Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

1. Grundbegriffe

1.1. Grundbegriffe der Statistik

Urliste	Ungeordnete Zusammenstellung der beobachteten Ergebnisse	
Rangliste	Nach Größen geordnete Urliste	
Häufigkeitsliste	Die Häufigkeitsliste zeigt an, wie oft jedes Ereignis aufgetreten ist.	
absolute Häufigkeit	**Anzahl** des Auftretens eines Ereignisses in der Häufigkeitsliste	
relative Häufigkeit	**Verhältnis** $\frac{\text{Anzahl des Auftretens eines Ereignisses in der Häufigkeitsliste}}{\text{Anzahl aller Ereignisse in der Häufigkeitsliste}}$	
Minimum	Kleinster Wert einer Liste	
Maximum	Größter Wert einer Liste	
Spannweite	Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert einer Liste	
Mittelwert	Summe aller Werte geteilt durch die Anzahl aller Werte	
Modalwert	Der am häufigsten vorkommende Wert einer Liste. Es kann mehrere Modalwerte geben.	
Median	Zentralwert Anzahl ungerade: Der Wert an der mittleren Position der Rangliste Anzahl gerade: Arithmetisches Mittel der beiden mittleren Werte der Rangliste	
Quartil	Quartile teilen die Rangliste in vier Abschnitte auf. In jedem Abschnitt befinden sich **<u>mindestens</u>** 25% aller Werte der Rangliste.	
unteres Quartil	multipliziere n mit ¼	ist das Ergebnis nicht ganzzahlig, so nimmt man den Wert des nächst höheren Rangplatzes
Zentralwert	multipliziere n mit ½	
oberes Quartil	multipliziere n mit ¾	
Quartilsabstand	Differenz zwischen dem oberen und unteren Quartil	
Varianz	Summe aus der Differenz der Quadrate aller Werte zum Mittelwert dividiert durch die Anzahl aller Werte	$s^2 = \frac{(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \ldots + (x_n - x)^2}{n}$
Standardabweichung	Quadratwurzel aus der Varianz.	$s = \sqrt{s^2}$

1.2. Grundbegriffe der Stochastik

Zufallsexperiment	Ein beliebig oft wiederholbarer Vorgang, der nach einer bestimmten Vorschrift ausgeführt wird, und dessen Ergebnis nicht im voraus eindeutig bestimmt werden kann.
Mehrstufige Zufallsexperimente	Ein mehrstufiger Zufallsversuch ist in der Regel eine Nacheinanderausführung mehrerer Versuche. Diese Hintereinanderausführung kann auch zeitgleich erfolgen. Der Versuch wird dann gedanklich in zwei Teilversuche zerlegt.
Ergebnis	Die möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments werden mögliche Ergebnisse genannt.
Ergebnismenge	Die Menge aller mit einem Zufallsexperiment verbundenen möglichen Ergebnisse werden zu einem Ereignisraum (Ω) zusammengefasst. Jedes einzelne Zufallsexperiment führt zu einem bestimmten Ergebnis, das zu einem Ereignisraum zählt, der für die Art des Zufallsexperiments charakteristisch ist. Ereignisse sind Teilmengen von . Ω wird auch als das „sichere Ereignis“ bezeichnet.
Ereignis	Teilmengen bzw. Klassen zusammengefasster Ergebnisse werden Ereignisse genannt (ein Ereignis kann auch aus nur einem möglichen Ergebnis bestehen). Ein Ereignis wird als „zufällig“ bezeichnet, wenn sein Eintreten unter den gegebenen Bedingungen nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden kann.
Elementarereignis	Ein Ereignis, das nur ein Element der Menge Ω umfasst, und damit nur ein Ergebnis wird als Elementarereignis bezeichnet.
Absolute Häufigkeit	Anzahl des Auftreten eines Ereignisses bei der Durchführung von mehreren gleichartigen Zufallsversuchen
Relative Häufigkeit	Verhältnis der Anzahl des Auftreten eines Ereignisses zur Gesamtzahl der durchgeführten Versuche
Gegenereignis	Enthält alle Ergebnisse, die in einem vorgegebenen Ereignis nicht enthalten sind, aber zur Gesamtmenge aller Ereignisse gehören.
unmögliches Ereignis	Ereignis, das niemals eintreten kann
sicheres Ereignis	Ereignis, dass immer eintritt
Vereinigungsmenge	Ergebnisse, die in der Ergebnismenge E1 oder der Ergebnismenge E2 enthalten sind. Dabei können Ergebnisse auch in beiden Mengen enthalten sein.
Schnittmenge	Ergebnisse, die sowohl in der Ergebnismenge E1, wie auch in der Ergebnismenge E2 enthalten sind.

2. Wahrscheinlichkeit

2.1. Begriffe

Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeiten zwischen 0 und 1 sind Zahlen, die ein Maß für die „Erwartung“ ausdrücken, mit denen ein Ereignis zu einem Zufallsexperiment eintritt.
Die Wahrscheinlichkeit 0 beschreibt hierbei, dass das beschriebene Ereigniss unmöglich eintritt.
Die Wahrscheinlichkeit 1 besagt, dass das entsprechende Ereignis sicher eintritt (mit 100%-iger Wahrscheinlichkeit).

Lapalce-Wahrscheinlichkeit

Ein Zufallsexperiment, bei dem jedes Elementarereignis die gleich Wahrscheinlichkeit besitzt heißt Laplace-Experiment.
Für ein Ereignis A bei einem Laplace-Experiment berechnet sich die Wahrscheinlichkeit P(A) durch:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Pfadregeln

Produktregel (1. Pfadregel)
Die Wahrscheinlichkeit P eines Ergebnisses ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten des Pfades.

Summenregel (2. Pfadregel)
Die Wahrscheinlichkeit P eines Ergebnisses das aus mehreren Pfaden besteht ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die für dieses Ereignis günstig sind.

Verzweigungsregel (3. Pfadregel)
Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die vom selben Verzweigungspunkt ausgehen, ist stets 1,

Bernoulli-Experiment

Ein Bernoulli-Experiment ist eine Zufallsexperiment mit genau zwei verschiedenen Ergebnissen.
(Die Ergebnismenge besitzt nur zwei Elemente. Man bezeichnet sie oft mit „Treffer“ und „Niete“.)

Bernoulli-Kette

Wird ein Bernoulli-Experiment genau n mal durchgeführt, so spricht man von einer Bernoulli-Kette der Länge n.

Erwartungswert

Ist eine Zufallsvariable (-größe) X mit den Werten x_1 bis x_r gegeben, dann ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen folgendermaßen definiert:
$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_r \cdot P(X = x_r)$
Oft schreibt man für $E(X)$ auch μ.
- Beschreibt X den Gewinn/Verlust, liefert μ einen Wert für den durchschnittlichen Gewinn/Verlust auf „lange Sicht“. $\mu=0 \Leftrightarrow$ Spiel ist fair.
- Beschreibt X die Trefferzahl bei einer Bernoulli-Kette (X binomialverteilt), gilt $\mu = np$ und liefert ein Maß für die „durchschnittliche Trefferzahl“.

