31. Kombinatorik

31.1. Grundbegriffe der Kombinatorik

31.1.1. Einstieg in das Zählprinzip

Es wird eine Menge von n verschiedenen Elementen betrachtet. Aus dieser Menge soll k-mal hintereinander ein Element gezogen werden. Bei dieser Ziehung sind folgende Möglichkeiten zu unterscheiden:

1. Nach jeder Ziehung wird das gezogene Element wieder zurückgelegt.

Ziehungsvorgang	Auswahlmöglichkeiten
1	n
2	n
…	…
k	n

   Durch das Zurücklegen der gezogenen Elemente sind bei jeder Ziehung die gleiche Anzahl von Auswahlmöglichkeiten vorhanden. Die Gesamtzahl alle Möglichkeiten berechnet sich damit aus

   $$n \bullet n \bullet \ldots \bullet n = n^k$$

2. Nach einer Ziehung wird das Element nicht wieder zurückgelegt.

Ziehungsvorgang	Auswahlmöglichkeiten
1	n
2	n–1
…	…
k	n–k+1

   Nach jeder Ziehung ist ein Element weniger in der Menge vorhanden, damit ist die Auswahlmöglichkeit gegenüber einer früheren Ziehung geringer. Die Gesamtzahl aller Möglichkeiten berechnet sich damit aus:

   $$n \bullet (n-1) \bullet \ldots \bullet (n-k+1)$$

3. Nach einer Ziehung wird das Element nicht zurückgelegt und es wird weiter gezogen, bis alle Elemente der Menge gezogen sind. Das ist eine Spezialform der Aufgabenstellung 2, bei der k = n ist. Damit ergibt sich folgendes Ziehungsbild:

Ziehungsvorgang	Auswahlmöglichkeiten
1	n
2	n–1
…	…
n-1	n– (n–1) +1 = 2
n	n – (n–1) = 1

   Nach jeder Ziehung ist ein Element weniger in der Menge, bis zur letzten Ziehung, bei der nur noch 1 Element in der Menge ist. Damit ergibt sich die Gesamtzahl der Möglichkeiten aus der Spezialisierung der Formel aus 2 für die Bedingung k = n:

   $$n \bullet (n-1) \bullet \ldots \bullet 2 \bullet 1$$

31.1.2. Grundproblematik:

Außer der Variante, dass man nach dem Ziehen die Elemente wieder zurücklegen kann oder nicht, wie es in 1.1 dargestellt wurde, kann man noch eine zweite Unterscheidung vornehmen

a) **Auswählen** einer Teilmenge aus einer Grundmenge
b) **Anordnen** der Elemente einer Menge

Die unter 1.1. aufgeführten Beispiele würden nach dieser Gruppierung unter die Gruppe b) fallen. In allen diesen Fällen spielt eine Rolle, in welcher Reihenfolge die Elemente gezogen werden, dh. die Anordnung der Elemente spielt eine Rolle. Es wird unterschieden zwischen den Reihenfolgen erst Element1 und dann Element 2 oder erst Element 2 und dann Element 1. Vorstellen kann man sich diese Ziehungen so: Es wird blind gezogen und die gezogene Kugel auf eine Leiste gelegt. Die zuerst gezogene Kugel liegt ganz links und die anderen dahinter. Nach dem Ende der Ziehung ist klar zu erkennen, in welcher Reihenfolge die Kugeln gezogen wurden.
Das unter a) angegebene Prinzip würde in diesem Zusammenhang lauten: Am Ende soll Element 1 und Element 2 gezogen sein, gleichgültig zu welchem Zeitpunkt. Auch das kann man wieder mit Zurücklegen oder ohne Zurücklegen durchführen. Deshalb findet man für a) auch die Formulierung „ohne Beachtung der Reihenfolge“ und für b) die Formulierung „mit Beachtung der Reihenfolge“. Die Ziehung nach a) kann man sich vorstellen, dass man die gezogenen Kugeln in einen Topf legt. Nach dem Ende der Ziehung sieht man sich an, welche Kugeln gezogen wurden. Es ist nicht mehr feststellbar, wann welche Kugel gezogen wurde. Für diese Ziehung wird auch oft die Formulierung “mit einem Mal“ benutzt. Man hat gleichzeitig mehrere Kugeln in der Hand, bevor man sieht, was gezogen wurde.

31.1.3. Bezeichnungen:

***k*-Tupel (x_1, x_2, . . . x_k)**

Es seien k,n $\in \mathbb{N}$, A sei eine Menge mit | A | = n Elementen , kurz eine n-Menge. Jedes Element (a_1; a_2; a_3; ... ;a_k) $\in A_k$ heißt k-Tupel aus A. (für i = 1; ... ; k gilt: $a_i \in A$)

Bei einem k-Tupel werden k **Elemente einer Menge in eine Reihenfolge** gebracht, kein Element kann zweimal auftreten. k-Tupel treten bei „geordnetes Ziehen ohne Zurücklegen“, „Variation ohne Zurücklegen“ auf. Die Permutation ist eine Spezialform der Variation für n = k. Bei Permutationen werden n-Tupel gebildet, dh. es müssen alle Elemente in eine Reihenfolge gebracht werden. das trifft auch für Permutation mit Wiederholung zu, da dort die gleichen Elemente bereits in der Menge vorhanden sind und nicht durch Zurücklegen doppelte Elemente auftreten.

***k*-Permutation (x_1, x_2, . . . x_k)**

Es seien k,n $\in \mathbb{N}$, A eine n-Menge.
Jedes k-Tupel (a_1; a_2; a_3; ... ;a_k) $\in A_k$ mit lauter verschiedenen $a_i \in A$, $1 \leq i \leq k$ heißt k-Permutation ohne Wiederholung aus der n-Menge A.
k-Tupel, bei denen alle **k Elemente verschieden sind und aus einer n-Menge ausgewählt** werden, nennen wir k-Permutationen.
Sind Wiederholungen zugelassen bezeichnet man sie als k-Permutation mit

Wiederholung und werden alle Elemente ausgewählt, bei k=n, dann bezeichnet man sie als n-Permutation. Wiederholung ist hier kein Zurücklegen, sondern mehrere Elemente mit der gleichen Eigenschaft.

***k*-Teilmenge (x_1, x_2, . . . x_k)**

Es seien k,n $\in \mathbb{N}$, A eine n-Menge. Jedes k-Tupel (a_1; a_2; a_3; ... ;a_k) $\in A_k$ mit lauter verschiedenen $a_i \in A$, $1 \leq i \leq k$ und **unabhängig von seiner Reihenfolge** heißt k-Teilmenge aus der n-Menge A.
k-Teilmengen unterscheiden sich von k-Tupel dadurch, dass alle die Elemente, die sich nur durch die Reihenfolge unterscheiden als ein Element angesehen werden. Aus diesem Grund ist es eine *Teilmenge* und keine *Anordnung*, also ein Behälter, in dem die Elemente enthalten, aber keine Leiste, auf der sie aufgereiht sind.
Bei Teilmengen tritt jedes Element nur einmal auf, und es sind bei einer k-Teilmenge aus einer n-Teilmenge k-Elemente in der erzeugten Menge.
Diese Mengen treten bei Kombinationen (ohne Reihenfolge) auf, bei denen aber keine Wiederholung zugelassen ist.

***k*-Kombination (x_1, x_2, . . . x_k)**

Es seien k,n $\in \mathbb{N}$, A eine n-Menge. Jedes k-Tupel (a_1; a_2; a_3; ... ;a_k) $\in A_k$ mit $a_i \in A$, $1 \leq i \leq k$ möglicherweise gleichen Elementen und unabhängig von seiner Reihenfolge heißt k-Kombination aus der n-Menge A.
Hierfür ist auch der Begriff „k-elementige Multimenge“ gebräuchlich.
Multimengen treten bei Kombinationen (ohne Reihenfolge) auf, bei denen gleiche Elemente in der Teilmenge erlaubt sind.

n – Menge ...	Menge von n Elementen
k-Stichprobe …	Teilmenge von k Elementen einer Grundmenge
geordnet ...	Reihenfolge wichtig (*Variationen*)
ungeordnet ...	Reihenfolge unwichtig (*Kombinationen*)
mit Zurücklegen ...	gezogenes Element wird vor der nächsten Ziehung zurückgelegt
ohne Zurücklegen ...	– " – nicht zurückgelegt

Leider sind die Bezeichnungen für „mit Zurücklegen“ und „ohne Zurücklegen“ nicht einheitlich. Während sich für Variation (mit Beachtung der Reihenfolge) der Symbolbuchstabe **V** durchgesetzt hat und für Kombination (ohne Beachtung der Reihenfolge) der Buchstabe **C**, findet man für die Eigenschaft „mit Zurücklegen“ sowohl die Symbolik

- mit einem Querstrich: $\overline{V}_n^k$ oder $\overline{C}_n^k$
- ein vorangestelltes W: ${}^{W}V_n^k$ oder ${}^{W}C_n^k$
- als Index: V_{mW} oder C_{mW} bzw K_{mW}

Bei den Erläuterungen findet sowohl das allgemeine Urnenmodell des „Ziehens von Kugeln“ Anwendung, aber auch das duale Urnenmodell, bei dem Kugeln in eine Menge von Urnen zu verteilen sind, das Abbildungsmodell, das nicht unbedingt analysiert werden muss, sowie das Wortbildungsmodell, das aus einer Menge von Buchstaben Wörter in bestimmter Länge erzeugt.

31.2. Grundlegende mathematische Regeln

Die Formeln der Kombinatorik beruhen auf einigen grundlegenden mathematischen Zusammenhängen, die zunächst sehr primitiv erscheinen, aber die Grundlage aller weiteren Berechnungen bilden.

31.2.1. Produktregel:

Betrachtet man zwei durchschnittsfremde Mengen, so versteht man unter dem Kartesischen Produkt zweier solcher Mengen folgende Menge:

Definition:
Für zwei nichtleere Mengen A und B ist das Kartesische Produkt (Kreuzprodukt) **A x B** die Menge aller Paare, von denen der erste Teil aus A und der zweite Teil aus B kommt.

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A; b \in B \}$$

Produktregel:
Hat die Menge A r Elemente und die Menge B s Elemente, so gibt es r * s geordnete Paare der Form (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$, d. h.

$$\mathbf{|A \times B| = |A| * |B|.}$$

Diese Regel besagt, wie man aus der Anzahl der einzelnen Mengen auf die Anzahl der Paare schließen kann, die entstehen, wenn man das Kreuzprodukt dieser Mengen bildet. Dazu bietet sich eine Matrixschreibweise an:
Die Menge A bestehe aus 4 Elementen und die Menge B aus 6 Elementen

1;1	1;2	1;3	1;4	1;5	1;6
2;1	2;2	2;3	2;4	2;5	2;6
3;1	3;2	3;3	3;4	3;5	3;6
4;1	4;2	4;3	4;4	4;5	4;6

womit 24 geordnete Paare entstanden sind.
Diese Regel lässt sich auch auf beliebig viele Mengen erweitern.

Aus *r* Mengen M_1, M_2, M_r, mit n_1, n_2, n_r Elementen lassen sich

$$N = n_1 * n_2 * \quad * n_r$$

verschiedene *r*-Tupel $(x_1, x_2, . . . x_r)$ bilden mit $x_i \in M_i$

Diese Produktregel findet in der Kombinatorik auf folgende Weise ihren Niederschlag:

Form 2:
Ein Versuch bestehe aus s Stufen. Der Ausgang einer Stufe habe keinen Einfluss auf die ***Anzahl (!)*** der möglichen Ausgänge bei späteren Stufen (Unabhängigkeit der Stufen).
Haben die einzelnen Stufen bzw. $n_1, n_2, n_3, ... n_s$ Möglichkeiten, so hat der Gesamtversuch

$$n = n_1 * n_2 * n_3 * ... * n_s \quad \text{Möglichkeiten.}$$

In dieser Aussage ist die erste Pfadregel versteckt, die besagt, dass die Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades multipliziert werden müssen, um auf die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses zu schließen.

