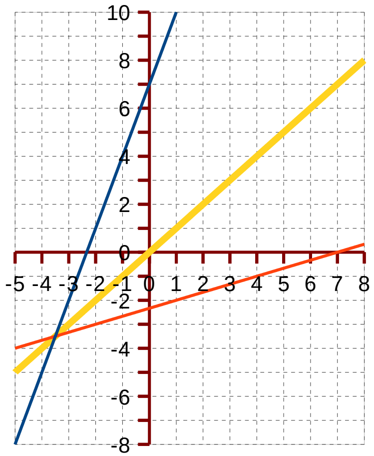
4 x und y vertauschen $⅓ x - 7/3 = y$
5 Funktionsvorschrift aufschreiben x|–> ⅓ x – 7/3

Beispiel 2:

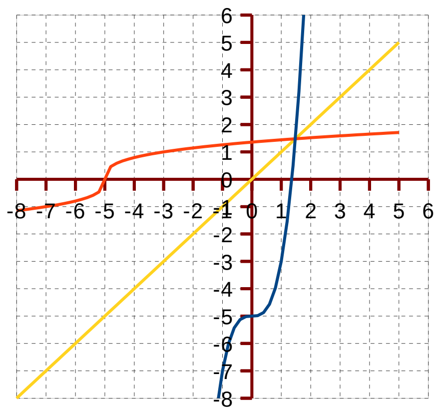
1 Funktionsvorschrift aufschreiben: x|–> $2x^3 - 5$
2 Funktionsgleichung aufschreiben $y = 2x^3 - 5$
3 Nach x auflösen

$y = 2x^3 - 5$ | +5 (Umkehroperation zu –)
$y + 5 = 2x^3$ | : 2 (Umkehroperation zu *)
$½ y + 5/2 = x^3$ | $\sqrt[3]{}$ (Umkehrfunktion zu x^3)
$\sqrt[3]{½ y + 5/2} = x$

4 x und y vertauschen $\sqrt[3]{½ x + 5/2} = y$



y= 3x + 7
y= ⅓ x – 7/3
y= x



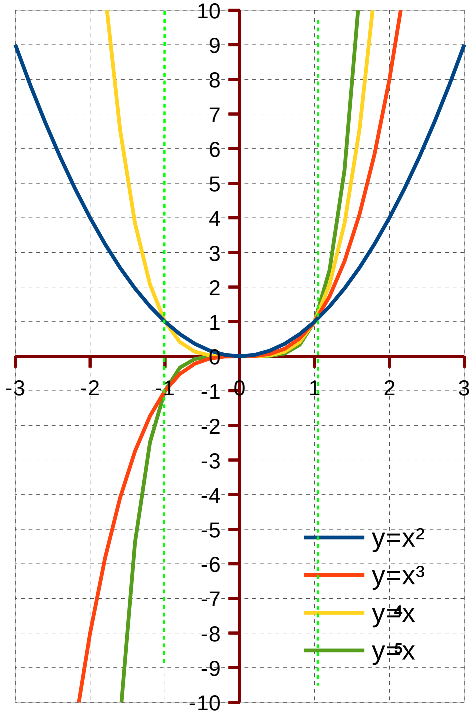
y= $2x^3 + 5$
y= $\sqrt[3]{½ x + 5/2}$
y= x

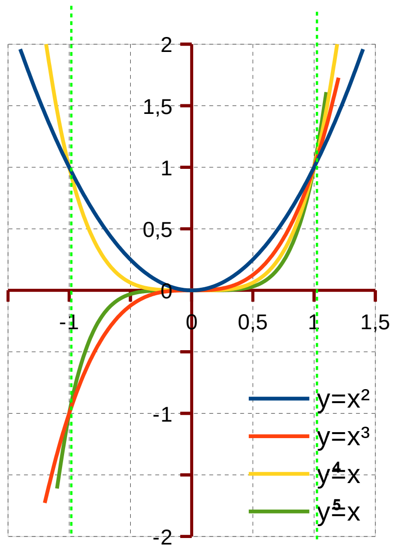
Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Funktionen

Potenzfunktionen mit positivem Exponenten





$y = x^n$	n geradzahlig	n ungeradzahlig
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$0 < y < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$
Nullstelle	$x = 0$	$x = 0$
Extrema	$x = 0$	
Wendepunkte		$x = 0$
GemeinsamePunkte	(-1,1); (0,0); (1,1)	(-1,-1); (0,0); (1,1)
Monotonie	$-\infty < x \leq 0$ monoton fallend $0 \leq x < +\infty$ monoton wachsend	$-\infty < x < +\infty$ monoton wachsend
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-1 \leq x \leq 0$ und $0 \leq x \leq 1$ zu den Intervallen $-\infty < x \leq -1$ und $1 \leq x < +\infty$	

Potenzen mit gleicher Basis und unterschiedlichen Exponenten:

1. Potenzgesetz $a^m * a^n = a^{n+m}$

2. Potenzgesetz $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ für n > m

Erweiterung des Potenzbegriffes: $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

3. Potenzgesetz $(a^m)^n = a^{n * m}$

Potenzen mit unterschiedlichen Basen und gleichen Exponenten:

4. Potenzgesetz $a^n * b^n = (a*b)^n$

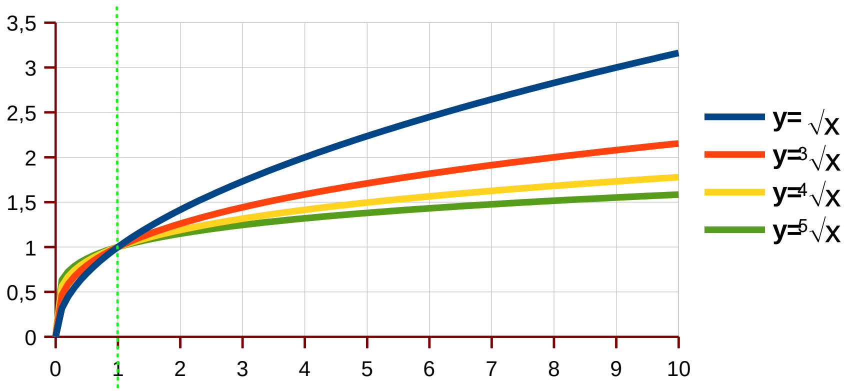
5. Potenzgesetz $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

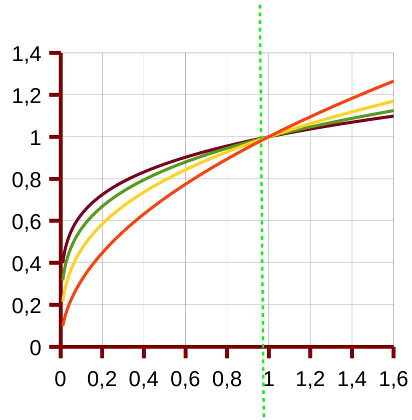
Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Funktionen

Wurzelfunktionen
(Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen)



$y = \sqrt[n]{x}$	**n ganzzahlig**
Definitionsbereich	$0 \leq x < +\infty$
Wertebereich	$0 \leq y < +\infty$
Nullstelle	$x = 0$
Extrema	
Wendepunkte	
GemeinsamePunkte	(0,0); (1,1)
Monotonie	$0 \leq x < +\infty$ monoton wachsend
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $0 \leq x \leq 1$ zu den Intervallen und $1 \leq x < +\infty$



Zugehöriges Potenzgesetz

1. Wurzelgesetz $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a^m})$ $\qquad (a^{1/n})^m = (a)^{m * 1/n}$

2. Wurzelgesetz $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n*m]{a} = a^{1/m*n}$

$(a^{1/n})^{1/m} = (a)^{1/m * 1/n} = a^{1/m*n}$

3. Wurzelgesetz $\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a * b}$ $\qquad a^{1/n} * b^{1/n} = (a * b)^{1/n}$

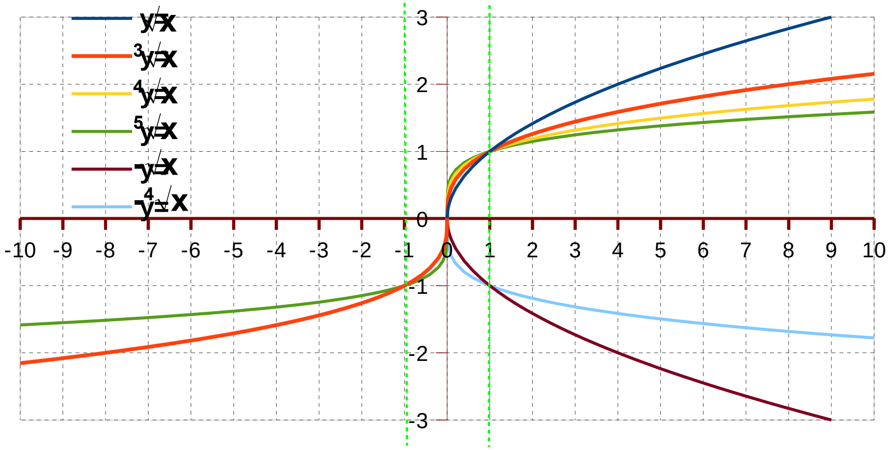
4. Wurzelgesetz $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ $\qquad a^{1/n} / b^{1/n} = (a / b)^{1/n}$

Spezialfall: $\frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}}$ Potenzgesetz $b^{-1/n} = (b^{-1})^{1/n}$

Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Funktionen	**Funktionszweige der Wurzelfunktionen**	

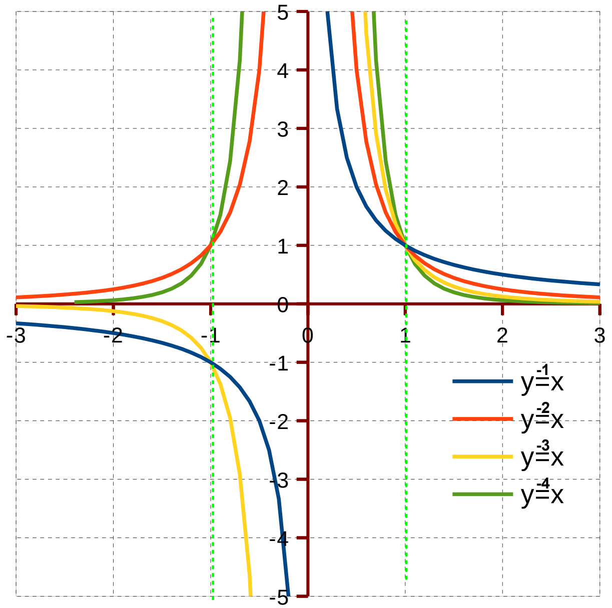


$y = \sqrt[n]{x}$	**n geradzahlig**	**n ungeradzahlig**
Definitionsbereich	$0 \leq x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$0 \leq y < +\infty$ $-\infty < y \leq 0$	$-\infty < y < +\infty$
Nullstelle	$x = 0$	$x = 0$
Extrema		
Wendepunkte		$x = 0$
GemeinsamePunkte	(0,0); (1,1) (0,0); (1,-1)	(-1,-1); (0,0); (1,1)
Monotonie	$-\infty < x \leq 0$ monoton fallend $0 \leq x < +\infty$ monoton wachsend	$-\infty < x < +\infty$ monoton wachsend
Besonderheiten	**zwei Kurvenbögen**	

zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-1 \leq x \leq 0$ und $0 \leq x \leq 1$ zu den Intervallen $-\infty < x \leq -1$ und $1 \leq x < +\infty$