Varianz

Ist eine Zufallsvariable (-größe) X mit den Werten x_1 bis x_r gegeben, versteht man unter der Varianz der Zufallsvariablen X den Ausdruck:
$V(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \ldots + (x_r - \mu)^2 \cdot P(X = x_r)$
Bemerkungen:
- Man schreibt für die Varianz auch $V(X) = \sigma^2$.
- Die Varianz ist (wie die Standardabweichung) ein Maß für die Streuung der Ergebnisse um den Mittelwert.
- Falls X binomialverteilt ist, gilt $\sigma^2 = np \cdot (1-p)$.

Standardabweichung

Die Wurzel aus der Varianz einer Zufallsvariablen (-größe) X nennt man Standardabweichung von X. Man bezeichnet sie mit σ.
Bemerkungen:
- σ spielt eine große Rolle bei der Normalverteilung (zur „Anpassung“ der Gaußsche Glockenfunktion)
- Falls X einen Gewinn/Verlust darstellt, liefert σ im Gegensatz zu V(X) die Einheit €.
- Zum Rechnen ist V(X) besser geeignet (keine Wurzel).

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

2.2. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel
Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses B unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist.	$P_A(B)$ oder $P(B\|A)$ $\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$	

2.3. Totale Wahrscheinlichkeit

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel
Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses B in der 2. oder folgenden Stufen eines mehrstufigen Zufallsexperiments ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten von Ereignisketten, die zu diesem Ereignis führen. (s. 2. Pfadregel)	$\boxed{P(A) = P(B)\, P_B(A) + P(\bar{B})\, P_{\bar{B}}(A)}$	

2.4. Satz von Bayes

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel
Die bedingte Wahrscheinlichkeit von $P_A(B)$ lässt sich aus der Kenntnis der (umgekehrten) bedingten Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ und der totalen Wahrscheinlichkeit P(A) bestimmen	$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)\, P_B(A)}{P(A)}$ und $P(A) = P(B)\, P_B(A) + P(\bar{B})\, P_{\bar{B}}(A)$ $\boxed{P_A(B) = \frac{P(B)\, P_B(A)}{P(B)\, P_B(A) + P(\bar{B})\, P_{\bar{B}}(A)}}$	

2.5. Unvereinbare Ereignisse

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel
Vereinbare Ereignisse können gleichzeitig vorliegen (weibliches Geschlecht, Schwangerschaft); unvereinbare Ereignisse schließen sich gegenseitig aus (männliches Geschlecht, Schwangerschaft)	$A \cap B = \varnothing$ $P(A \cap B) = 0$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	(Unvereinbar ist nicht stochastisch unabhängig! nur vereinbare Ereignisse können stochastisch unabhängig sein)

2.6. Vereinbare Ereignisse

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel
Das Ereignis B kann eintreten, wenn das Ereignis A bereits eingetreten ist.	$A \cap B \neq \varnothing$ $P(A \cap B) \neq 0$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	(Vereinbar ist nicht zwangsläufig stochastisch abhängig! nur vereinbare Ereignisse können auch stochastisch unabhängig sein)

2.7. Stochastisch unabhängige Ereignisse

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel
Mehrstufige Ereignisse heißen „stochastisch unabhängig“, wenn das Ergebnis der (n+1)-ten Stufe nicht vom Ausgang der n-ten Stufe beeinflusst wird. stochastische Unabhängigkeit ist keine Eigenschaft der Ereignisse, sondern eine Eigenschaft der Wahrscheinlichkeiten	Das gleiche Experiment mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten kann einmal stochastisch unabhängig das andere mal stochastisch abhängig sein. $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$ $= P(A) \cdot P_A(B)$ $= P(B) \cdot P_B(A)$ $\boxed{P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)}$ $\boxed{P_A(B) = P(B)}$ $\boxed{P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)}$	Alle Glücksradexperimente, Würfelexperimente sind stochastisch unabhängig Stochastische Unabhängigkeit lässt sich nur durch Rechnung bestimmen

2.8. Stochastisch abhängige Ereignisse

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel
Mehrstufige Ereignisse heißen „stochastisch abhängig“, wenn das Ergebnis der (n+1)-ten Stufe vom Ausgang der n-ten Stufe beeinflusst wird.	Alle unvereinbaren Experimente sind stochastisch abhängig (Wenn das eine Ereignis eingetreten ist, kann das andere nicht eintreten). $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$ $= P(B) \cdot P_B(A)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	Alle Urnenexperimente „ohne Zurücklegen“ sind stochastisch abhängig (Der Ausgang der ersten Ziehung beeinflusst die Ausgänge der folgenden Ziehungen)

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

3. Zufallsvariable/ Zufallsgröße

3.1. Begriff

Eine Zufallsvariable ist eine **Abbildung** von **Zufallsereignissen** auf die Menge der **reellen Zahlen**.

Eine Zufallsvariable hat weder etwas mit Zufall, noch mit Variable zu tun. Allen Zufallsereignissen wird eine entsprechende reelle Zahl zugeordnet.

Die Zufallsvariable vergröbert möglicherweise die Zufallsergebnisse, indem verschiedene Zufallsereignisse zu einem Wert der Zufallsvariablen zusammengefasst werden.

Einfach formuliert: Jedem Ergebnis e oder ω der Ergebnismenge Ω einer Beobachtungsreihe wird eine reelle Zahl X(e) oder X(ω) zugeordnet. Dabei hat diese Zuordnung nichts zufälliges an sich – sie ist eindeutig, aber häufig nicht umkehrbar eindeutig. Zufällig ist nur – so wie schon bisher – das Auftreten bestimmter Ergebnisse e oder ω im Verlaufe einer Beobachtungsreihe.

- Zufallsgrößen werden definiert, um die Ergebnisse von Beobachtungsreihen mit mathematischen Methoden weiter verarbeiten zu können. Da es sich bei den Zufallsgrößen um reelle Zahlen handelt, kommen auch alle mathematischen Operationen für reellwertige Funktionen in Frage.

Zufallsereignis:
Würfeln mit zwei Würfel.

Zufallsvariable:
Die Summe der erreichten Augenzahlen

Zufallsereignis:
Glücksrad mit verschiedenen Gewinnmöglichkeiten.

Zufallsvariable:
Gewinn nach dreimaligem Drehen des Glücksrades.

3.2. Diskrete Zufallsgröße

Eine diskrete Zufallsgröße nimmt nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte an.

Die Wertemenge ist eine endliche oder eine abzählbar unendliche Menge.

3.3. Verteilungstabelle – Wahrscheinlichkeitsverteilung

Sind für die Zufallsgröße X nur endlich viele Werte möglich, kann man diese in eine Verteilungstabelle (erste Zeile) eintragen und ihnen die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten (in der zweiten Zeile) zuordnen.

In jeder Verteilungstabelle muss die Summe aller Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Zeile 1 ergeben, sonst hat sich ein Fehler eingeschlichen. Grafisch lässt sich eine Verteilungstabelle mit Hilfe eines Histogramms = Säulendiagramm oder eines Stabdiagramms veranschaulichen.

Diese Zuordnung bezeichnet man als **Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder **Dichtefunktion**.