31.2.2. Summenregel (Entweder-Oder-Regel):

Summenregel:
Haben in einer Menge M mit n Elementen k Elemente eine Eigenschaft E und n-k Elemente diese Eigenschaft nicht, dann gilt

$$|\,M\,| = |\,E\,| + |\,\overline{E}\,|.$$

Hinter diese ebenfalls trivial erscheinenden Aussage steckt aber noch einiges mehr. Die Eigenschafte E und $\overline{E}$ schließen sich gegenseitig aus, dh, sie sind haben keine gemeinsamen Elemente. Deshalb lässt sich die Aussage des Satzes auch etwas umformulieren: Existieren in einer Menge Elemente mit einer bestimmten Eigenschaft und Elemente, die diese Eigenschaft nicht besitzen, **ohne, dass ein Element beide Eigenschaften besitzen kann**, dann ist die Anzahl der Elemente der Gesamtmenge gleich der Summe der Elemente der beiden Einzelmengen. Worauf es hier ankommt ist ein Zerlegung, bei der kein Element beide Eigenschaften besitzen darf, man spricht von einer **durchschnittsfremden Zerlegung**. Ist die Durchschnittsmenge der beiden Eigenschaften nicht leer, dann gilt eine erweitere Regel.

Aus dieser Regel folgt auch, wenn man die Elemente einer Gesamtmenge zu bestimmen hat, und man kennt Eigenschaften von Elementen, die nicht gleichzeitig bei ein und demselben Element auftreten, dann kann man die Elementanzahl der Teilmengen bestimmen, die sich dann zur Gesamtmenge ergänzen.

In dieser Regel ist die zweite Pfadregel versteckt. Sucht man bei einer Ziehung die Anzahl, im dritten versuch eine blaue Kugel zu ziehen, dann muss man alle Wege betrachten, die im 1. Versuche eine weiße, im 1. Versuch eine rote, …. und dann im 2. Versuche eine weiße, im 2. Versuch eine rote, … wenn diese Pfade nur dazu führen, dass im 3. Versuch eine blaue gezogen wird. Dieser 3. Versuch ist die gemeinsame Eigenschaft und die Pfade sind alle durchschnittsfremd, es gibt keine zwei gleichen Pfade.

Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, in denen **mindestens** zwei Ziffern gleich sind?
Das lässt sich zerlegen in „alle drei Ziffern sind gleich“ und „genau zwei Ziffern sind gleich“. Diese beiden Eigenschaften können nicht gleichzeitig eintreten, also ist das eine disjunkte Zerlegung der Eigenschaft „wenigstens zwei Ziffern sind gleich“.
Die Eigenschaft „genau zwei Ziffern sind gleich“ lässt sich zerlegen in „die 1. und 2. Ziffer sind gleich“, „die 1. und 3. Ziffer sind gleich“ und „die 2. und 3. Ziffer sind gleich“.
Hat man für diese Teilprobleme die Anzahlen bestimmt, so sind anschließend die gefundenen Möglichkeiten zu addieren.
Man beachte dabei, dass die erste Ziffer (Hunderterstelle) einer dreistelligen Zahl nicht 0 sein kann, es also nur 9 mögliche Ziffern gibt. Auf den anderen beiden Stellen sind alle 10 Ziffern zulässig. Soll eine Stelle von einer anderen

verschieden sein, so ist auf der hinteren Stelle eine Möglichkeit weniger, denn die Wahl der vorderen Stelle darf ja nicht wiederholt werden.
„alle drei Ziffern sind gleich" (...,...,...) $9 \cdot 1 \cdot 1 = 9$
„die 1. und 2. Ziffer sind gleich" (...,...,...) $9 \cdot 1 \cdot 9 = 81$
„die 1. und 3. Ziffer sind gleich" (...,...,...) $9 \cdot 9 \cdot 1 = 81$
„die 2. und 3. Ziffer sind gleich" (...,...,...) $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$
Diese vier Fälle sind eine disjunkte Zerlegung der Bedingung „wenigstens zwei Ziffern sind gleich". Folglich sind die berechneten Möglichkeiten zu addieren: 9 + 81 + 81 + 90 = 261.

Diese Regel lässt sich ebenfalls auf mehrere Mengen erweitern.

Verallgemeinerte Summenregel:
Ist $M = A1 \cup A2 \cup A3 \cup \dots \cup An$ eine **vollständige** (jedes Element von M kommt in mindestens einer der Klassen Ai vor) und **disjunkte** (kein Element kommt in mehr als einer der Klassen vor), also jedes in genau einer Klasse so gilt:

$$|M| = |A1| + |A2| + |A3| + \dots + |An|$$

31.2.3. Funktionsabbildungen

Als Modellierung von kombinatorischen Aufgaben kommen auch häufig Abbildungen zum Einsatz. Bei diesen Abbildung, die jeweils eine Variante der Kombinatorik darstellen treten die nachfolgenden Begriffe auf, die zunächst geklärt werden müssen.

Definition:
Eine **Abbildung** $f : D \to W$ ordnet jedem Element $x \in D$ (Definitionsbereich, Urbild) **eindeutig** ein Element $y = f(x)$ $y \in W$(Wertevorrat, Bildmenge) zu.

31.2.3.1 Surjektive Abbildung

Sie bedeutet, dass jedes Element der Zielmenge mindestens einmal als Funktionswert angenommen wird, also mindestens ein Urbild hat.

Definition:
Eine **Funktion** $f : D \to W$ heißt **surjektiv**, oder ist eine Abbildung „von" D „auf" W, wenn zu jedem Element aus W **mindestens ein Urbild** in D existiert.

Die Definition bedeutet, dass alle Bildelemente über Urbildelemente verfügen. Dabei kann es aber sein, dass zwei Urbildelemente auf das gleiche Bildelement abgebildet werden. Es bedeutet aber nicht, dass jedes Urbildelement eine Bildelement besitzt. Es kann Urbilder geben, die über kein Bild verfügen.

31.2.3.2 Injektive Abbildung

Sie bedeutet, dass jedes Element der Zielmenge höchstens einmal als Funktionswert angenommen wird. Es werden also keine zwei verschiedenen Elemente der Definitionsmenge auf ein und dasselbe Element der Zielmenge abgebildet.

Definition:
Eine **Funktion** f : D → W heißt **injektiv**, wenn zu jedem Element aus W **genau ein Urbild** in D existiert.

Injektivität (injektiv, linkseindeutig) ist eine Eigenschaft einer mathematischen Funktion. Sie bedeutet, dass jedes Element der Zielmenge höchstens einmal als Funktionswert angenommen wird. Es werden also keine zwei verschiedenen Elemente der Definitionsmenge auf ein und dasselbe Element der Zielmenge abgebildet. Eine injektive Funktion ist daher (als Relation gesehen) linkseindeutig. Dabei entspricht nicht unbedingt jedem Element der Zielmenge ein Element der Definitionsmenge. Die Urbildmenge
kann also kleiner als die Bildmenge sein. Es kann Elemente aus der Bildmenge geben, die kein Urbild haben.
Die Bildmenge muss also mindestens so viele Elemente haben, wie die Urbildmenge.

31.2.3.3 Bijektive Abbildung

Als letztes spielt die Abbildung ein Rolle, die beide vorherigen Eigenschaften vereinigt. Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie verschiedene Elemente ihres Definitionsbereichs auf verschiedene Elemente der Zielmenge abbildet (sie also injektiv ist), und wenn zusätzlich jedes Element der Zielmenge als Funktionswert auftritt (sie also surjektiv ist). Eine
bijektive Funktion hat daher immer eine Umkehrfunktion, ist also invertierbar.

Definition:
Eine **Funktion** f : D → W heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl surjektiv als auch injektiv ist.

Damit ergibt sich eine eineindeutige Abbildung, dh. es ist eine eindeutige Abbildung von D auf W, sondern auch eine eindeutige Abbildung von W auf D.

31.3. Permutationen

Eine Anordnung (nur Reihenfolge) sämtlicher Elemente einer endlichen Menge heißt auch Permutation. Für Permutationen hat sich eine Listenschreibweise eingebürgert. Sämtliche Permutationen von S = {a, b, c} sind:
(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Bei einer **Permutation**

- müssen immer **alle Elemente**
- in einer Reihenfolge **angeordnet** werden.

31.3.1. Permutationen ohne Wiederholung

Anzahl der Permutationen bei n Verschiedenen Elementen:

$$\boxed{P_n = n!}$$

- Alle **n-elementigen Tupel**, die
- aus einer **n-elementigen Menge** erzeugt werden können
- mit **n-verschiedenen Elementen**.

Voraussetzungen:

- **Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander.**
- **Es müssen alle (n) Elemente ausgewählt werden.**
  (*am Ende des Experiments ist die Urne leer*)
- **Ein Element kann nicht mehrmals ausgewählt werden.**
  (*es wird keine Kugel zurückgelegt, also keine Wiederholung und es gibt auch keinen zwei gleichen Elemente*)
- **Die Reihenfolge muss berücksichtigt werden**
  (*die Reihenfolge (1,2,3) ist von (2,1,3) zu unterscheiden, würde die Reihenfolge nicht berücksichtigt werden, wäre das identisch mit nicht unterscheidbaren Elementen*)

31.3.2. Umsetzung im Modell

31.3.2.1 Baumdiagramm

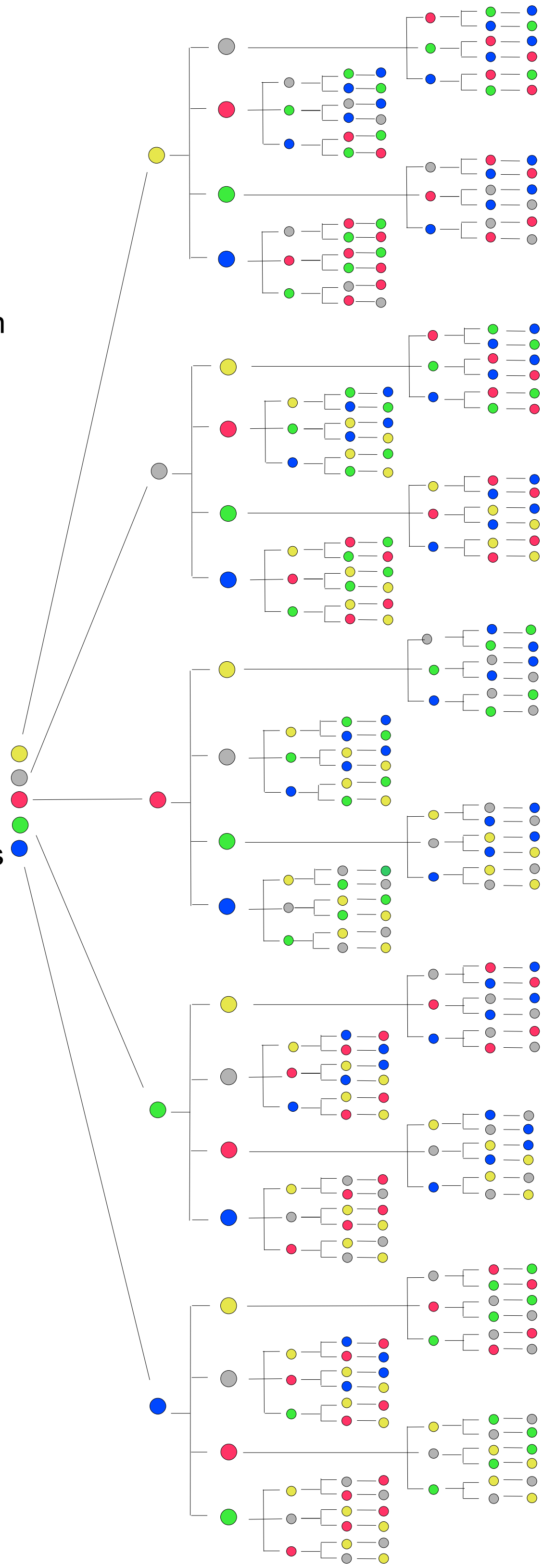
Darstellung des Baumes für n = 5

Da die Auswahl „mit Beachtung der Reihenfolge“ erfolgt, ist der Baum voll besetzt, es gibt keine leeren Äste, da es keine Wiederholungen geben kann.