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Funktionen	**Potenzfunktionen mit negativem Exponenten**	



$y = x^{-n}$	**n geradzahlig**	**n ungeradzahlig**
Definitionsbereich	$-\infty < x < 0$ $0 < x < +\infty$	$-\infty < x < 0$ $0 < x < +\infty$
Wertebereich	$0 < y < +\infty$	$-\infty < y < 0$ $0 < y < +\infty$
Gemeinsame Punkte	(-1,1); (1,1)	(-1,-1); (1,1)
Monotonie	$-\infty < x < 0$ monoton wachsend $0 < x < +\infty$ monoton fallend	$-\infty < x < 0$ monoton fallend $0 < x < +\infty$ monoton fallend
Polstellen	$x = 0$	$x = 0$
Asymptoten	x-Achse für $x \to -\infty$ x-Achse für $x \to +\infty$	x-Achse für $x \to -\infty$ x-Achse für $x \to +\infty$
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-1 \leq x \leq 0$ und $0 \leq x \leq 1$ zu den Intervallen $-\infty < x \leq -1$ und $1 \leq x < +\infty$	

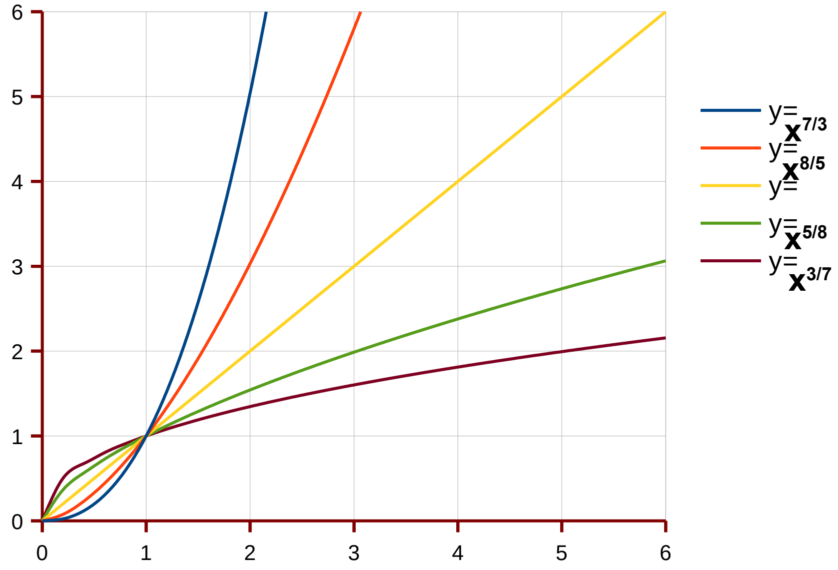
Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**

Funktionen

Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten

Da Potenz- und Wurzelfunktionen Umkehrfunktionen sind, gibt es interessante Beziehungen bei Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten, da rationale Exponenten Potenz- und Wurzelfunktion einschließen.

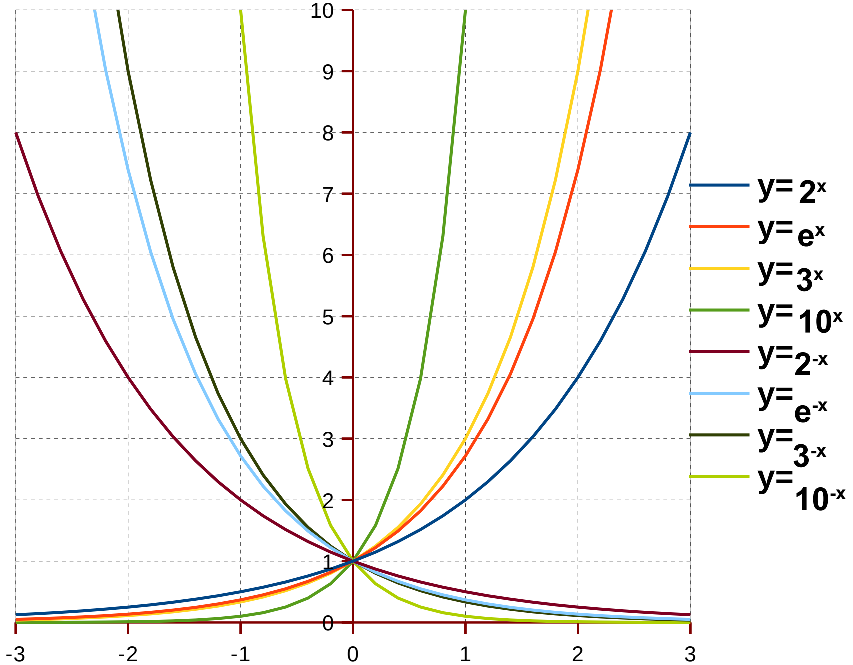
$y = x^{n/m}$ und $y = x^{m/n}$ sind Umkehrfunktionen



Der jeweils höhere Wert im Bruch des Exponenten bestimmt das Aussehen der Kurve. Ist der Zähler des Bruches größer als der Nenner, verhält sich die Kurve wie eine Potenzfunktion. Ist der Zähler kleiner als der Nenner, verhält sich die Kurve wie eine Wurzelfunktion.
Die Kurven spiegeln sich an der Geraden y=x.