Bei einem Würfel können nur 6 verschiedene – also endlich viele – Ereignisse auftreten.

k	1	2	3	4	5	6
P(X=k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Beim Würfelspiel handelt es sich um eine
- diskrete
- gleichverteilte

Zufallsgröße

3.4. Verteilungsfunktion

Als Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße X bezeichnet man die für alle reellen Zahlen x definierte Funktion:

$F_{n;p;k}(X) = P(X \le k)$

Verteilungsfunktionen von diskreten Zufallsgrößen stellen sich als monoton wachsende Treppenfunktion dar.

Die **Verteilungsfunktion** summiert die Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion bis einschließlich k auf.

Die Verteilungsfunktionen ist von drei Parameter abhängig:
- Anzahl der Versuche n
- Vorhandene Wahrscheinlichkeit p
- Gesuchte Anzahl k

Beim Würfel entsteht folgende Verteilungsfunktion:

k	1	2	3	4	5	6
P(X≤k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

3.5. Erwartungswert

Ist eine Zufallsvariable (-größe) X mit den Werten x_1 bis x_r gegeben, dann ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen folgendermaßen definiert:

$$E(X) = x_1 \cdot P(X=x_1) + x_2 \cdot P(X=x_2) + \ldots + x_r \cdot P(X=x_r)$$

Oft schreibt man für $E(X)$ auch μ
- Beschreibt X den Gewinn/Verlust, liefert μ einen Wert für den durchschnittlichen Gewinn/Verlust auf „lange Sicht“.
- Ist μ=0 spricht man bei einem Spiel von einem fairen Spiel.
- Beschreibt X die Trefferzahl bei einer Bernoulli-Kette (X binomialverteilt), gilt μ = np und liefert ein Maß für die „durchschnittliche Trefferzahl“.

Erwartungswert beim Würfelspiel:

k	1	2	3	4	5	6
P(X=k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
k·P(X=k)	$1\cdot\frac{1}{6}$	$2\cdot\frac{1}{6}$	$3\cdot\frac{1}{6}$	$4\cdot\frac{1}{6}$	$5\cdot\frac{1}{6}$	$6\cdot\frac{1}{6}$

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5$$

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

3.6.. Faires Spiel

1. Schritt: Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Gewinn des betrachteten Spielers und die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten aufstellen
2. Schritt: Erwartungswert dieses Gewinns berechnen und dieses Ergebnis interpretieren
3. Schritt: die Spielbedingungen so festlegen, dass das Spiel fair ist, also E(G) = 0 ist oder das gewünschte Ergebnis zeigt

Beispiel: e = 2€ Spieleinsatz
Betrachten des Gewinns von Spieler A

Auszahlung an A	0€	1€	2€	3€	4€
Gewinn g_i	-2€	-1€	0€	1€	2€
$P(G = g_i)$	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

E(X) = –0,3, d.h. Spieler A verliert pro Spiel im Durchschnitt 30 ct.
Damit das Spiel fair ist, wird der Einsatz verändert:

Gewinn g_i	–e€	(1-e)€	(2-e)€	(3-e)€	(4-e)€
$P(G = g_i)$:	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

E(X) = 0
= –0,2e + 0,2(1 – e) + 0,4(2 – e) + 0,1(3 – e) + 0,1(4 – e)
= – e + 1,7 = 0   fairer Einsatz 1,70 €

3.7. Varianz

Für eine Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}$ berechnet sich die Varianz V(X) über die Formel:

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - E(X))^2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + (x_r - E(X))^2 \cdot P(X = x_r)$$

Zunächst ist die Varianz ein Maß für die Abweichungen der einzelnen Ergebnisse einer Beobachtungsreihe vom Erwartungswert = Mittelwert der Zufallsgröße X. Je größer die Differenzen in den Klammern sind, desto größer werden auch die Quadrate davon.

Würde man auf die Quadrate verzichten, kann sich als Ergebnis der Wert Null ergeben, weil sich die positiven und negativen Abweichungen vom Erwartungswert gegenseitig aufheben. Es soll sich aber letztlich jede Abweichung in der Größe der Varianz auswirken. Das geht nur, wenn jede Abweichung – egal ob positiv oder negativ – einen (positiven) Beitrag zur Summe leistet.

3.8. Standardabweichung

Die Standardabweichung ist die Wurzel aus der Varianz.

$$\sigma = \sqrt{VAR(X)}$$

Da die Varianz auch in der Maßeinheit zu einem Quadrat führt, kann man diesen Wert nicht zusammen mit den Wahrscheinlichkeitsfunktionen in ein Koordinatensystem zeichnen.
Durch das Berechnen der Wurzel wird die Maßeinheit wieder auf die Maßeinheit der Verteilungsfunktion zurückgeführt.

3.9. Schlüsselbegriffe erkennen

Eigenschaften	Lösungsansätze	Beispiel
Aussagenverknüpfung mit „und"	A und B; P(A) · P(B), wenn sich A und B nicht gegenseitig beeinflussen; sonst P(A) · $P_A(B)$	... beim 1.Wurf eine 6 und beim 2. Wurf eine 1 ...
Aussagen Verknüpfung mit „oder"	A oder B; P(A) + P(B), wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt; sonst $P(A) + P(B) – P(A \cap B)$	... beim Würfeln eine 6 oder eine ungerade Zahl ...
Anzahl der Möglichkeiten	Urnenmodell, Baumdiagramm	... dreimal nacheinander eine 6
Anzahl als Zufallsgröße mit „genau", „mindestens", „höchstens", „weniger als..."	Binomialverteilung	... genau zwei Teile sind defekt... ... von 10 Teilen der Stichprobe sind mindestens 6 brauchbar...
„... wird durchschnittlich erwartet" „Erwartungswert"	Wahrscheinlichkeitsverteilung, für Binomialverteilung E(X) = n • p	Wie viele gerade Ergebnisse sind bei 100 mal Würfeln zu erwarten?

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

4. Kombinatorik

4.1. Permutation (Anordnung **aller** vorhandenen Elemente)

4.1.1. Anordnung von n **unterscheidbaren** Elementen

- Alle Kugeln sind unterscheidbar
- Alle vorhandenen Kugeln werden benutzt, oder
- Alle vorhandenen Fächer werden belegt.

Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen von n Elementen aus n Elementen.

Urnenmodell

- Aus einer Urne mit
- **n unterscheidbaren Kugeln** werden
- **alle n Kugeln** gezogen und
- In dieser Reihenfolge hingelegt.

$$\boxed{n!}$$

Alternatives Urnenmodell

- **n verschiedenen Zellen**
- **n Elemente** abgelegt werden und
- In jeder Zelle **genau eine Kugel** liegen

Auf einem Tisch liegen 5 verschiedenfarbige Kugeln. Auf wieviele Arten können diese Kugeln aneinandergereiht werden ?

Anzahl = 5! = 120

4.1.2. Anordnung von n Elementen, die **nicht alle unterscheidbar** sind

- Nicht alle Kugeln sind unterscheidbar
- Alle vorhandenen Kugeln werden benutzt, oder
- Alle vorhandenen Fächer werden belegt.

Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen von n Elementen aus n Elementen.