Am rechten Rand sind (aus Platzgründen in zwei Reihen) die 120 Möglichkeiten in Gruppen zu jeweils 6 aufgeführt.

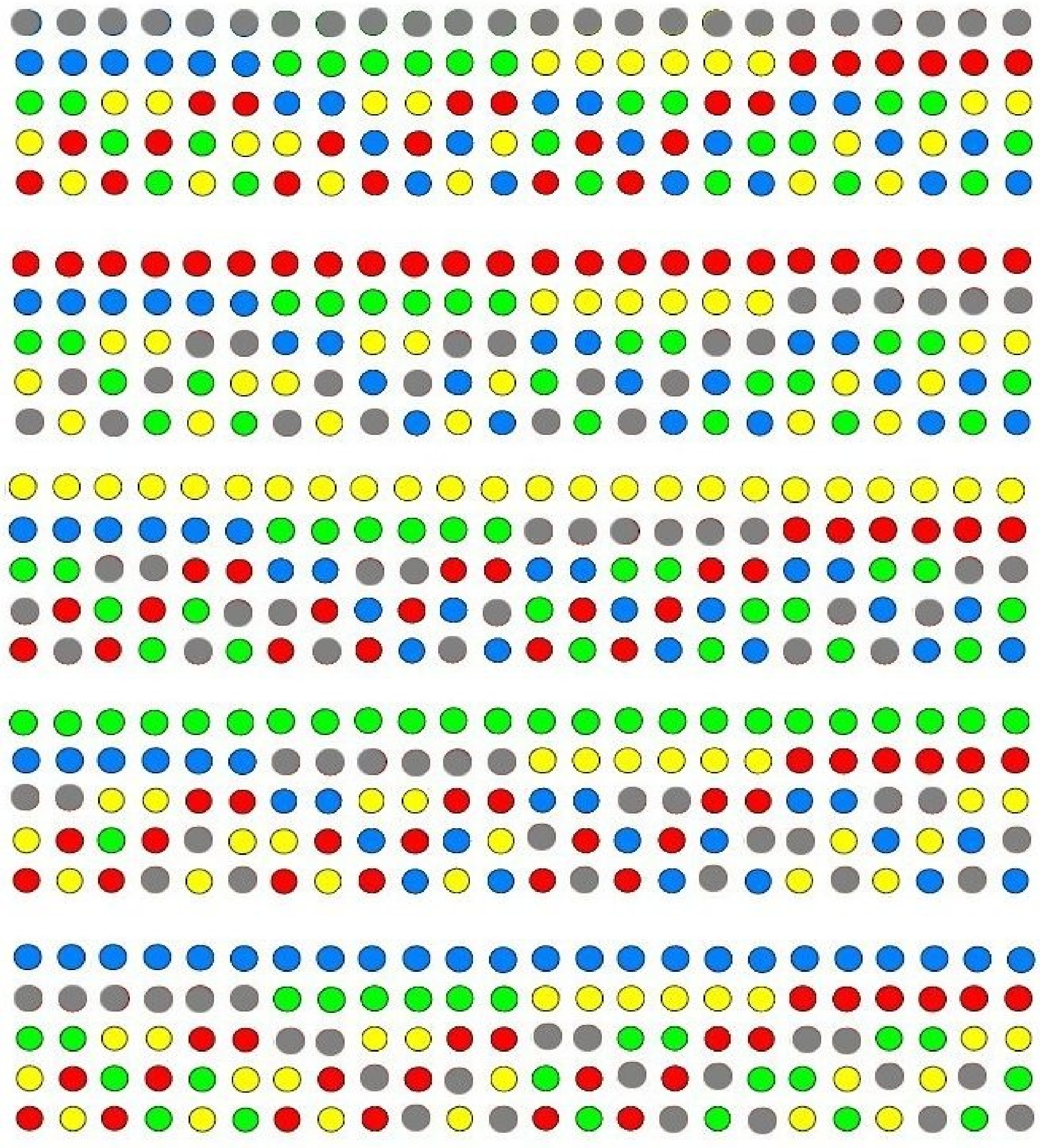
- In der ersten Ebene sind 5 verschiedenfarbige Kugeln
- In der zweiten Ebene gibt es zu **jeder Kugel** aus der ersten Ziehung 4 weitere
- In der dritten Ebene gibt es zu jedem bisherigen Teilbaum 3 weitere Kugeln usw.

Begonnen bei n ist die Anzahl in jedem Teilbaum gekennzeichnet durch das Produkt mit der nächst kleineren ganzen Zahl. So entsteht ein Produkt aller natürlicher Zahlen bis n, das als n-Fakultät bezeichnet wird.



31.3.2.2 Urnenmodell

In einer Urne sind 5 Kugeln mit verschiedenen Farben. Gesucht sind alle möglichen Anordnungen der Kugeln. Für n = 5 sind hier die verschiedenen Anordnungen aufgeführt: $P_5 = 5! = 120$



31.3.2.3 Duales Urnenmodell

Die gleiche Darstellung kann man für das duale Urnenmodell verwenden, wenn man sich die Urnen, in die die Kugeln verteilt werden sollen, senkrecht untereinander angeordnet denkt.

Gesucht ist die Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Objekte auf n Urnen so zu verteilen, dass in jeder Urne genau ein Element liegt.

31.3.2.4 Das Abbildungsmodell

Bei einer Permutation handelt es sich um die Abbildung von einer Menge A auf eine Menge B. Beide Mengen müssen die gleiche Anzahl von Elementen haben und es wird jedem Element aus der Menge A eineindeutig ein Element aus der Menge B zugewiesen. Das bedeutet, dass auch jedem Element aus der Menge B eindeutig ein Element der Menge A zugewiesen ist. Elemente der Menge B sind nicht Bilder von zwei verschiedenen Elementen der Menge A.

> Wie viele **Abbildungen** f: K → N **von** einer r–Menge K **auf** eine r–Menge N gibt es ?

Die Abbildung f verteilt die Kugeln auf die Urnen! Die Kugeln sind die Urbilder und die Urnen sind die Bilder der Abbildung f. Jedem Bild (=Urne) darf nur ein Urbild (=Kugel) zugewiesen sein.

> Gegeben seien zwei Mengen $A = \{a_1, a_2, a_3, ... a_r\}$ und $B = \{b_1, b_2, ... b_r\}$.
> Eine **Abbildung** α von der Menge A auf die Menge B ist eine Vorschrift, die ***jedem Element von A genau ein Element von B*** *so* zuordnet, dass jedem Element von B auch nur ein Element von A zugeordnet ist.

Wir geben ein Beispiel an:

$a_1 \; a_2 \; a_3 \; . . . \; a_r$

$b_3 \; b_6 \; b_2 \; . . . \; b_1$

Die zweite Zeile legt die Abbildung eindeutig fest und jedes Element von B muss in dieser Zeile auftreten, damit darf jedes Element von B auch nur einmal auftreten, sonst würden Elemente von B in dieser Zeile fehlen.

31.3.2.5 Wortbildungsmodell

> Wieviele n buchstabige Wörter kann man aus einem n buchstabigen Alphabet bilden, wenn jeder Buchstabe genau einmal verwendet werden kann und muss.

Betrachtet man dazu das Urnenmodell und macht sich jede Kugel als Buchstaben klar, dann existieren n verschiedene Buchstaben, die man zu n elementigen Worten zusammenfügen soll. Jedes Wort stellt eine Farbkombination der Kugeln dar.

31.3.3. Permutationen mit Wiederholung

Angenommen, wir haben eine Menge von Objekten, die aus mehreren Teilmengen besteht, wobei innerhalb jeder Teilmenge die Objekte gleich sind. Ein Beispiel dafür ist eine Urne mit mehreren Kugeln der gleichen Farbe. Beim Ziehen sind Kugeln der gleichen Farbe nicht unterscheidbar, dh. die Eigenschaft der Elemente tritt mehrfach auf. Wiederholung ist hier nicht im Sinne von „Zurücklegen" gemeint, sondern, dass mehrere Objekte die gleiche Eigenschaft besitzen. Es wird trotzdem jedes Element genau einmal ausgewählt !

Anzahl der Permutationen bei n Elementen, bei denen n_1, n_2,...n_k Elemente untereinander gleich sind:

$$\boxed{P_{n;\,n1,n2,n3\ldots nk} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\ldots n_k!}}$$

- Alle **n-elementigen Tupel**, die aus einer
- **n-elementigen Menge** erzeugt werden können
- mit **n_1, n_2 ...n_k gleichen Elementen**

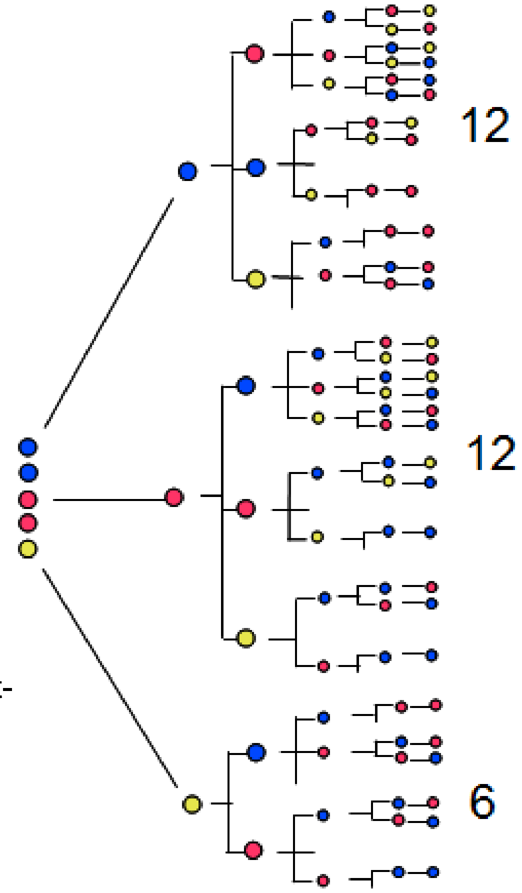
Voraussetzungen

- **Mindestens 2 Elemente der Ausgangsmenge sind identisch,** d.h. es gibt Elemente der Ausgangsmenge, die sich nicht voneinander unterscheiden lassen .
- **Es müssen alle (n) Elemente ausgewählt werden.** *(nach dem Experiment ist die Urne leer)*
- Ein Individualelement kann nicht mehrmals ausgewählt werden, **ein Element mit gleicher Eigenschaft hingegen schon**. Liegen z.b. 2 rote Kugeln in der Ausgangsmenge, so muss jede der beiden roten Kugeln ausgewählt werden (***mit Wiederholung***), eine dritte rote Kugel kann aber nicht ausgewählt werden.
- **Die Reihenfolge der unterscheidbaren Elemente muss berücksichtigt werden**.

31.3.4. Umsetzung im Modell

31.3.4.1 Baumdiagramm

Das hier angegebene Beispiel zeigt 5 Kugeln, von denen 2 Farben je zweimal vorhanden sind.