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Funktionen	**Exponentialfunktionen**	

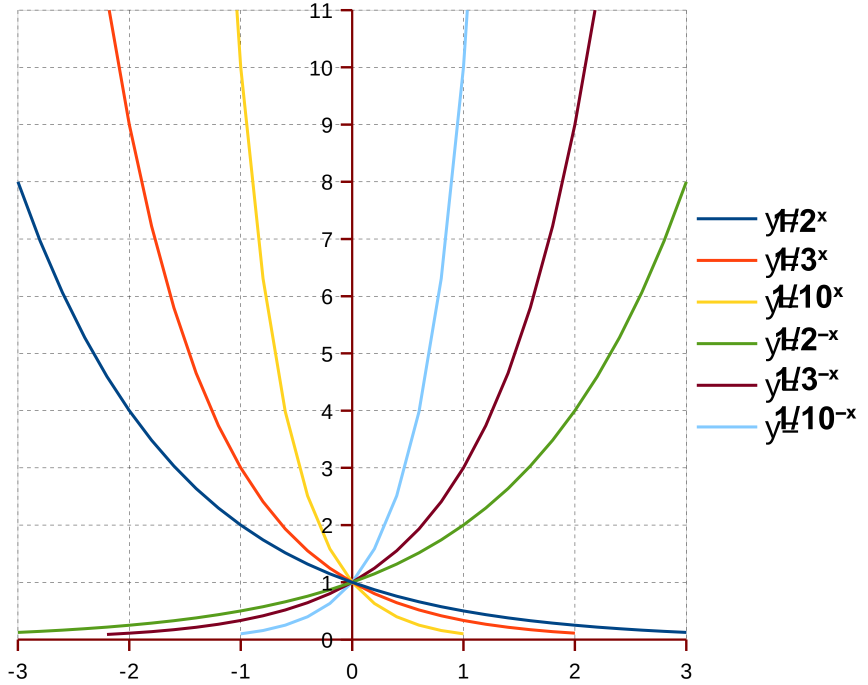
Exponentialfunktionen $y = a^x$ $a > 1$



	$y = a^x$ $a > 1$	$y = a^{-x}$
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$0 < y < +\infty$	$0 < y < +\infty$
Nullstelle		
Extrema		
Wendepunkte		
Gemeinsame Punkte	(0,1)	(0,1)
Monotonie	$0 \leq x < +\infty$ monoton wachsend	$0 \leq x < +\infty$ monoton fallend
Asymptote	x-Achse für $x \to -\infty$	x-Achse für $x \to +\infty$
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-\infty < x \leq 0$ zu den Intervallen und $0 \leq x < +\infty$	

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Funktionen	**Exponentialfunktionen $y= a^x$ $0 < a < 1$**	



	$y = a^x$ $0< a < 1$	$y = a^{-x}$
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$0 < y < +\infty$	$0 < y < +\infty$
Nullstelle		
Extrema		
Wendepunkte		
Gemeinsame Punkte	(0,1)	(0,1)
Monotonie	$0 \leq x <+\infty$ monoton fallend	$0 \leq x <+\infty$ monoton wachsend
Asymptote	x-Achse für $x\rightarrow -\infty$	x-Achse für $x\rightarrow +\infty$
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der im Kurven Intervall $-\infty < x \leq 0$ zu den Intervallen und $0\leq x < +\infty$. Das Kurvenbild der Funktion $y = 1/n^x$ ist das Spiegelbild der Funktion $y = n^x$ an der y-Achse gespiegelt	

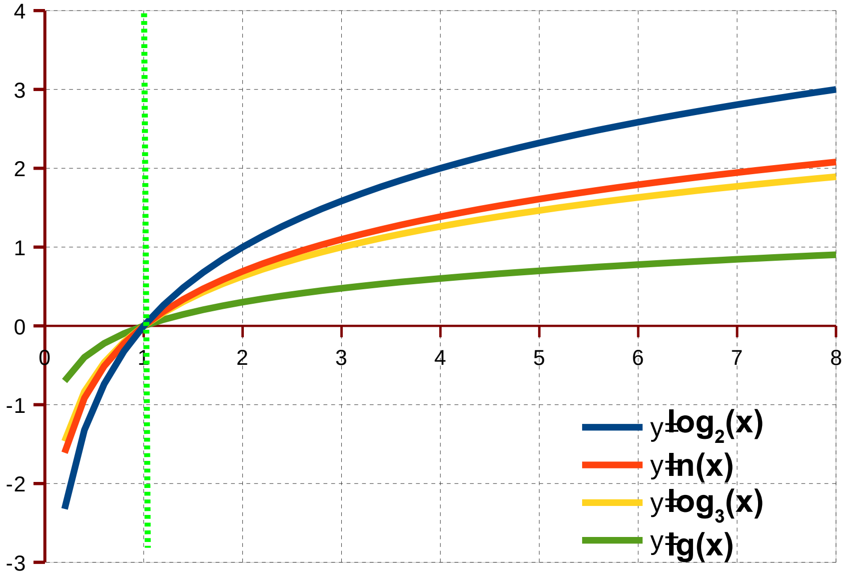
Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Funktionen

Logarithmusfunktionen (Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen)