Urnenmodell

- Aus einer Urne mit
- n **unterscheidbare Kugeln** werden
- n_1, n_2, n_3 … nicht unterscheidbaren
- **alle n Kugeln** gezogen und
- in dieser Reihenfolge hingelegt.

$$\boxed{\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots}}$$

Auf einem Tisch liegen 5 Kugeln, davon 3 rote und 2 gelbe.
Auf wieviele Arten können diese Kugeln aneinandergereiht werden ?

Anzahl: $\frac{5!}{2!\,3!} = 10$

4.2. Variation (Anordnung von k Elementen aus n vorhandenen Elementen = Reihenfolge ist zu beachten)

4.2.1. Anordnung von k Elementen aus n Elementen **ohne Wiederholung /Zurücklegen**

Die Permutation ist eine spezielle Form dieser Variation, nämlich für k = n.
Werden statt k Kugeln alle n Kugeln gezogen, dann erhält man die Formel der Permutation

k muss kleiner als n sein.

Urnenmodell

- Aus einer Urne mit
- n **unterscheidbaren Kugeln** werden
- **k Kugeln** gezogen und
- in dieser Reihenfolge hingelegt.

Wieviel verschiedene Anordnungen sind möglich ?

$$\boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$$

Alternatives Urnenmodell

- n **verschiedenen Zellen**
- **k unterscheidbare Elemente** abgelegt werden und
- in einer Zelle darf **nur eine Kugel** liegen *(damit bleiben Zellen leer)*

Aus einer Urne mit 5 Kugeln, werden jeweils 3 Kugeln gezogen. Auf wieviele Arten können diese Kugeln aneinandergereiht werden ?

Anzahl: $\frac{5!}{(5-3)!} = 60$

4.2.2. Anordnung von k Elementen aus n Elementen **mit Wiederholung /Zurücklegen**

Die Permutation ist auch eine spezielle Form dieser Variation für k = n.
Werden die Kugeln nicht zurückgelegt, wie bei einer Permutation, ist die Möglichkeit der 2. Ziehung nicht mehr n, sondern (n-1) und die der 3. (n-2).
Werden alle n Kugeln gezogen entsteht damit n! .

k kann auch größer als n sein.

- Aus einer Urne mit
- n **unterscheidbaren Kugeln** werden
- **k Kugeln** gezogen
- die Reihenfolge notiert und
- die **Kugel zurückgelegt**

Wieviel verschiedene Anordnungen sind möglich ?

$$\boxed{n^k}$$

Alternatives Urnenmodell

- n **verschiedenen Zellen**
- **k unterscheidbare Elemente** abgelegt werden und
- in einer Zelle dürfen **beliebig viele Kugeln** liegen *(es können (!) Zellen leer bleiben)*

Aus einer Urne mit 5 Kugeln, wird jeweils 1 Kugel gezogen, die Farbe notiert und die Kugel wieder zurückgelegt
Wieviele Farbkombinationen können auf diese Weise entstehen ?

Anzahl : $5^3 = 125$

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

4.3. Kombination (k elementige Mengen aus n Elementen bilden = Reihenfolge uninteressant)

4.3.1. k elementige Teilmengen **ohne Wiederholung/Zurücklegen**

Werden aus einer Menge von n Kugel nur k gezogen bleiben (n–k) in der Urne und sind damit nicht unterscheidbar. Durch diese Anzahl ist n! zu dividieren (siehe 4.1.2): $\frac{n!}{(n-k)!}$

k Kugeln lassen sich durch k! Möglichkeiten anordnen, aber die Reihenfolge soll unberücksichtigt bleiben, also nur 1 mal gezählt werden, damit ist durch k! zu dividieren:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

k muss kleiner als n sein.

„mit einem Griff" ist eine typische Floskel für diese Ziehung.

<u>Urnenmodell</u>

- Aus einer Urne mit
- **n unterscheidbaren Kugeln** werden
- **k Kugeln auf einmal** gezogen

Wieviel verschiedene Anordnungen sind möglich ?

$$\boxed{\binom{n}{k}}$$

<u>Alternatives Urnenmodell</u>

- **n verschiedenen Zellen**
- **k nicht unterscheidbare Elemente**
- in einer Zelle darf **nur eine Kugel** liegen

(damit bleiben Zellen leer)

Aus einer Urne mit 5 verschiedenen Kugel werden 3 mit einem Griff gezogen.
Wieviele Farbkombinationen gibt es, ohne Berücksichtigung der Farbreihenfolge?

Anzahl: $\binom{5}{3} = 10$

4.3.2. k elementige Teilmengen **mit Wiederholung/Zurücklegen**

Kein Schulstoff

k kann auch größer als n sein.

<u>Urnenmodell</u>

- Aus einer Urne mit
- **n unterscheidbaren Kugeln** werden
- 1 Kugel gezogen, die Farbe notiert und die **Kugel zurückgelegt**
- dann wird erneut gezogen, und das k mal

$$\boxed{\binom{n+k-1}{n-1}}$$

<u>Alternatives Urnenmodell</u>

- **n verschiedenen Zellen**
- **k nicht unterscheidbare Elemente**
- in einer Zelle dürfen **beliebig viele Kugeln** liegen

(es können (!) Zellen leer bleiben)

Aus 3 gleichen Urnen wird jeweils einmal gezogen (das sichert die „Wiederholung").
Wieviel Farbkombinationen sind ohne Beachtung der Reihenfolge möglich ?

Anzahl: $\binom{5+3-1}{5-1} = \binom{7}{4} = 35$

4.4. Modellauswahl

Entscheidung für ein Modell
Anzahl der Möglichkeiten:
Urnenmodell
Fächermodell

Zu klären:

- Wofür stehen die Kugeln in der Urne?
- Sind die Kugeln in der Urne alle unterschiedlich?
- Zieht man mit einem Griff (also ohne Beachtung der Reihenfolge) oder
- zieht man nacheinander, mit oder ohne Zurücklegen?

Mehrstufiges Experiment

Baumdiagramm
- wenn der Baum noch sinnvoll zu zeichnen ist

Urnenmodell
- wenn es nur um die Anzahl der Erfolge geht.

Bernoullikette (Binomialverteilung)
- wenn nur die Anzahl von Erfolgen gezählt wird und jede Stufe die gleiche Wahrscheinlichkeit hat

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

4.4. Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse **ohne Beachtung der Reihenfolge**

1. Schritt: prüfen, ob jedes Ereignis die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt	Ungeordnet, da es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die Karten kommen, oder was für Bilder darauf sind.	Ein Skatspieler erhält nacheinander drei Karten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es nur Herzkarten?
2. Schritt: prüfen, ob die gezogene Kugel zurückgelegt werden muss.	Urnenmodell ohne Zurücklegen, weil alle Karten unterschiedlich sind.	
3. Schritt: Berechnung der Anzahl aller Möglichkeiten, von n unterschiedlichen Kugeln genau k Kugeln zu ziehen	Alle Möglichkeiten: Ziehen mit einem Griff von drei Karten aus einem Stapel von 32 Karten.	$\binom{32}{3} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4960$
4. Schritt: Berechnung der Anzahl der günstigen Möglichkeiten, k Kugeln zu ziehen	Günstige Möglichkeiten: Ziehen mit einem Griff von drei Karten aus einer Menge mit 8 Herzkarten.	$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$
5. Schritt: Quotient aus dem Ergebnissen des 4. Schritts und des 3. Schritts bilden		$P(A) = \frac{56}{4960} \approx 0{,}0113$