Auf jeder Baumebene fallen doppelt entstandene Bäume weg. Von den ursprünglich 120 Möglichkeiten entfallen

- Nach dem 1. Ziehen für die doppelte rote und blaue Kugel jeweils 24 Möglichkeiten (diese fehlenden Teilbäume sind nicht eingezeichnet) , das sind 48
- Nach dem 2. Ziehen bei jeder ersten der roten und blauen einmal 6 für den doppelten Baum für die jeweils andere Farbe, das sind 12.
  für die gelbe Kugel je einmal 6 Stück für die doppelte rote und einmal 6 Stück für die doppelte blaue Kugel, das sind ebenfalls 12
- nach dem 3. Ziehen für rot-rot-gelb und blau-blau-gelb jeweils 1 Möglichkeit, für rot-gelb-rot und blau-gelb-blau jeweils eine Möglichkeit

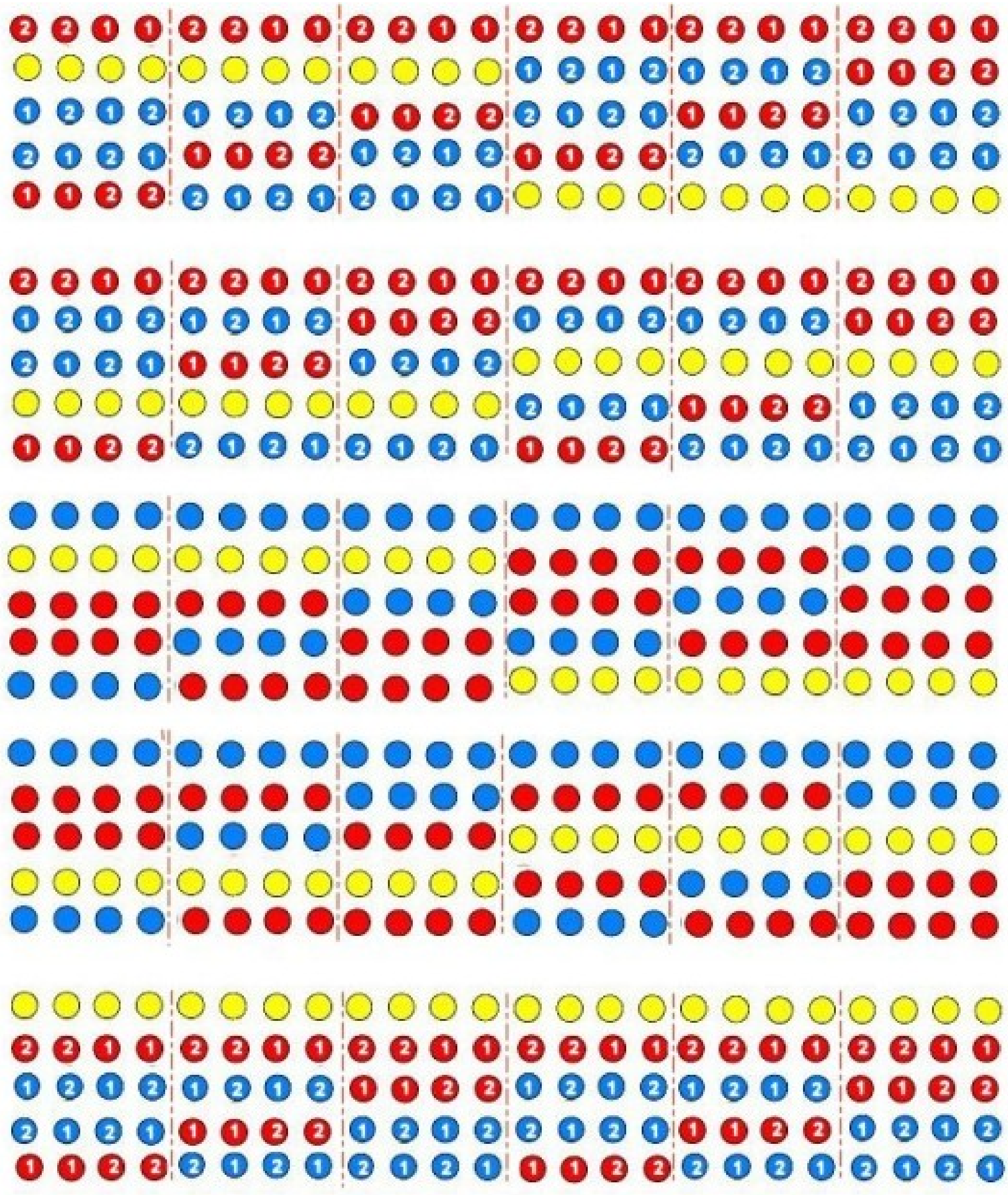
Damit entfallen nach dem ersten Ziehen 72 Möglichkeiten gegenüber der Permutation ohne Wiederholung.

Am Ende bleiben 30 verschiedene Möglichkeiten übrig.

31.3.4.2 Urnenmodell

In einer Urne befinden sich 5 Kugeln. Davon sind 2 rote, 2 blaue und 1 gelbe.

Gesucht ist die Anzahl der Möglichkeiten, eine geordnete Stichprobe von n Kugeln aus einer Urne mit k Kugeln mit zurücklegen so zu ziehen, dass, dass die Kugel a_i genau n_i-mal gezogen wird.



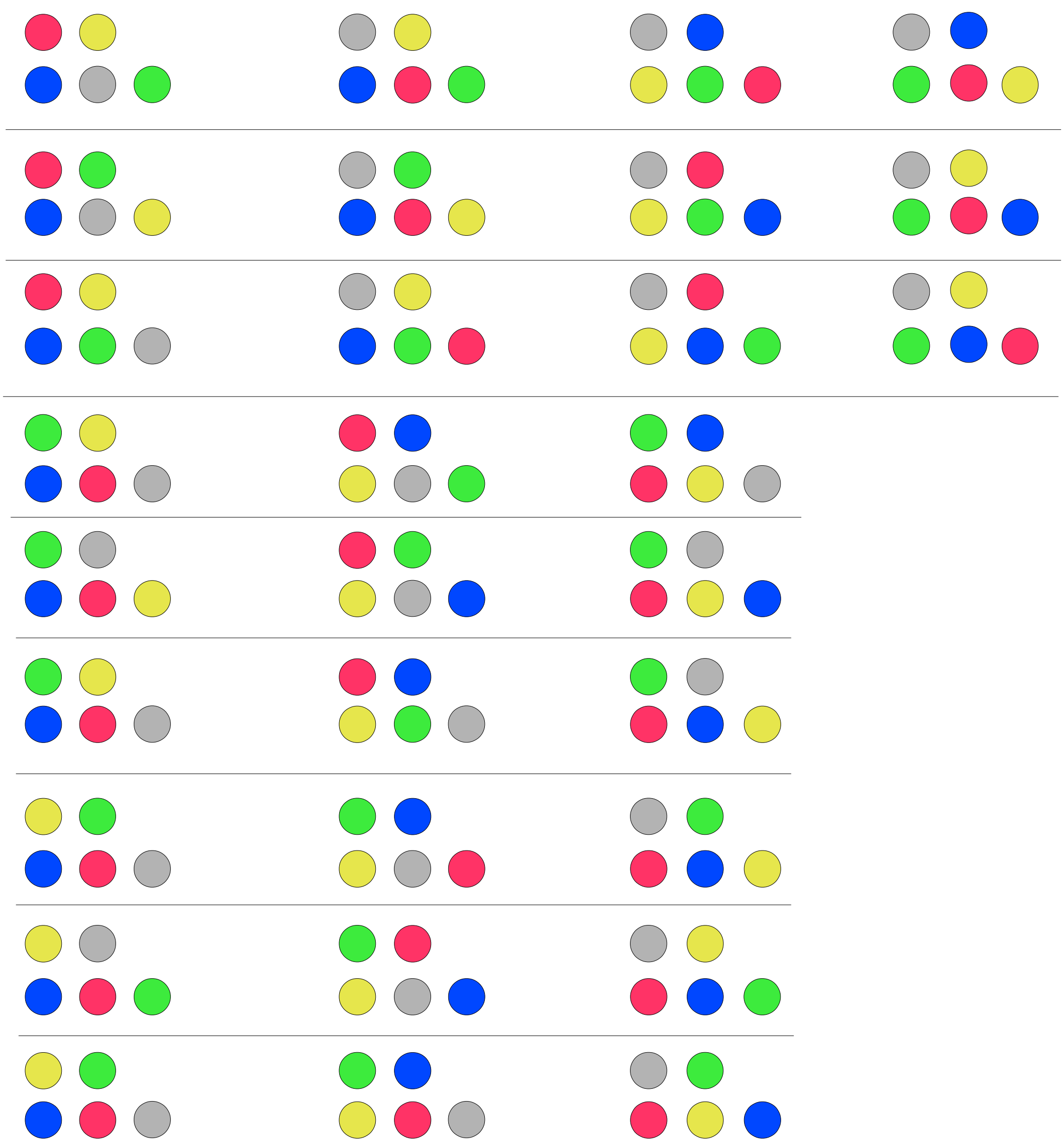
Aufgelistet wurden zunächst die 120 Möglichkeiten, die aus der Permutation ohne Wiederholung bekannt sind. Zur Verdeutlichung wurden bei einigen Anordnungen die gleichfarbigen Kugeln noch einmal nummeriert, um zu erkennen, dass es sich um zwei getrennte Anordnungen handelt. Nach außen hin sind aber jeweils 4 Anordnungen gleich, die durch eine Strichpunktlinie zusammengefasst wurden. Damit ist die Ausgangszahl von 120 Anordnungen durch 4 zu teilen und es entstehen 30 unterscheidbare Anordnungen. Im Bild 5 Zeilen zu 6 Blöcken. Die Zahl 4 entsteht durch 2! • 2! (2 rote 2 blaue), die in der Formel im Nenner stehen.

31.3.4.3 Duales Urnenmodell

Gesucht ist die Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Objekte auf k Urnen so zu verteilen, dass in der i-ten Urne n_i Objekte liegen.

Im folgenden Beispiel ist n = 5, die Anzahl der Kugeln. Es gibt 3 unterscheidbare Urnen, von den Urnen mit Mehrfacheigenschaft hat jede Urne 2 Kugeln:

	normales Urnenbeispiel	duales Urnenbeispiel
n	Anzahl aller Elemente	Anzahl der unterscheidbaren Objekte
k	unterscheidbare Eigenschaften	Anzahl der Urnen
$n_1 = 2$	Anzahl der roten Kugeln	Anzahl der Kugeln in der 1. Urne
$n_2 = 2$	Anzahl der blauen Kugeln	Anzahl der Kugeln in der 2. Urne
$n_3 = 1$	Anzahl der gelben Kugeln	Anzahl der Kugeln in der 3. Urne



Aufgelistet sind die nach den obigen Vorgaben sich ergebenden 30 Möglichkeiten in 3 Urnen (Spalten) 5 verschiedene Kugeln zu verteilen, so dass in der ersten Urne 2, in der zweiten Urne 2 und in der dritten Urne 1 Kugel vorhanden sind.

31.3.4.4 Abbildungsmodell

Wie viele **Abbildungen** f: K → N **von** einer r–Menge
K **auf** eine s–Menge N gibt es ?

Die Abbildung f verteilt die Kugeln auf die Urnen! Die Kugeln sind die Urbilder und die Urnen sind die Bilder der Abbildung f. Jedem Bild (=Urne) darf nur ein Urbild (=Kugel) zugewiesen sein.

> Gegeben seien zwei Mengen A = {a_1, a_2, a_3, ... a_r} und B = {b_1, b_2,... b_s}.
> Eine **Abbildung** α von der Menge A auf die Menge B ist eine Vorschrift, die ***jedem Element von A genau ein Element von B*** zuordnet, so dass alle Elemente von A ein Bildelement von B besitzen.

Da die Menge B weniger Elemente besitzt als A, müssen mehrere Urbilder aus A ein und dasselbe Bildelement aus B besitzen. Diese Abbildung ist dann nicht mehr umkehrbar eindeutig.
Veranschaulicht man sich diese Abbildung am Urnenmodell heißt das, jede Vertauschung der roten und blauen Kugeln untereinander führt zu dem gleichen Bild.