Logarithmusfunktionen $y = \log_a(x)$ $a > 1$



$y = {_a\log}\, x$	$a > 1$
Definitionsbereich	$0 \le x < +\infty$
Wertebereich	$-\infty < y < +\infty$
Nullstelle	$x = 1$
Extrema	
Wendepunkte	
Gemeinsame Punkte	(1,0)
Monotonie	$0 < x < +\infty$ monoton wachsend
Asymptote	y-Achse für $x \to +0$
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-\infty < x \le 1$ zu den Intervallen und $1 \le x < +\infty$

Es existieren nur Logarithmengesetze zur gleichen Basis:

1. Logarithmengesetz $_a\log (b * c) = {_a\log}\, b + {_a\log}\, c$

Parallele zum Potenzgesetz $a^{n+m} = a^n * a^m$

2. Logarithmengesetz $_a\log (b / c) = {_a\log}\, b - {_a\log}\, c$

Parallele zum Potenzgesetz $a^{n-m} = a^n / a^m$

3. Logarithmengesetz $_a\log b^m = m * {_a\log}\, b$

Parallele zum Potenzgesetz $(a^n)^m = a^{n*m}$

4. Logarithmengesetz $_a\log \sqrt[n]{b^m} = m/n * {_a\log}\, b$

Parallele zum gleichen Potenzgesetz für rationale Exponenten

Spezialfälle:
$_a\log (1 / b) = - {_a\log}\, b$ $\quad$ $_a\log (a^x) = x$
$_a\log (a) = 1$
$_a\log (1) = 0$ $\quad$ $a^{_a\log (b)} = b$

$_a\log (0)$ ist undefiniert. $\lim_{x \to +0} {_a\log} (x) = -\infty$

Kettenregel

Logarithmen lassen sich von einer Basis auf eine andere Basis umrechnen: $_a\log b = {_a\log}\, c * {_c\log}\, b$

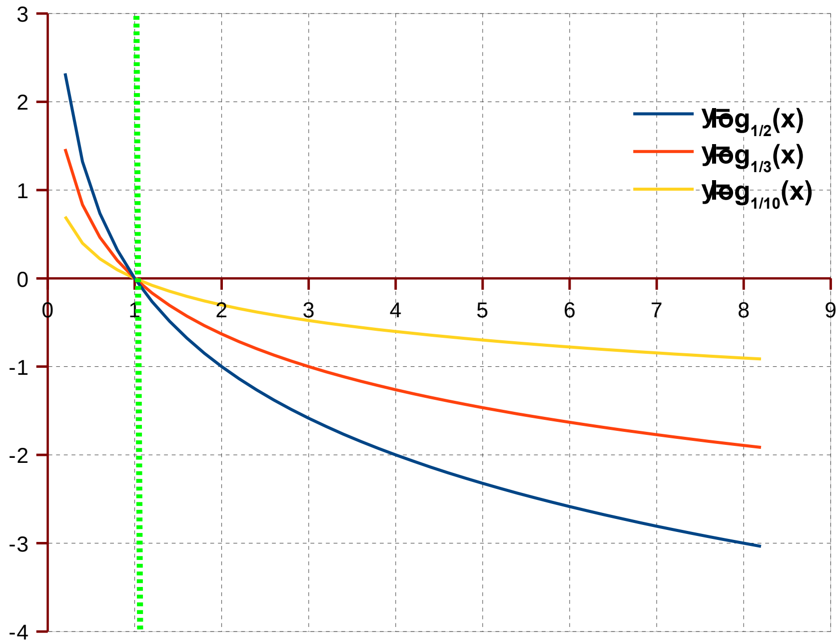
Logarithmen werden auf eine neue Basis umgerechnet, indem der Logarithmus des Numerus zur neuen Basis durch den Logarithmus der alten Basis zur neuen Basis dividiert wird: $\boxed{{_c\log}\, b = \frac{_a\log b}{_a\log c}}$

Umrechnung natürlicher Logarithmus in dekadischen Logarithmus: $\lg b = \frac{\ln b}{\ln 10} = \frac{\ln b}{2{,}3025851.}$

Umrechnung dekadischer Logarithmus in natürlichen Logarithmus: $\ln b = \frac{\lg b}{\lg e} = \frac{\lg b}{0{,}4342944}$

© Dipl.-Math. Armin Richter

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1		
Thema	**Gesetze und Regeln**	**Musterbeispiele**
Funktionen	**Logarithmusfunktionen $y= \log_a(x)$ $0 < a < 1$**	



$y = {}_a\log x$	**$0 < a < 1$**
Definitionsbereich	$0 \leq x < +\infty$
Wertebereich	$-\infty < y < +\infty$
Nullstelle	$x = 1$
Extrema	
Wendepunkte	
Gemeinsame Punkte	(1,0)
Monotonie	$0 < x < +\infty$ monoton fallend
Asymptote	y-Achse für $x \to +0$
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-\infty < x \leq 1$ zu den Intervallen und $1 \leq x < +\infty$