4.5. Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse **mit Beachtung der Reihenfolge**

1. Schritt: prüfen, ob jedes Ereignis die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt	Geordnet, da nur RRRS gesucht ist und nicht RSRR mit einzubeziehen ist	Aus einer Urne mit einer roten und einer schwarzen Kugel sollen nacheinander 4 Kugeln gezogen werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind nur die ersten drei Kugeln rot?
2. Schritt: prüfen, ob die gezogene Kugel zurückgelegt werden muss.	Die Aufgabenstellung macht ein Zurücklegen erforderlich!	
3. Schritt: Berechnung der Anzahl aller Möglichkeiten, von n unterschiedlichen Kugeln nacheinander genau k Kugeln mit Beachtung der Reihenfolge zu ziehen	Ziehen mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge	Anzahl aller Möglichkeiten: $2^4 = 16$ (Jede Ziehung besitzt 2 Möglichkeiten, 4-mal wird gezogen)
4. Schritt: Berechnung der Anzahl günstiger Möglichkeiten	Es ist nur eine rote Kugel in der Urne. Deshalb gibt es nur die Möglichkeit 3x rot (hintereinander) und einmal schwarz zu ziehen	Anzahl günstige Möglichkeiten: 1
5. Schritt: Wahrscheinlichkeit für genau eine günstige Anordnung angeben		$P(A) = \frac{1}{16}$

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

5. Binomialverteilung

- **mit Zurücklegen**
- **ohne Reihenfolge**
- **nur ein Merkmal**

5.1. Binomialverteilte Zufallsgrößen – Einzelwahrscheinlichkeit

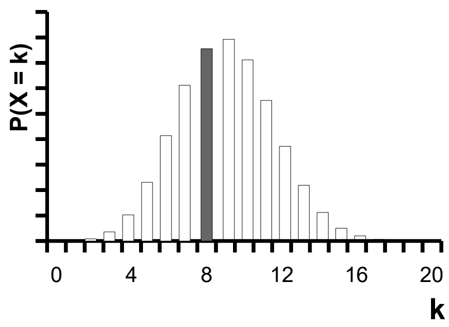
5.1.1. **„genau“** k positive Ereignisse

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel
Binomialverteilung unterscheidet nur zwischen dem Eintritt eines Ereignisses und dem Nichteintritt des Ereignisses.	Deshalb gibt es nur eine Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten des Ereignisses und eine Wahrscheinlichkeit q = 1- p für das Nichteintreten des Ereignisses	Ein Schütze trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% = 0,3. Damit schießt er mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% daneben.
Bei der Durchführung von n Versuchen soll das gewollte Ereignis genau k mal eintreten.	Im Baumdiagramm tritt dann an einem solchen Pfad die Wahrscheinlichkeit p genau k mal auf und die Wahrscheinlichkeit genau n-k mal, da die Gesamtanzahl aller auftretenden Wahrscheinlichkeiten n sein muss	Der Schütze schießt 20 mal auf eine schwarze Zielscheibe (ohne Zahlenringen) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit 12 mal zu treffen
Mehrere Pfade im Baum liefern das gleiche Ergebnis an positiven und negativen Ereignissen	Das Produkt der Wahrscheinlichkeiten in einem solchen Pfad ist: $p^k\ q^{n-k}$ Die Anzahl aller Pfade, die k mal positive Ereignisse und n-k mal negative Ereignisse hervorrufen beträgt: $\binom{n}{k}$ Wahrscheinlichkeit insgesamt: $\boxed{P_{n;p}(X = k) = \binom{n}{k}\ p^k\ q^{n-k}}$	Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades $0{,}3^{12}\ 0{,}7^{8}$ Anzahl der Pfade: $\binom{20}{12}$ $\binom{20}{12}\ 0{,}3^{12}\ 0{,}7^{8}$
1. Schritt: prüfen, ob Binomialverteilung vorliegt 2. Schritt: „Treffer" geeignet definieren, Parameter n und p der Binomialverteilung festlegen 3. Schritt: die gesuchte Wahrscheinlichkeit in mathematischer Schreibweise ausdrücken 4. Schritt: Einzelwahrscheinlichkeit angeben (GTR)	Solche Einzelwahrscheinlichkeiten werden mittels GTR mit der Funktion **binompdf (n;p;k)** bestimmt. Als Parameter sind • n Anzahl der Versuche • p Erfolgswahrscheinlichkeit • k Anzahl erfolgreicher Ereignisse zu übergeben.	Ein idealer Würfel wird fünfmal geworfen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau dreimal eine Zahl größer 4 fällt. X: Anzahl der geworfenen 5 oder 6 X ist binomialverteilt, weil jedes Ergebnis der n = 5 Bernoulli-Experimente die gleiche Wahrscheinlichkeit p = ⅓ gilt $P(X = 3) = B_{5;1/3}(3) \approx 0{,}1646$

5.1.2. Graphische Darstellung

Die Darstellung eines Einzelereignisses mittels Binomialverteilung erfolgt mit Hilfe eines Histogramms.

Die Position der Säule des Histogramms stellt den Wert für die Anzahl positiver Ereignisse dar und die Höhe der Säule die Wahrscheinlichkeit für diese Anzahl von Ereignissen



Das Histogramm zeigt ein Zufallsereignis, das 20 mal durchgeführt wurde und die markierte Säule steht für 8 positive Ereignisse.

5.2. Binomialverteilte Zufallsgrößen – Summenwahrscheinlichkeit

5.2.1. Summenwahrscheinlichkeit **„höchstens“** k positive Ereignisse

„höchstens“ k positive Ereignisse schließen alle Ereignisse ein, die 0-mal, 1-mal, … k-mal zu dem gewünschten Ergebnis führen. Es ist eine Summierung der Einzelwahrscheinlichkeiten von 0 bis k.

$$\boxed{P_{n;p}(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i \; q^{n-i}}$$

$$P_{n;p}(X \le k) = P_{n;p}(X = 0) + P_{n;p}(X = 1) + P_{n;p}(X = 2) + \ldots + P_{n;p}(X = k)$$

Solche Summenwahrscheinlichkeiten werden mittels GTR mit der Funktion

binomcdf (n;p;k)

bestimmt. Als Parameter sind

- n Anzahl der Versuche
- p Erfolgswahrscheinlichkeit
- k Anzahl erfolgreicher Ereignisse

zu übergeben.

Ein idealer Würfel wird zehnmal geworfen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass **höchstens** drei Sechsen geworfen werden.