Urbilder aus A	Bilder aus B
r_1 r_1 b_1 b_1 g	
r_2 r_1 b_1 b_2 g	
r_1 r_2 b_2 b_1 g	r r b b g
r_2 r_1 b_2 b_1 g	
das wurde tatsächlich gezogen	das ist aber nur sichtbar

31.3.4.5 Wortbildung über Alphabethen

Mögliche Buchstabenanordnungen beim Wort ANAGRAMM

Wieviele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, alle Buchstaben des Wortes ANAGRAMM in einer unterschiedlichen Reihenfolge anzuordnen.

In diesem Wort kommen bestimmte Buchstaben mehrfach vor.
Anzahl aller Buchstaben: N=8
Häufigkeit einzelner Buchstaben:
k1 = A = 3
k2 = G = 1
k3 = N = 1
k4 = M = 2
k5 = R = 1

A = 8!/(3!*1!*1!*2!*1!) = 8!/(3!*2!) = 40320/12 = 3360
Es gibt 3360 unterschiedliche (8 Buchstaben umfassende) Wörter, die unter der Verwendung aller Buchstaben des Wortes ANAGRAMM gebildet werden können.

Zur gedanklichen Veranschaulichung kann man sich das Urnenmodell ins Gedächtnis rufen. Jede Farbe einer Kugel entspricht hier einem Buchstaben, gleiche Farben sind gleiche Buchstaben.

31.3.4.6 Herleitung aus Formel 1.1 (Permutation ohne Wiederholung)

n- Objekte lassen sich in n! verschiedenen Möglichkeiten anordnen. Da aber n_1 – Objekte nicht unterscheidbar sind, sind von den n! Möglichkeiten diejenigen nicht mehr zu unterscheiden, die aus der Vertauschung der n_1 Objekte entstehen. n_1 Objekte lassen sich aber in n_1 ! Möglichkeiten anordnen, so dass die unterscheidbaren Möglichkeiten $n!/n_1!$ sind.

Auf der Eingangsseite zum Urnenmodell ist dieser Zusammenhang zu erkennen. In der Urne befinden sich weiterhin 5 Kugel, davon sind jetzt aber 2 rote, 2 blaue und 1 gelbe. In einigen Fällen sind die Kugeln mit Nummern versehen, um die Ergebnisse besser unterscheiden zu können. Dies Nummern sind natürlich auf den Kugeln nicht vorhanden, sonst wären sie nicht „nicht unterscheidbar".
Wenn man sich die Nummern wegdenkt, stellt man fest, dass jeweils vier Anordnungen nicht unterschieden werden können (durch senkrechte Striche getrennt), so dass von den ursprünglich 120 Anordnungen der „Permutationen ohne Wiederholung" nur noch 30 verschiedene Anordnungen (30 nicht unterscheidbare Vierergruppen) übrigbleiben.

Da zwei Sorten Kugel mit je 2 Stück nicht unterscheidbar sind, ist nach obiger Herleitung $n_1 = 2$ und $n_2 = 2$ (und $n_3=1$ für gelb). Damit ergibt sich aus der Berechnungsformel:

$$\mathbf{P_{5;\,2,2}} = \frac{\mathbf{5!}}{\mathbf{2! * 2! * 1!}} = \frac{120}{2 * 2} = 30$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem ausgezählten Ergebnis überein.

31.4. Variationen

Jede mögliche Anordnung von k Elementen aus n vorhandenen Elementen **mit Berücksichtigung der Reihenfolge** heißt Variation dieser Elemente (Variation von n Elementen zur k-ten Klasse). Solche Auswahlen mit Beachtung der Reihenfolge werden auch als geordnete Stichproben bezeichnet.

Bei einer **Variation** werden
- k Elemente **ausgewählt**,
- die **angeordnet** werden

(mit Beachtung der Reihenfolge)

Bei allen Versuchen, bei denen die Reihenfolge ein Rolle spielt, stelle man sich vor, es gibt eine gerade Leiste, bei der vorn beginnend die Elemente aufgereiht werden.

31.4.1. Variation mit Wiederholung

Gegeben seien n verschiedene Elemente.
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, **k Elemente**
- unter **Berücksichtigung der Reihenfolge** anzuordnen,
- wenn jedes Element **beliebig oft**, aber höchstens k mal, wiederholt werden darf? (Beachte: k kann auch größer als n sein)

Aus einer Menge von n Elementen lassen sich unter Berücksichtigung der Reihenfolge

$$\boxed{{}^{W}V_n^k = n^k}$$

viele Tupel mit k Elementen bilden, wobei die Elemente gleich sein können.

- Alle **k-elementigen Tupel**, die aus einer
- **n-elementigen Menge** erzeugt werden können

Voraussetzungen

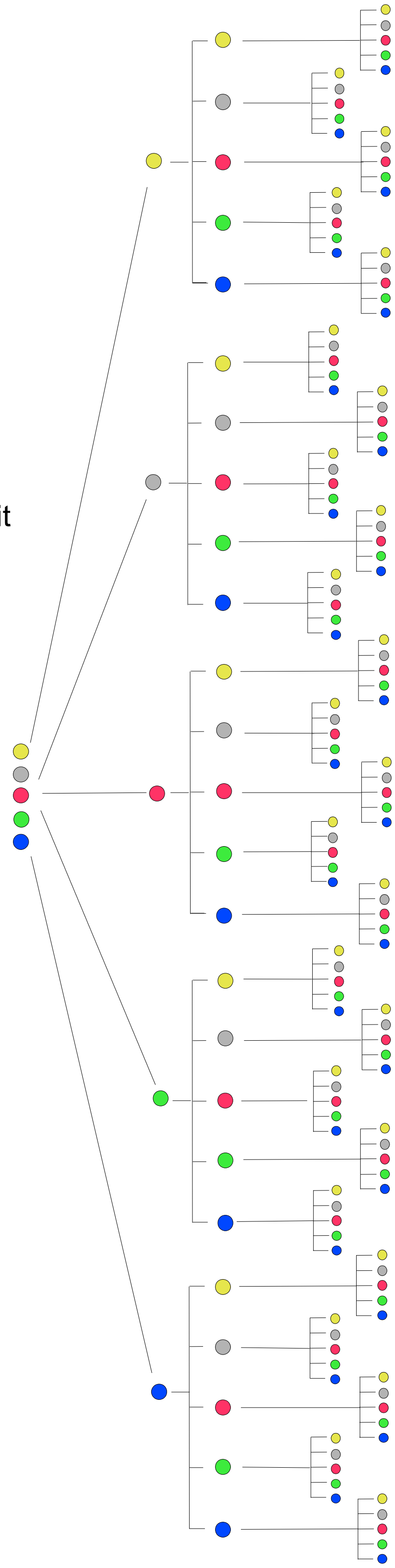
- **Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander.**
- **Es werden einige (k) Elemente ausgewählt.**
  Beim Ziehen mit Zurücklegen kann k > n sein, da jeder Versuch die gleichen Bedingungen hat, wie der erste Versuch, deshalb hat jeder Versuch die gleiche Wahrscheinlichkeit 1/n und das bei k Versuchen.
- **Ein Element kann mehrmals ausgewählt werden.**
- **Die Reihenfolge muss berücksichtigt werden**

31.4.2. Umsetzung im Modell

31.4.2.1 Baumdiagramm

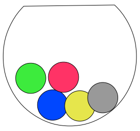
Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus 5 verschiedenen Kugeln 3 auszuwählen.

Ziehen mit Wiederholung heißt, dass vor jedem neuen Ziehungsversuch die gleiche Ausgangssituation besteht, wie vor der ersten Ziehung. Damit ist jeder Teilbaum in jeder Ebene voll besetzt. Obwohl jede Farbe nur einmal vorhanden ist können dreimal die gleichen Farben auftreten. In jeder Ziehungsebene gibt es n verschiedene Möglichkeiten, wie bei der ersten Ziehung. Deshalb kann man sich diese Versuche vorstellen wie eine Permutation ohne Wiederholung, bei der die erste Ziehung k -mal wiederholt wird. Die Anzahl der Möglichkeiten bei der ersten Ziehung beträgt n, wenn diese k – mal wiederholt wird ist mit jeder Ziehung wieder n zu multiplizieren. damit entsteht die Formel für n^k.



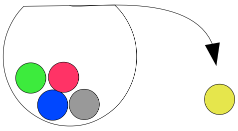
31.4.2.2 Urnenmodell

Aus einer Urne mit **n verschiedenen Kugeln** werden nacheinander k Stück gezogen, die Nummer wird nach jedem Zug notiert und die gezogene **Kugel vor dem nächsten Zug wieder zurückgelegt**.
Wie viele verschiedene geordnete Züge von k Kugeln sind möglich?

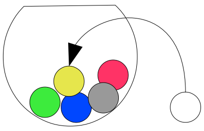


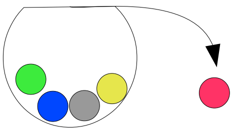
Man hat die Urne mit den fünf verschieden farbigen Kugeln.

Von diesen fünf Kugeln wird nun eine beliebige Kugel zufällig herausgegriffen.
In unserem Fall erwischen wir die gelbe Kugel.

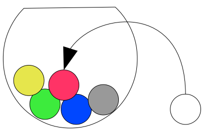


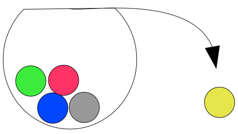
Da aber fünf verschiedene Kugeln in unserer Urne lagen, hatten wir für diesen Zug auch **5 Möglichkeiten**, eine dieser fünf Kugeln zu ziehen.
Nun wird die eben gezogene Kugel wieder zu den anderen Kugeln in die Urne **zurückgelegt**.
Man hat nun wieder alle fünf verschiedenen Kugeln in der Urne.





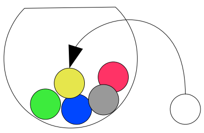
Jetzt wird ein zweites Mal gezogen. Durch das Zurücklegen der – in unserem Fall gelben – Kugel hat man wieder alle fünf Kugeln in der Urne und somit auch wieder **5 Möglichkeiten** für den zweiten Zug, der unter den gleichen Bedingungen stattfindet, wie der erste. Diesmal erwischen wir die rote Kugel.
Wie eben wird nun die gezogene – rote – Kugel wieder zu den anderen Kugeln in die Urne **zurückgelegt**, so dass man wieder alle fünf verschiedene Kugeln in der Urne hat.