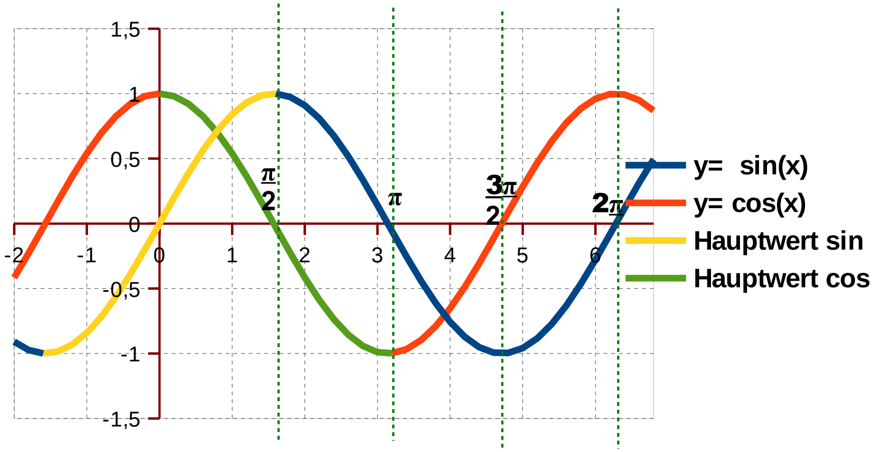
Treff Lernen
CHRISTINA STRAUCH

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Funktionen

Sinus und Cosinus Funktion



	y = sin(x)	y = cos(x)
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$-1 \le y \le 1$	$-1 \le y \le 1$
Nullstelle	$x = k\cdot\pi$	$x = \pi/2 + k\cdot\pi$
Extrema	$x = \pi/2 + 2k\cdot\pi$ Maximum $x = 3\pi/2 + 2k\cdot\pi$ Minimum	$x = 2k\cdot\pi$ Maximum $x = \pi + 2k\cdot\pi$ Minimum
Wendepunkte	$x = \pi/4 + k\cdot\pi$	$x = \pi/4 + k\cdot\pi$
Periode	2π	2π
GemeinsamePunkte	$(\pi/4 + k\cdot\pi, ½\sqrt{2})$	
Monotonie	$-\pi/2+2k\cdot\pi \le x \le \pi/2+2k\cdot\pi$ monoton wachsend $\pi/2+2k\cdot\pi \le x \le 3\pi/2+2k\cdot\pi$ monoton fallend	$\pi + 2k\cdot\pi \le x \le 2\pi + 2k\cdot\pi$ monoton wachsend $2k\cdot\pi \le x \le$ ð $+2k\cdot\pi$ monoton fallend
Besonderheiten		

Additionstheoreme

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\cdot\sin(\alpha)\cos(\beta)$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cdot\cos(\alpha)\cos(\beta)$

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cdot\cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\cdot\sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha) + \sin(\alpha) = \sqrt{2}\cdot\sin(45°+\alpha) = \sqrt{2}\cdot\cos(45°-\alpha)$

$\cos(\alpha) - \sin(\alpha) = \sqrt{2}\cdot\cos(45°+\alpha) = \sqrt{2}\cdot\sin(45°-\alpha)$

Produktformeln

$\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta) = \sin^2(\alpha) - \sin^2(\beta) = \cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha)$

$\cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\beta) = \cos^2(\beta) - \sin^2(\alpha)$

$\sin(\alpha)\sin(\beta) = ½\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

$\cos(\alpha)\cos(\beta) = ½\,[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

$\sin(\alpha)\cos(\beta) = ½\,[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$

Umrechung Vielfache eines Winkels in Ausgangswinkel

$\sin(2\alpha) = 2\cdot\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
$\sin(3\alpha) = 3\cdot\sin(\alpha) - 4\cdot\sin^3(\alpha)$
$\sin(4\alpha) = 8\cdot\sin(\alpha)\cos^3(\alpha) - 4\cdot\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

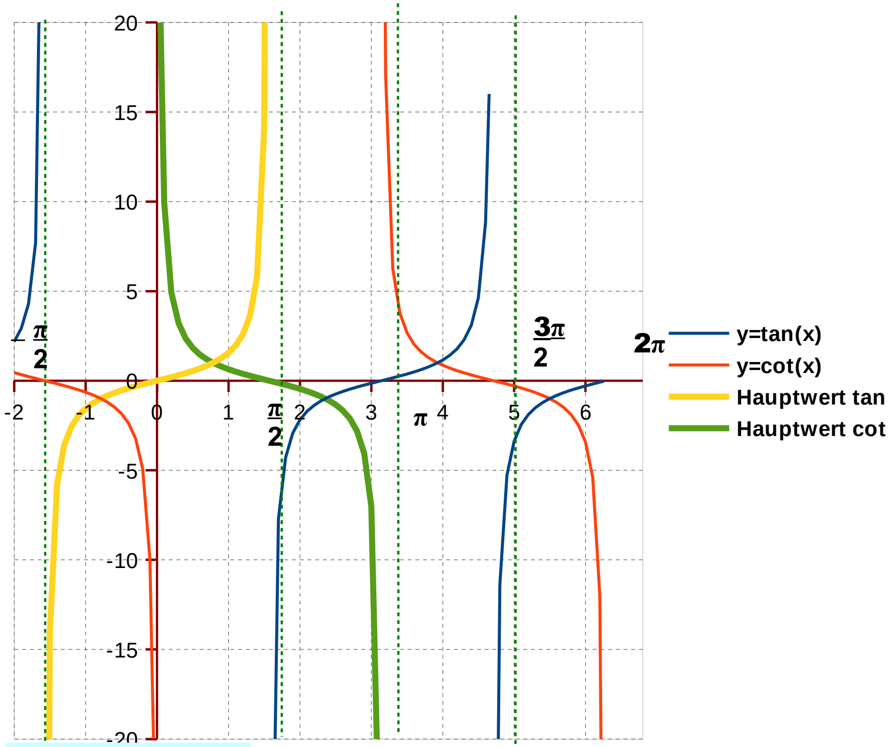
$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\cdot\sin^2(\alpha) = 2\cdot\cos^2(\alpha) - 1$
$\cos(3\alpha) = 4\cdot\cos^3(\alpha) - 3\cdot\cos(\alpha)$
$\cos(4\alpha) = 8\cdot\cos^4(\alpha) - 8\cdot\cos^2(\alpha) + 1$