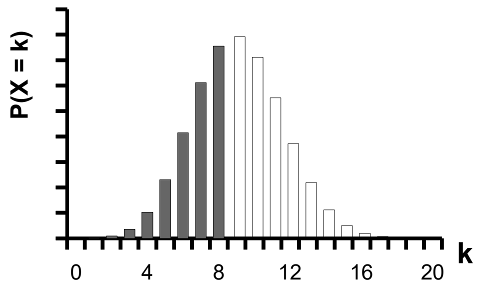
X: Anzahl der geworfenen Sechsen
X ist binomialverteilt, weil für jedes Ergebnis der n = 10 Bernoulli-Experimente die gleiche Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$ gilt:

$P(X \le 3) = F_{10;1/6}(3) \approx 0{,}9303$

P(X=0) = 0,1615
P(X=1) = 0,3230
P(X=2) = 0,2907
P(X=3) = 0,1550

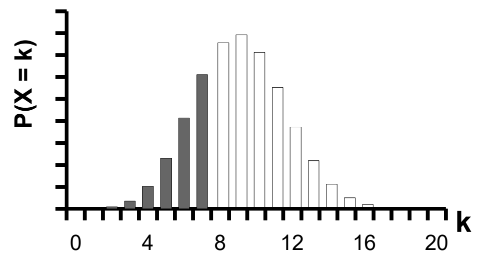
5.2.2. Graphische Darstellung **„höchstens“** k positive Ereignisse

„höchstens“ 8 Treffer



Das Histogramm zeigt ein Zufallsereignis, das 20 mal durchgeführt wurde und die markierten Säulen sind die bis zu 8 positiven Ereignissen

„weniger“ als 8 Treffer



die markierten Säulen sind die bis zu 7 positiven Ereignissen, da weniger als 8 Treffer gefragt sind.

5.2.3. Summenwahrscheinlichkeit **„mindestens“** k positive Ereignisse

„mindestens“ k positive Ereignisse schließen alle Ereignisse ein, die k-mal, k+1-mal, … n-mal zu dem gewünschten Ergebnis führen. Es ist eine Summierung der Einzelwahrscheinlichkeiten von k bis n.

$$\boxed{P_{n;p}(X \ge k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i \; q^{n-i}}$$

$$P_{n;p}(X \ge k) = P_{n;p}(X = k) + P_{n;p}(X = k+1) + P_{n;p}(X = k+2) + \ldots + P_{n;p}(X = n)$$

Für diese summierten Wahrscheinlichkeiten gibt es keine Formel im GTR. Aber die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist genau das Gegenereignis für : „höchstens“ k-1 positive Ergebnisse. Deshalb kann die Berechnung folgendermaßen umgestellt werden:

$$\boxed{P_{n;p}(X \ge k) = 1 - P_{n;p}(X \le k-1)}$$

$$\boxed{P_{n;p}(X \ge k) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p^i \; q^{n-i}}$$

und damit mittels GTR berechnet werden:

1 – **binompdf (n;p;k–1)**

(die obere Grenze ist nicht k, sondern k-1, da k zum Ereignis gehört)

Ein idealer Würfel wird zehnmal geworfen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass **mindestens** drei Sechsen geworfen werden.

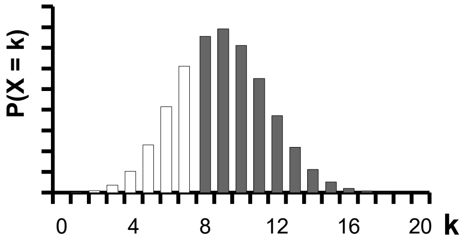
X: Anzahl der geworfenen Sechsen
X ist binomialverteilt, weil für jedes Ergebnis der n = 10 Bernoulli-Experimente die gleiche Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$ gilt:

$P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2)$
$= 1 - F_{10;1/6}(2) \approx 0{,}2248$

1 – (
P(X=0) = 0,1615 +
P(X=1) = 0,3230 +
P(X=2) = 0,2907)

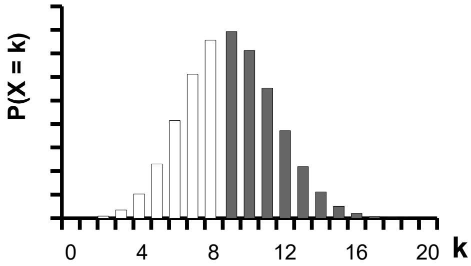
5.2.4. Graphische Darstellung **„mindestens“** k positive Ereignisse

„mindestens“ 8 Treffer



Das Histogramm zeigt ein Zufallsereignis, das 20 mal durchgeführt wurde und die markierten Säulen sind die von 8 bis 20 positiven Ereignissen

„mehr als“ 8 Treffer



die markierten Säulen sind die von 9 bis 20 positiven Ereignissen, da mehr als 8 Treffer gefragt sind, damit gehört die 8 nicht mehr zum gesuchten Ereignis

5.2.5. Intervallwahrscheinlichkeit **„mindestens“** k_0, aber „**höchstens**“ k_1 positive Ereignisse

„mindestens“ k_0 aber „höchstens“ k_1 positive Ereignisse, schließen alle Ereignisse ein, die k-mal, k+1-mal, … k+1–mal zu dem gewünschten Ergebnis führen. Es ist eine Summierung der Einzelwahrscheinlichkeiten von k_0 bis einschließlich k_1.

$$\boxed{P_{n;p}(k_0 \le X \le k_1) = \sum_{i=k0}^{k1} \binom{n}{i} p^i\, q^{n-i}}$$

$$P_{n;p}(k_0 \le X \le k_1) = P_{n;p}(X = k_0) + P_{n;p}(X = k_0+1) + P_{n;p}(X = k_0+2) + \ldots + P_{n;p}(X = k_1)$$

Für diese summierten Wahrscheinlichkeiten gibt es keine Formel im GTR. Aber die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist genau die summierte Wahrscheinlichkeit bis k_1 Ereignisse von der die summierte Wahrscheinlichkeit bis k_0–1 Ereignisse zu subtrahieren ist.

$$P_{n;p}(k_0 \le X \le k_1) = P_{n;p}(X \le k_1) - P_{n;p}(X \le k_0-1)$$

und damit mittels GTR berechnet werden:

binompdf (n;p;k_1) – binompdf (n;p;k_0–1)

(die untere Grenze ist nicht k_0, sondern k_0-1, da die Funktion binomcdf immer bis zum angegebenen Wert von k summiert.)

Ein idealer Würfel wird zehnmal geworfen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass **mindestens** drei Sechsen, aber **höchstens** sieben Sechsen geworfen werden.

X: Anzahl der geworfenen Sechsen
X ist binomialverteilt, weil für jedes Ergebnis der n = 10 Bernoulli-Experimente die gleiche Wahrscheinlichkeit p = ⅙ gilt:

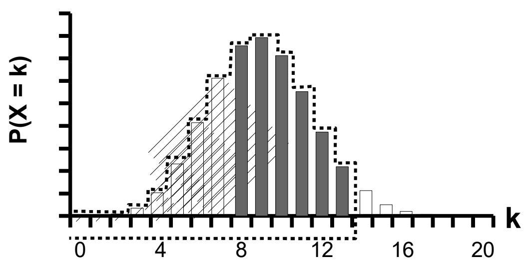
$$P(3 \le X \le 7) = F_{10;1/6}(7) - F_{10;1/6}(2) = 0{,}9999 - 0{,}7752 \approx 0{,}2247$$