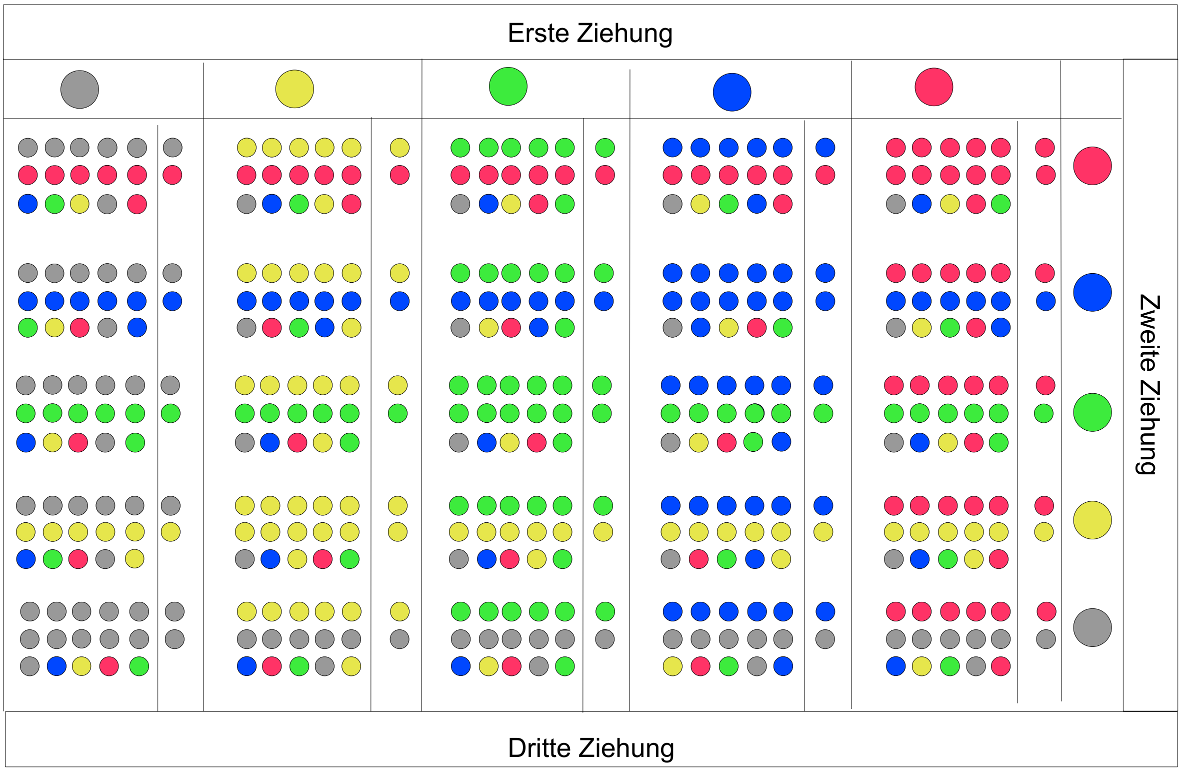


Nun wird ein drittes und letztes Mal gezogen. Auch hier hat man durch das Zurücklegen wieder alle fünf Kugeln zur Auswahl.
Somit hat man auch wieder **5 Möglichkeiten**, die dritte Kugel zu ziehen.
In unserem Fall erwischen wir erneut die gelbe Kugel, was nur durch das Zurücklegen möglich wurde.

Um Ordnung zu schaffen, legen wir die eben gezogen Kugel wieder in die Urne zurück.



In einer Urne liegen 5 verschiedenfarbige Kugeln. Wieviele Möglichkeiten gibt es, davon jeweils 3 auszuwählen, wobei Wiederholungen zulässig sind.

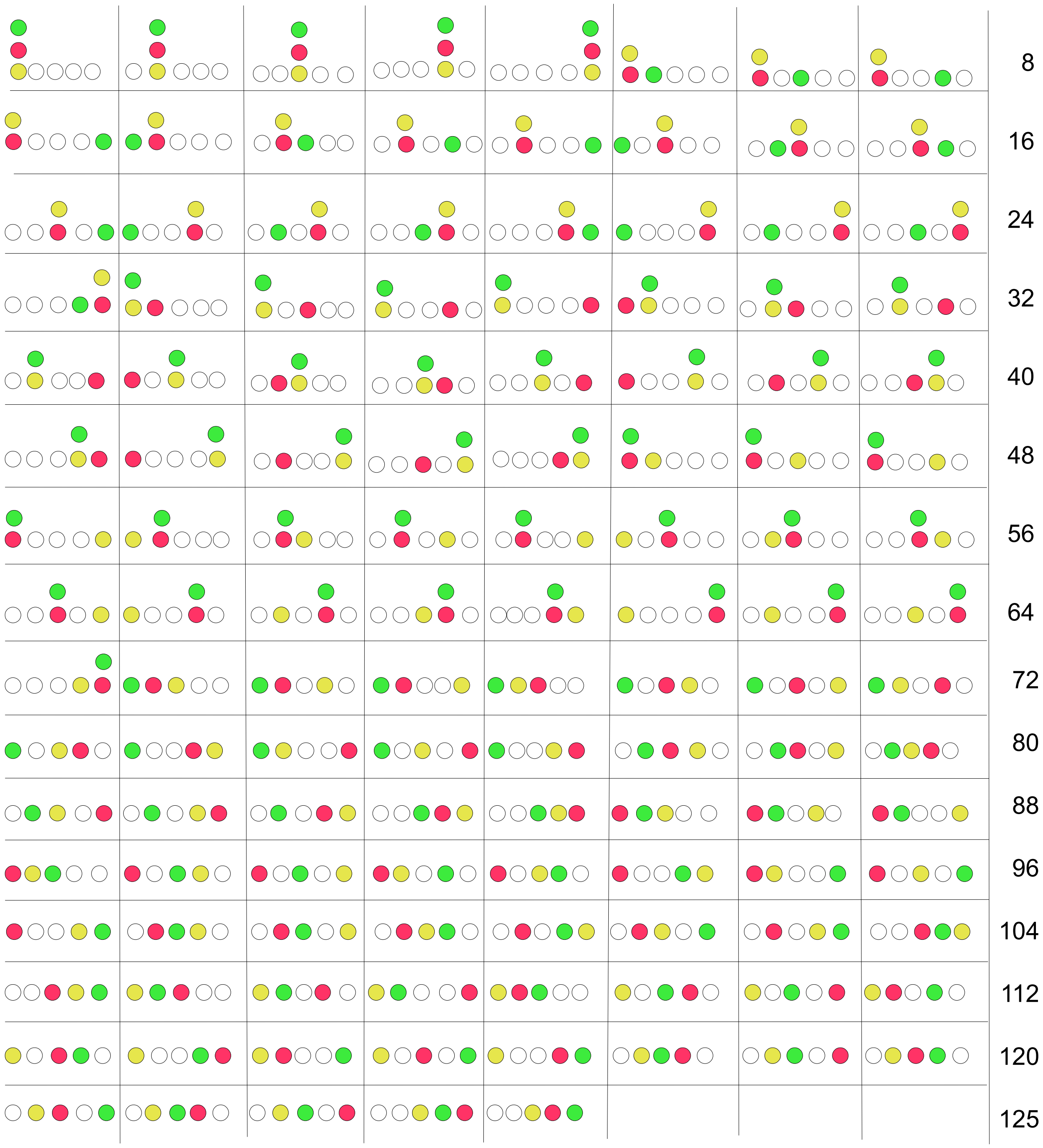


Da Wiederholungen zulässig sind, gibt es bei jeder Ziehung gleich viele Möglichkeiten, und zwar immer so viele, wie verschiedene Kugeln vorhanden sind. Bei 5 Kugel somit in jeder Ziehung 5 Möglichkeiten.

31.4.2.3 Duales Urnenmodell

Gegeben seien k **unterscheidbare Kugeln** und n durchnummerierte Urnen. Die Kugeln werden auf die Urnen verteilt, wobei **Mehrfachbelegungen zulässig** sind. Wie viele mögliche Verteilungen gibt es?

In der vorherigen Konstellation heißt das es gibt 5 Urnen, auf die 3 unterscheidbare Kugeln zu verteilen sind.



31.4.2.4 Abbildungen (Funktionen) aus einer r-Menge in eine s-Menge

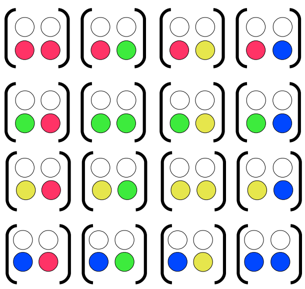
Wie viele **Abbildungen** f: K → N einer k–Menge in eine n–Menge gibt es ?

Die Abbildung f verteilt die Kugeln auf die Urnen!
Die Urnen sind die Urbilder und die Kugeln sind die Bilder der Abbildung f.

Gegeben seien zwei Mengen A = {a_1, a_2, a_3, ... a_k} und B = {b_1, b_2,... b_n}.
Eine **Abbildung** α aus der Menge A in die Menge B ist eine Vorschrift, die ***jedem Element von A genau ein Element von B*** zuordnet. Wir geben ein Beispiel an:

a_1 a_2 a_3 . . . a_k
b_3 b_3 b_2 . . . b_1

Die zweite Zeile legt die Abbildung eindeutig fest. Diese stellt aber ein Wort der Länge k über einem n-Alphabet dar (zur Menge B gehören n Zeichen), also gibt es entsprechend unserem Ergebnis aus a) genau $\mathbf{n^k}$ verschiedene Möglichkeiten. Die Bildung einer Funktion kann also interpretiert werden als Wortbildung über einem Alphabet.
Man kann dieses Ergebnis auch erhalten mit Hilfe eines Baumes: Für das Element a_1 gibt es s mögliche Bilder. Zu jedem dieser Fälle für das Element a_2 wieder n, für a_3 ebenfalls usw. bis a_r. Insgesamt also nach der Produktregel genau n^k Fälle.
Zur Veranschaulichung sollen hier 4 Kugeln auf 2 Urnen abgebildet werden. das Urbild besteht aus 4 Elementen und das Bild aus 2.



31.4.2.5 Wortbildung über Alphabeten

Es ist ein Alphabet mit n verschiedenen Buchstaben gegeben.

Wie viele **Wörter der Länge k** kann man damit bilden.

Hier sind die Nummern der Buchstaben die Urbilder und die Buchstaben selbst die Bilder.

α) n = 1:

Gegeben sei ein Alphabet A = {|} mit genau *einem* Buchstaben (hier als Strich).
Wörter über diesem Alphabet sind (geordnete) Listen aus den möglichen „Buchstaben", die wir gemeinhin als Strichlisten kennen.
Ganz offenbar gibt es zu jeder Länge k genau ein Wort, so z. B. zur Länge k = 4 nur die Strichliste mit vier Strichen: | | | | : $1^4 = 1$

β) n = 2:

Das Alphabet besteht nun aus zwei Zeichen (Dualsystem oder Binärcode).

Wir verwenden die Zeichen 0 und 1 und erhalten so das Alphabet B = {0, 1}. Wörter über diesem Alphabet sind Listen aus den Zeichen 0 oder 1, so genannte Dual-ketten. Wir verwenden den Ausdruck „Dualketten“ im Unterschied zu Dualzahlen. Bei Dualzahlen spielen führende Nullen keine Rolle und man lässt sie einfach weg. Im Gegensatz dazu sind führende Nullen bei Dualketten von Bedeutung. So sind z. B. 011 und 11 gleiche Dualzahlen, aber verschiedene Dualketten.
Zur Länge k = 3 notieren wir nachfolgend alle möglichen Dualketten mit den dazugehörigen Dualzahlen:

Dualkette	000	001	010	011	100	101	110	111
Dualzahlwert	0	1	2	3	4	5	6	7

Wie viele Dualketten der Länge k gibt es? (Baum, Stufenversuch): $2^3 = 8$

γ) n = 3:

Das Alphabet enthält nun drei verschiedene Zeichen: C = {0, 1, 2}.
Ein Beispiel dafür liefern uns Tippreihen im 11-Toto: Jede Tippreihe ist ein Wort der Länge k = 11 über dem Alphabet C. Es gibt offenbar genau 3^{11} = 177 147 verschiedene Möglichkeiten, eine Tippreihe auszufüllen. Für die erste Reihe gibt es 3 Möglichkeiten. Für die zweite Reihe ebenfalls 3 Möglichkeiten, da sie von der ersten Reihe völlig unabhängig ist. Also gibt es für alle 11 Reihen jeweils 3 Möglichkeiten: $3 \cdot 3 \cdot 3 \ldots\ldots \cdot 3 = 3^{11}$

δ) n = 10:

Als Alphabet können in diesem Fall die Ziffern des Dezimalsystems dienen: D = {0, 1, 2, 3,..., 9}. Die Wörter über diesem Alphabet sind Dezimalketten (im Unterschied zu Dezimalzahlen). Es sind daher auch führende Nullen zugelassen Zahlwörter im Dezimalsystem sind Beispiele dafür. Es gibt genau 10^k Dezimalketten der Länge k über dem Alphabet D. (Führende Nullen zugelassen!). Das entspricht genau unseren Vorstellungen vom Dezimalsystem. Es gibt genau 1000 Möglichkeiten 10 Ziffern in Gruppen zu 3 Ziffern anzuordnen. Für einstellige und zweistellige Zahlen sind führende Nullen zu benutzten. Damit erhält man Zahlenketten von 000 bis 999.