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Funktionen

Tangens und Cotangens Funktion



	y = tan(x)	y = cot(x)
Definitionsbereich	π/2+k*π < x < π/2+k*π	k*π < x < π+k*π
Wertebereich	-∞ < y < +∞	-∞ < y < +∞
Nullstelle	x = k*π	x = π/2 +k*π
Extrema		
Wendepunkte	x = k*π	x = π/2 +k*π
Polstellen	x = π/2 +k*π	x = k*π
Periode	π	π
GemeinsamePunkte	(π/4 +k*π,1)	
Monotonie	-π/2+k*π < x < π/2+k*π monoton wachsend	k*π < x < π +k*π monoton fallend
Besonderheiten		

Additionstheoreme

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta) - 1}{\cot(\alpha) + \cot(\beta)} \qquad \cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta) + 1}{\cot(\alpha) - \cot(\beta)}$$

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} \qquad \tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$$

$$\cot(\alpha) + \cot(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)} \qquad \cot(\alpha) - \cot(\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

$$\frac{1 + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)} = \tan(45° + \alpha) \qquad \frac{1 + \cot(\alpha)}{1 - \cot(\alpha)} = \cot(45° + \alpha)$$

Produktformeln

$$\tan(\alpha)\tan(\beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{\cot(\alpha) + \cot(\beta)} = -\frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{\cot(\alpha) - \cot(\beta)}$$

$$\cot(\alpha)\cot(\beta) = \frac{\cot(\alpha) + \cot(\beta)}{\tan(\alpha) + \cot(\beta)} = -\frac{\cot(\alpha) - \cot(\beta)}{\tan(\alpha) - \cot(\beta)}$$

$$\tan(\alpha)\cot(\beta) = \frac{\tan(\alpha) + \cot(\beta)}{\cot(\alpha) + \tan(\beta)} = -\frac{\tan(\alpha) - \cot(\beta)}{\cot(\alpha) - \tan(\beta)}$$

$$\cot(\alpha)\tan(\beta) = \frac{\cot(\alpha) + \tan(\beta)}{\tan(\alpha) + \cot(\beta)} = -\frac{\cot(\alpha) - \tan(\beta)}{\tan(\alpha) - \cot(\beta)}$$

Umrechung Vielfache eines Winkels in Ausgangswinkel

$$\tan(2\alpha) = \frac{2*\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} \qquad \cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2*\cot(\alpha)}$$

$$\tan(3\alpha) = \frac{3*\tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1 - 3*\tan^2(\alpha)} \qquad \cot(3\alpha) = \frac{\cot^3(\alpha) - 3*\cot(\alpha)}{3*\tan^2(\alpha) - 1}$$

Umrechnung des halben Winkels in Ausgangswinkel

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}} = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$$

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{1 - \cos(\alpha)}} = \frac{\sin(\alpha)}{1 - \cos(\alpha)} = \frac{1 + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

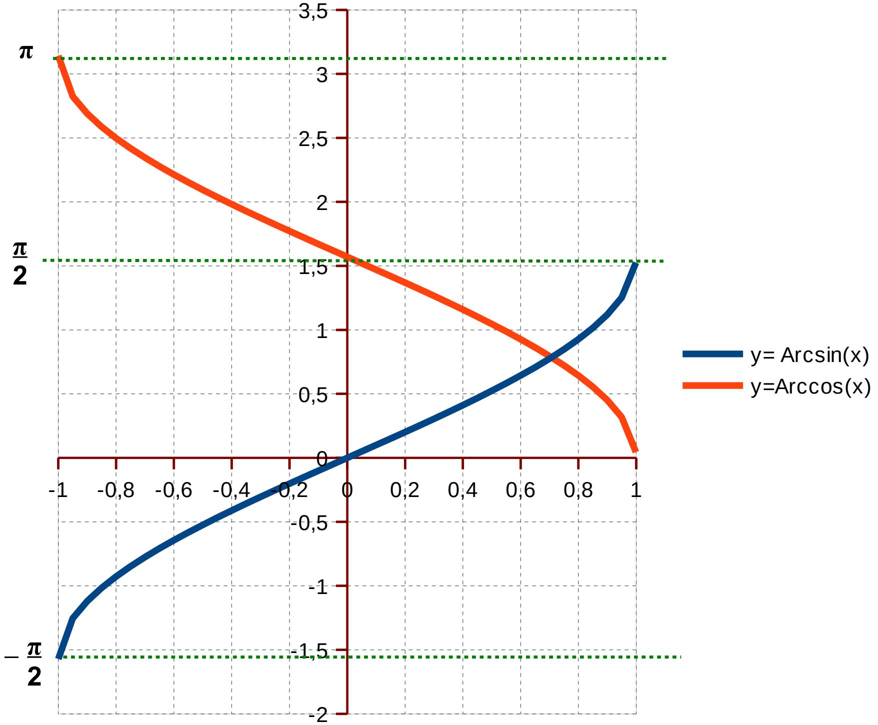
Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele

Funktionen

Arcusfunktionen (Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen)