P(X=3) = 0,1550
P(X=4) = 0,0543
P(X=5) = 0,0130
P(X=6) = 0,0022
P(X=7) = 0,0002

5.2.6. Graphische Darstellung **„mindestens“** k_0, aber „**höchstens**“ k_1 positive Ereignisse

„mindestens“ 8 aber

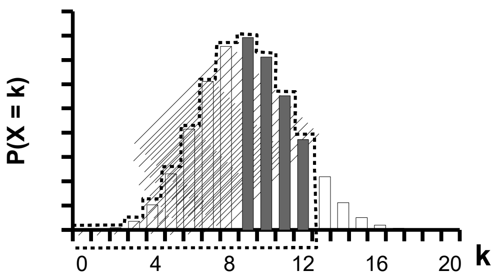
„höchstens“ 13 Treffer



Das Histogramm zeigt ein Zufallsereignis, das 20 mal durchgeführt wurde und die markierten Säulen sind die von 8 bis 13 positiven Ereignissen

„mehr als“ 8 aber

„weniger“ als 13 Treffer



die markierten Säulen sind die von 9 bis 12 positiven Ereignissen, da mehr als 8 Treffer gefragt sind, damit gehört die 8 nicht mehr zum gesuchten Ereignis und weniger als 13 sind nur noch 12 Ereignisse

5.3. Erstes Eintreten eines positiven Ereignisses

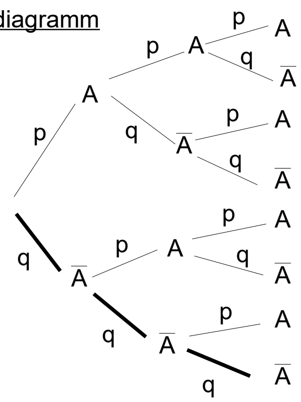
Häufige Fragestellung: Wann tritt mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit α das Ereignis das erste Mal tatsächlich ein.

Das heißt auch, dass bis zu diesem Zeitpunkt nur negative Ereignisse eingetreten sind, also nur Ereignisse mit der Wahrscheinlichkeit (1 – p).

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt dieses Problem die **Geometrische Verteilung**.

Bis zum ersten Eintreten des Ereignisses bewegt man sich immer auf dem unteren Pfad des Baumdiagramms.
Die Wahrscheinlichkeit dieses Pfades ist in Abhängigkeit von der Anzahl der versuche q^n mit $q = 1 - p$

Baumdiagramm



5.3.1. Mindestanzahl, dass mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit das Ereignis das erste Mal eintritt

Ab welcher Anzahl n kann man davon ausgehen, dass das Ereignis mit einer Sicherheit von α eingetreten ist.

Bis zu dieser gesuchten Anzahl ist n mal das Gegenereignis eingetreten:

$$1 - q^n \geq \alpha$$
$$1 - \alpha \geq q^n$$
$$\boxed{\frac{\log(1-\alpha)}{\log q} \leq n}$$

Bei Division durch log q ist das Ungleichheitszeichen umzudrehen, da durch eine negative Zahl dividiert wird.

5.3.2. Wahrscheinlichkeit, dass dem 1. Treffer genau k Fehlversuche vorausgehen

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint der erste Treffer beim k-ten Wurf oder später.

nach 1 Fehlversuch: $q\ p$
nach 2 Fehlversuchen: $q^2\ p$
nach 3 Fehlversuchen: $q^3\ p$
. . . . .
$\boxed{\text{nach k Fehlversuchen: } q^k\ p}$

5.3.3. Wahrscheinlichkeit, dass der 1. Treffer frühestens beim k Versuch auftritt

nach k Fehlversuchen: q^{k-1}

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

5. Testen von Wahrscheinlichkeiten

5.1. Linksseitiger Hypothesentest

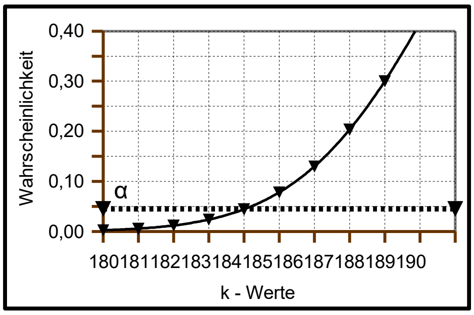
5.1.1. Irrtumswahrscheinlichkeit berechnen – Ablehnungsbereich gegeben

Gegeben ist eine Hypothese mit p_0 und das Ergebnis einer Stichprobe. Es ist die Irrtumswahrscheinlichkeit dafür zu ermitteln, dass man diese Hypothese ablehnt, obwohl sie richtig ist (Fehler 1. Art)

1. Schritt:
entscheiden, ob ein links- oder rechtsseitiger Ablehnungsbereich zutrifft

2. Schritt:
die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass die Hypothese abgelehnt wird, obwohl sie wahr ist.

Verwenden der Binomialverteilung als Intervallwahrscheinlichkeit mit n, p_0 und dem Ergebnis der Stichprobe.



Ist bei einem linksseitigen Test der Ablehnungsbereich mit $k < k_0$ festgelegt, dann kann man über die summierte Verteilungsfunktion die Irrtumswahrscheinlichkeit α bestimmen, mit der man die Hypothese ablehnt, obwohl sie richtig ist.

Diese Irrtumswahrscheinlichkeit entspricht genau dem Wert der summierten Verteilungsfunktion für den festgelegten Wert k_0.

Beispiel 2 :
Ein Schütze behauptet eine Trefferwahrscheinlichkeit von mindestens 95%. Mit einer Serie von 200 Schüssen wurde das getestet Dabei erreichte der Schütze 184 Treffer. Wegen dieses Resultats wird seine Behauptung als falsch eingeschätzt Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man sich dabei irrt?

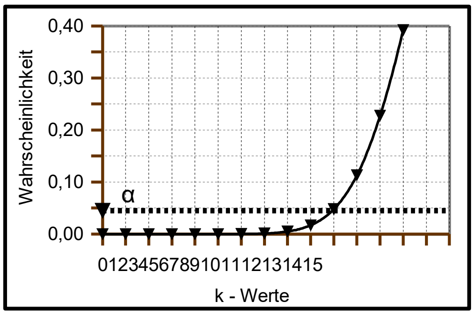
Der Ablehnungsbereich ist linksseitig mit (0,1,2, ..., g) anzusetzen.
X: Anzahl der Treffer ist binomialverteilt mit $p_0 = 0{,}95$ und n = 200.
$P(X \le 184) = F_{200;0,95}(184) = 0{,}044$
Die Irrtumswahrscheinlichkeit liegt unter 5%.
(s. Bild links)

5.1.2. Ablehnungsbereich ermitteln – Irrtumswahrscheinlichkeit gegeben

Gegeben ist eine Hypothese H_0 mit der Wahrscheinlichkeit p_0 (gegebenenfalls eine Gegenhypothese H_1 mit p_1) und die Irrtumswahrscheinlichkeit α

1 Schritt:
prüfen, ob ein linksseitiger oder ein rechtsseitiger Ablehnungsbereich vorliegt
Für p_0 (> p_1):
Linksseitiger Ablehnungsbereich
0, 1, 2, ..., g

2. Schritt:
den Wert g suchen, für den beide Ungleichungen mit n und p_0 erfüllt sind:
Linksseitiger Ablehnungsbereich:
$P(X \le g) \le \alpha$ und $P(X \le g+1) > \alpha$



Wenn bei einem linksseitigen Hypothesentest die Irrtumswahrscheinlichkeit α vorgegeben ist, dann ist die summierte Verteilungsfunktion zu betrachten und der Wert k zu bestimmen, bei dem die summierte Wahrscheinlichkeit die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit α erreicht.