Betrachtet man eingangs angegebenen Urnenmodell die Kugeln wieder als Buchstaben, so gibt es 5 verschiedene Buchstaben, die zu Wörtern mit 3 Buchstaben zusammengefügt werden sollen, wobei jeder Buchstabe mehrfach auftreten darf.

Ergebnis:

Es gibt genau n^k verschiedene Wörter der Länge k über einem n-Alphabet.

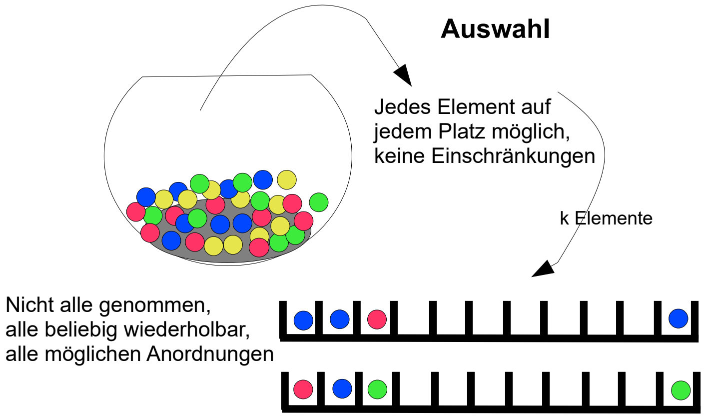
31.4.2.6 Prototypisches Beispiel

Zahlenschloss
Ein Zahlenschloss bestehe aus 5 Vorrichtungen, welche jeweils eine Zifferneinstellung verlangen. Wieviele Möglichkeiten gibt es ?

wichtig
• Bei jeder Zifferneinstellung können die Zahlen 0 bis 9 gewählt werden (N=10).
Bestimmte Ziffern können mehrfach vorkommen (=mit Wiederholung)
• Die Reihenfolge ist entscheidend (01557 ist ungleich 75510)

N = 10 mögliche Ziffern (0 bis 9)
k = 5 Zifferneinstellungen
$A = N^k = 10^5 = 100\,000$
Es gibt 100 000 mögliche Ziffernanordnungen für ein Zahlenschloss mit 5 einzustellenden Ziffern.

31.4.2.7 Herleitung aus der Formel 1.1 (Permutation ohne Wiederholung)



Man zieht k-mal eine Kugel aus einer Urne mit n Kugeln. Nach jedem Ziehen wird die Kugel wieder zurückgelegt, so dass bei jedem Versuch die gleiche Ausgangssituation hergestellt ist.
Bei dem Ziehen von Kugeln ohne zurücklegen entstehen n! Anordnungen, da beim ersten Versuch n Kugeln in der Urne sind und beim zweiten Versuch (n–1) Kugeln, da die Ausgangssituation nicht wieder hergestellt wurde. Mit jedem neuen Versuch ist wieder eine Kugel weniger in der Urne. Durch das Zurücklegen der gezogenen Kugel wird jedes mal der Ausgangszustand wieder hergestellt, so dass jeder Versuch die gleichen Voraussetzungen hat, wie der erste Versuch. Beim ersten Versuch gibt es aber n Möglichkeiten, so dass diese n Möglichkeiten jetzt genau k-Mal auftreten, also $n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$ mit k Faktoren n, somit n^k.

31.4.3. Variation ohne Wiederholung

Gegeben seien n verschiedene Elemente.

- Wieviele Möglichkeiten gibt es, **k Elemente**
- unter **Berücksichtigung der Reihenfolge** anzuordnen,
- jedes Element nur einmal benutzt werden darf

k-Elemente lassen sich in k! verschiedenen Anordnungen auswählen. Hier sind aber nicht k-Elemente zur Verfügung, sondern n-Elemente mit n > k. Damit lassen sich aus den n-Elementen zunächst verschiedene Gruppen zu k-Elementen zusammenstellen.

Einer Gesamtheit von n verschiedenen Elementen kann man:

$$\boxed{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!}$$

viele Tupel mit k Elementen und Berücksichtigung der Reihenfolge entnehmen, wobei $k \leq n$ gilt. $V^n_n = P_n$

- Alle **k-Permutationen**, die aus einer
- **n-elementigen Menge** erzeugt werden können

Voraussetzungen

- **Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander.**
- **Es werden einige (k) Elemente ausgewählt.**
- **Ein Element kann nicht mehrmals ausgewählt werden.**
  Beim Ziehen ohne Zurücklegen muss $k \leq n$ sein, da irgendwann die Urne leer ist.
- **Die Reihenfolge muss berücksichtigt werden.**

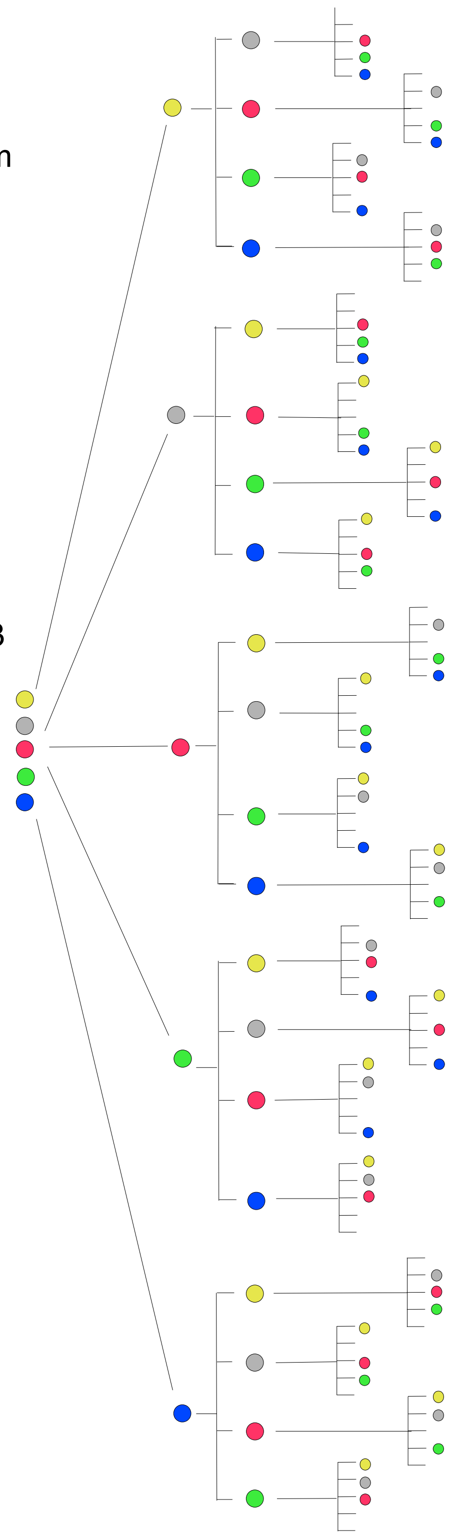
31.4.4. Umsetzung im Modell

31.4.4.1 Baumdiagramm

Auf der 2. Baumebenen fällt bei jeder gezogener Kugel 1 Baum weg, genau für die Farbe, die in der ersten Ziehung gezogen wurde. In der 3. Baumebene fallen jeweils 2 Bäume weg, für die 2 Farben die bis zu diesem Zeitpunkt gezogen wurden.

- in der 1. Baumebene gibt es n Möglichkeiten
- in der 2. Baumebenen gibt es für jeden Teilbaum n-1 Unterbäume, die entstehen
- in der 3. Baumebenen gibt es für alle bis dahin entstandenen Teilbäume n-2 Unterbäume.
- Damit gibt es für das erste Ziehen 5 Möglich-keiten
- Für **jede** gezogenen Farbe gibt es beim zweiten Ziehen 4 Möglichkeiten
- Für **jede** gezogene Farbkombination der ersten beiden Ziehungen gibt es in der dritten Ziehung 3 Möglichkeiten.

Am Ende entstehen 60 verschiedene Möglichkeiten.

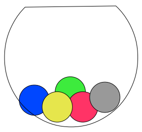


31.4.4.2 Urnenmodell

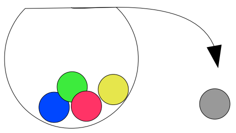
einer Auswahl, nacheinander, alle unterscheidbare Kugeln.

Aus einer Urne mit **n verschiedenen Kugeln** werden nacheinander ***ohne Zurücklegen k*** Stück gezogen und jeweils die Nummer notiert (zur Beachtung der Reihenfolge der Ziehungen).

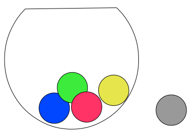
Dabei ist automatisch $k \leq n$, da nach maximal n Ziehungen die Urne leer ist.



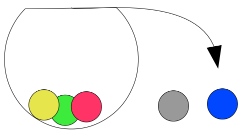
Man hat die Urne mit den fünf verschieden farbigen Kugeln.



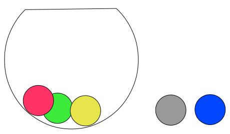
Von diesen fünf Kugeln wird nun eine beliebige Kugel zufällig herausgegriffen.
In unserem Fall erwischen wir die graue Kugel.
Da aber fünf verschiedene Kugeln in unserer Urne lagen, hatten wir für diesen Zug auch **5 Möglichkeiten**, eine dieser fünf Kugeln zu ziehen.



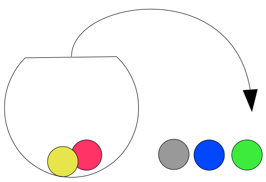
Diese eben gezogene Kugel wird nun **nicht zurückgelegt**, sondern außerhalb der Urne liegen gelassen.



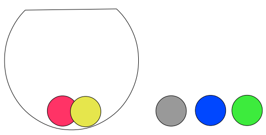
Jetzt wird ein zweites Mal gezogen. Dadurch, dass die bereits gezogene Kugel nicht zurückgelegt wurde, befinden sich nur noch vier verschiedene Kugeln in der Urne.
Man hat jetzt somit nur noch **4 Möglichkeiten**, eine weitere Kugel zu ziehen. Bei uns ist dies die blaue Kugel.



Auch diese -blaue- Kugel wird nun ebenso, wie die vorherige, **nicht** zu den restlichen Kugeln in die Urne **zurückgelegt**, sondern bleibt ebenfalls außen liegen.