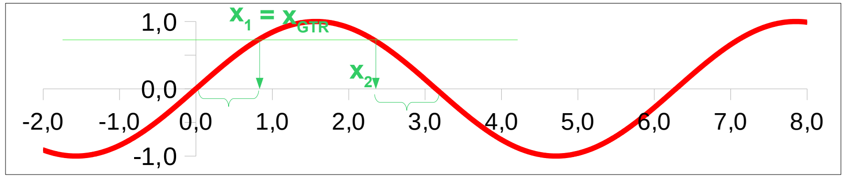
arcsin und arccos Funktion



	y = arcsin x	y = arccos x
Definitionsbereich	-1 ≤ x ≤ +1	-1 ≤ x ≤ +1
Wertebereich	- π/2 ≤ y ≤ + π/2	0 ≤ y ≤ π
Nullstelle	x = 0	
Extrema		
Wendepunkte	x = 0	x = 0
Gemeinsame Punkte		
Monotonie	monoton wachsend	monoton fallend
Besonderheiten		

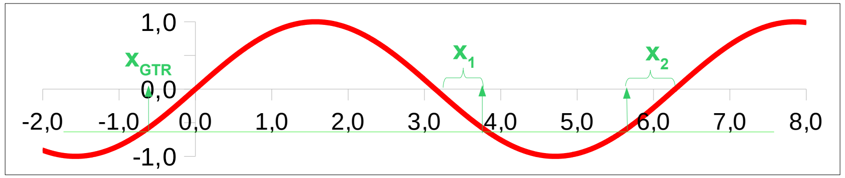
Musterbeispiele

sin(α) = 0,8 α ∈ [0;2π]



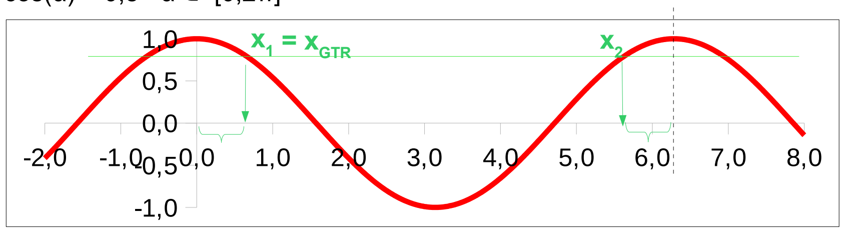
x_{GTR} = 0,927 x_1 = 0,927 x_2 = 3,14 – 0,927 = 2,214

sin(α) = –0,6 α ∈ [0;2π]



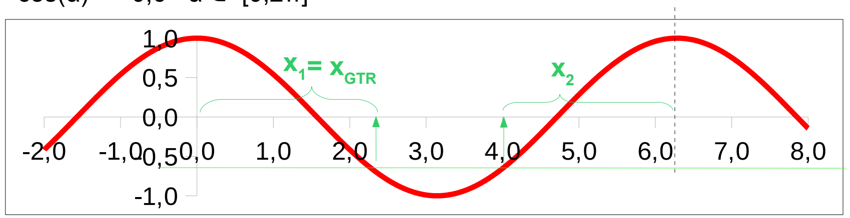
x_{GTR} = –0,643 (Winkel im IV. Quadranten)
x_1 = 3,14 + 0,643 = 3,785 x_2 = 6,28 – 0,643 = 5,639

cos(α) = 0,8 α ∈ [0;2π]



x_{GTR} = 0,643 x_1 = 0,643 x_2 = 6,28 – 0,643 = 5,639

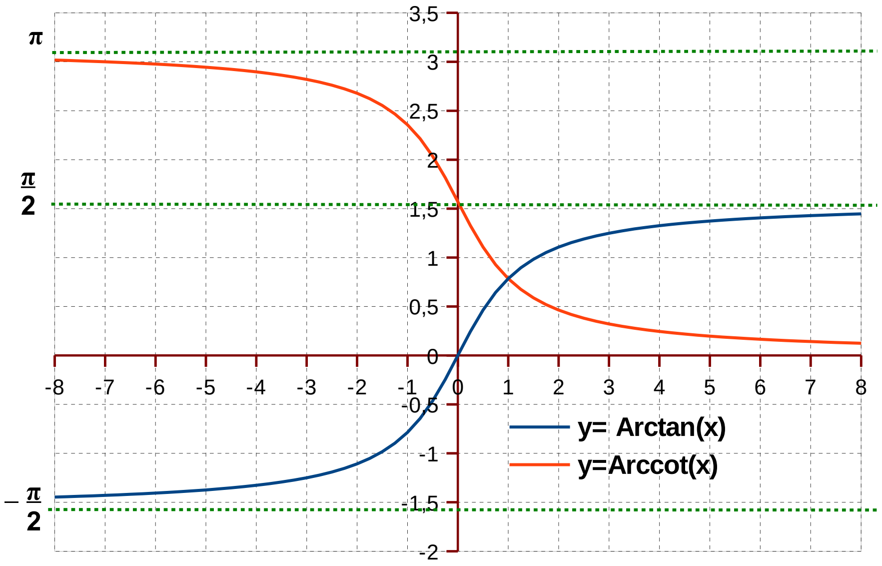
cos(α) = –0,6 α ∈ [0;2π]



x_{GTR} = 2,214 (Winkel im II. Quadranten)
x_1 = 2,214 x_2 = 6,28 – 2,214 = 4,068

Abitur in Mathematik: Analysis Teil 1

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Funktionen	**arctan und arccot Funktion**	



	y = arctan x	**y = arccot x**
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$-\pi/2 < y < +\pi/2$	$0 < y < \pi$
Nullstelle	$x = 0$	
Extrema		
Wendepunkte	$x = 0$	$x = 0$
Asymptote	$y = -\pi/2 \quad x \to -\infty$ $y = \pi/2 \quad x \to +\infty$	$y = 0 \quad x \to +\infty$ $y = \pi \quad x \to -\infty$
Monotonie	monoton wachsend	monoton fallend
Besonderheiten		