Der Ablehnungsbereich liegt dann links von dem Wert k, bei dem die summierte Wahrscheinlichkeit den vorgegebenen Wert α überschritten hat.

Beispiel 1:
Ein Losbudenbesitzer wirbt damit, dass 70% seiner Lose gewinnen. Ein Besucher kauft 20 Lose. Bei welcher Anzahl von Gewinnlosen kann er den Losbudenbesitzer beschuldigen, eine falsche Behauptung verbreitet zu haben, wenn er sich höchsten mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% irren will?
Die Behauptung wird abgelehnt, wenn 0,1, ..., g Gewinnlose in der Stichprobe sind.

$P(X \le g) \le 0{,}05$ und $P(X \le g+1) > 0{,}05$ gilt für g =10, weil $P(X \le 10) = 0{,}04796$ und $P(X \le 11) = 0{,}1133$ ist.
Ablehnungsbereich: {0,1....,10}
(s. Bild links)

Eigenschaften	Erläuterung	Beispiel

5.2. Rechtsseitiger Hypothesentest

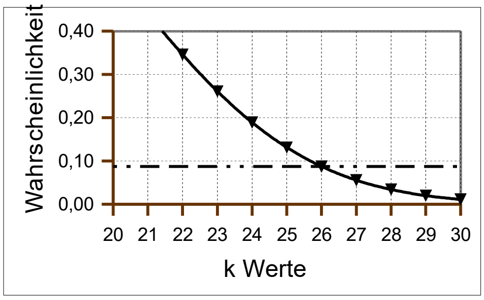
5.2.1. Irrtumswahrscheinlichkeit berechnen – Ablehnungsbereich gegeben

Gegeben ist eine Hypothese mit p_0 und das Ergebnis einer Stichprobe. Es ist die Irrtumswahrscheinlichkeit dafür zu ermitteln, dass man diese Hypothese ablehnt, obwohl sie richtig ist (Fehler 1. Art)

1. Schritt:
entscheiden, ob ein links- oder rechtsseitiger Ablehnungsbereich zutrifft

2. Schritt:
die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass die Hypothese abgelehnt wird, obwohl sie wahr ist. Dieser Bereich liegt rechts von der in der Stichprobe festgestellten Anzahl.

Verwenden der umgekehrten Binomialverteilung mit n, p_0 und dem Ergebnis der Stichprobe als feststehenden Wert k.



Wenn bei einem rechtsseitigen Hypothesentest der Ablehnungsbereich k vorgegeben ist, dann ist die summierte Verteilungsfunktion zu betrachten und der Wert α zu bestimmen, der für k + 1 gilt, denn da beginnt der Irrtumsbereich, da man nicht weiß, ob es manchmal auch mehr sein könnten.

Dabei ist zu beachten, dass nicht
1 – binomcdf(n,p,k) anzugeben ist, sondern
1 – binomcdf(n,p,k-1).

Anja und Bernd haben unterschiedliche Meinungen über den Anteil der Autos von VW in ihrer Stadt und Umgebung. Anja behauptet, dass der Anteil höchstens 20 % beträgt, während Bernd meint, der Anteil ist größer. Sie beschließen, an der Schulstraße die nächsten 100 Autos zu beobachten.

Es werden 25 Autos vom Typ VW beobachtet. Wie groß ist das Risiko für Fehler bei der Entscheidung?

$P(X \geq 25) \leq \alpha$
$1 - P(X < 24) > \alpha$

k	1 – binomcdf(100;0,2;k-1)
20	0,539839
21	0,440538
22	0,345967
23	0,261067
24	0,189087
25	0,131353
26	0,087475
27	0,055833
28	0,034152
29	0,020020
30	0,011249

Die Irrtumswahrscheinlichkeit bei 25 gezählten Autos liegt bei 8,75 %

5.2.2. Ablehnungsbereich ermitteln – Irrtumswahrscheinlichkeit gegeben

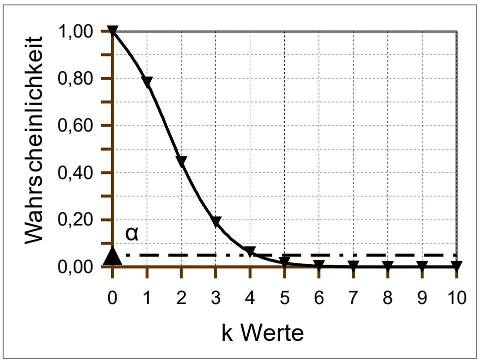
Gegeben ist eine Hypothese H_0 mit der Wahrscheinlichkeit p_0 (gegebenenfalls eine Gegenhypothese H_1 mit p_1) und die Irrtumswahrscheinlichkeit α

1 Schritt:
prüfen, ob ein linksseitiger oder ein rechtsseitiger Ablehnungsbereich vorliegt
Für p_0 (< p_1):
Rechtsseitiger Ablehnungsbereich
g, g+1, ...,n

2. Schritt:
den Wert g suchen, für den beide Ungleichungen mit n und p_0 erfüllt sind:

Rechtsseitiger Ablehnungsbereich:
$P(X \geq g) \leq \alpha$ und $P(X \geq g-1) > \alpha$

Verwenden der umgekehrten Binomialverteilung mit n, p_0 und der Irrtumswahrscheinlichkeit α als summierte Wahrscheinlichkeit



Wenn bei einem rechtsseitigen Hypothesentest die Irrtumswahrscheinlichkeit α vorgegeben ist, dann ist die summierte Verteilungsfunktion zu betrachten und der Wert k zu bestimmen, bei dem die Differenz der summierten Wahrscheinlichkeit bis zu 1 die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit α unterschreitet.

Dabei ist zu beachten, dass nicht
1 – binomcdf(n,p,k) anzugeben ist, sondern
1 – binomcdf(n,p,k-1).

Der Ablehnungsbereich liegt dann rechts von dem Wert k, bei dem die summierte Wahrscheinlichkeit den vorgegebenen Wert α unterschritten hat.

Beispiel 1:
Ein Händler behauptet von seiner Ware, dass höchstens 3% fehlerhaft sind. Es soll der Verdacht überprüft werden, dass diese Angabe zu niedrig ist und setzt dabei eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% bei einem Stichprobenumfang von 50 an.

Ermitteln Sie den Ablehnungsbereich. Die Behauptung des Händlers wird abgelehnt, wenn man g, g+1, ..., 50 fehlerhafte Waren in der Stichprobe findet.

$P(X \geq g) \leq 0{,}05$
$1 - P(X < g-1) > 0{,}05$

gilt für g = 5, weil $P(X \geq 5) = 0{,}0168$ und $P(X \geq 4) = 0{,}0628$ ist
Ablehnungsbereich: {5,6, ..., 50}
(s. Bild links)

k	1 – binomcdf(50;0,03;k-1)
0	1,000000
1	0,781935
2	0,444720
3	0,189202
4	0,062760
5	0,016811
6	0,003736