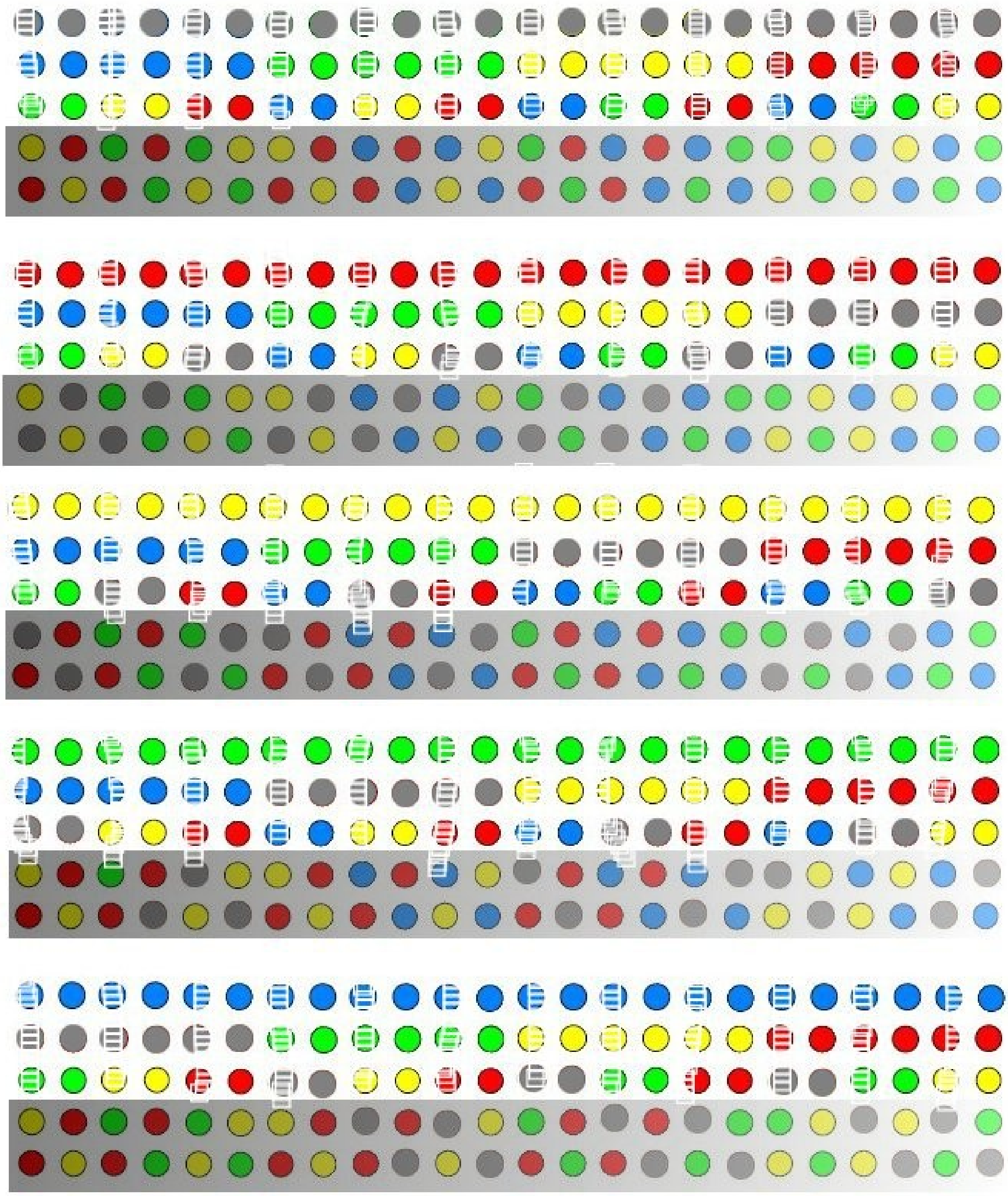


Nun wird ein drittes und letztes Mal gezogen. Dadurch, dass die bisher gezogenen Kugeln nicht zurückgelegt wurden, haben wir in der Urne nur noch drei verschiedene Kugeln zur Auswahl.
Wir haben also **3 Möglichkeiten**, die letzte -bei uns grüne- Kugel zu ziehen.



Genau wie bisher wird auch diese Kugel nicht in die Urne zurückgelegt.

In einer Urne liegen 5 verschiedenfarbige Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, davon jeweils 3 auszuwählen.

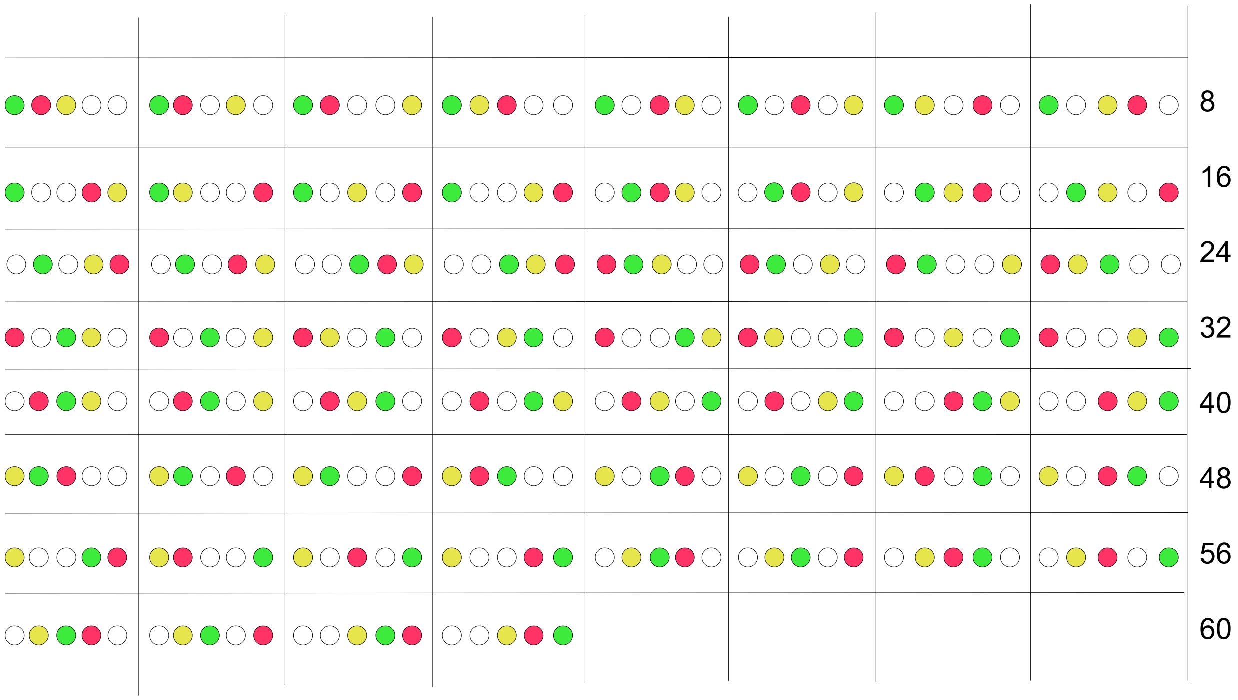


Aufgelistet wurden zunächst wieder die 120 Anordnungen aus der Permutation. Da nur 3 Kugeln ausgewählt werden, wurde die 4. und 5. Reihe grau abgedeckt (als nicht vorhanden. Damit entstehen immer zwei gleiche Reihen nebeneinander, von denen nur eine gezählt werden muss (die andere mit weißem Gitter bedeckt). Von den ursprünglich 120 Anordnungen sind noch 60 übrig geblieben: 5! / 2!
Die 2! entsteht aus den beiden gleichen Reihen, die nur einmal gezählt werden dürfen.

31.4.4.3 Duales Urnenmodell

Gegeben seien **k unterscheidbare Kugeln** und **n durchnumerierte Urnen**. Die Kugeln werden so auf die Urnen verteilt, daß **in keiner Urne mehr als eine Kugel** liegt. (D*as schließt ein, dass einige Urnen leer bleiben*) Wie viele solche Verteilungen gibt es?

Das duale Urnenmodell zur Ziehung von 3 Kugeln aus 5 vorhandenen ohne Zurücklegen ist: Verteile 3 Kugeln auf 5 Urnen, so dass in keiner Urne mehr als 1 Kugel liegt. Auch hier gibt es 60 verschiedene Möglichkeiten.



31.4.4.4 Injektive Abbildungen einer r-Menge in eine s-Menge:

Wie viele **injektive Abbildungen** einer r–Menge in eine s–Menge gibt es ?

Eine Abbildung von A in B heißt **injektiv**, wenn jedes Element von B ***höchstens einmal*** als Bild vorkommt, also keines mehrfach.
Beispiel: (r = 4 und s =7)
$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$; $B = \{b_1, b_2, .b_3, ..., b_7\}$.

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4$	ist injektiv	$a_1\ a_2\ a_3\ a_4$	dagegen nicht injektiv.
$b_2\ b_3\ b_4\ b_1$		$b_1\ b_2\ b_1\ b_3$	

Notwendigerweise ist bei injektiven Abbildungen **r** $\leq$ **s**. (siehe oben)
Die zweite Zeile legt die Abbildung eindeutig fest. Diese stellt aber ein **injektives** r-Wort über einem s-Alphabet dar.

Man kann sich die Festlegung einer injektiven Funktion aus A in B denken als einen *Versuch in r Stufen:*

- Stufe 1: Auswahl eines Bildelements aus B für das Element a_1 von A. Dafür gibt des **s Möglichkeiten** aus dem Alphabet B
- Stufe 2: Auswahl eines Bildelements aus Rest-B für das Element a_2 von A. Dafür gibt es noch **s–1 Möglichkeiten** aus dem Alphabet B.
- Stufe 3: ...
- ...
- Stufe r: Auswahl eines Bildelements für a_r aus den in B noch verbliebenen **s–r+1 Möglichkeiten**

Ergebnis:

Die Anzahl der injektiven Abbildungen einer r-Menge in eine s-Menge ist
gleich der Anzahl der injektiven r-Wörter über einem s-Alphabet:
s * (s – 1) * (s – 2) * (s – 3) * ... * (s – r + 1)

31.4.4.5 Wortbildung über Alphabeten

Es ist ein Alphabet mit n verschiedenen Buchstaben gegeben.

Wie viele Wörter der Länge k kann man damit bilden
bei denen **jeder Buchstabe höchstens einmal** auftritt

Gegeben sei ein Alphabet, aus denen Wörter gebildet werden, die keine Wiederholung von Buchstaben enthalten. Solche Wörter nennt man injektive Wörter.
Injektiv heißt ein Wort, wenn kein Buchstabe mehr als einmal vorkommt, also jeder Buchstabe höchstens einmal.
Das Wort „MATHE“ z. B. ist injektiv im Gegensatz zum Wort „STUDIUM“.
Die Länge s des Wortes kann in diesem Fall höchstens gleich der Anzahl n der verschiedenen Buchstaben des Alphabets sein: $s \leq n$, da für $s > n$ mindestens ein Buchstabe doppelt auftritt, denn es gibt nur n verschiedene.
Beispiel: $n = 26$ und $s = 4$:
Wir zählen alle injektiven Wörter der Länge 4 über dem gewöhnlichen Alphabet in lexikografischer Reihenfolge auf: abcd, abce, abcf, ..., zyxw.

31.4.4.6 Prototypisches Beispiel

Gold, Silber, Bronze
8 Läufer stehen im Finale der Olympischen Spiele.
Wieviele Möglichkeiten gibt es, daß die 8 Läufer Gold, Silber und Bronze unter sich ausmachen.

- Es kann nur einmal Gold, einmal Silber und einmal Bronze vergeben werden (= ohne Wiederholung).
- Es kommt auf die Reihenfolge an. d.h. z.B. Wenn wir wissen, daß Läufer a,b,c die Medaillen unter sich ausgemacht haben, dann gibt es noch mehrere Möglichkeiten, wer jeweils welches Metall erhalten haben könnte (Reihenfolge relevant).

N = Anzahl der Finalisten = 8
k = Medaillen = 3
A = N!/(N-k)!
A = 8!/(8-3)! = 40320/120 = 336
Es gibt 336 Möglichkeiten, unter 8 Finalisten Gold, Silber und Bronze zu verteilen.

31.4.4.7 Herleitung der Formel aus 1.1 (Permutation ohne Wiederholung)

Aus n Verschiedenen Elementen lassen sich n! verschiedene Anordnungen auswählen. Aber nach der Auswahl von k Elementen bricht man die Ziehung ab:

$$\underbrace{n}_{1}\cdot\underbrace{(n-1)}_{2}\cdot\underbrace{(n-2)}_{3}\cdot\underbrace{(n-3)}_{4}\cdot \ldots \cdot\underbrace{(n-k+1)}_{k} \quad \text{sind genau k Elemente}$$

da die restlichen n–k Elemente nicht mehr ausgewählt werden, ist diese Anordnung aus n-k Elementen nicht unterscheidbar. Also gelten alle Möglichkeiten, diese (n–k) Element anzuordnen als eine Auswahl. Das sind aber (n–k)! mögliche Anordnungen, die wie im Fall der nicht unterscheidbaren Elemente behandelt werden müssen. Sie sind deshalb nicht unterscheidbar, da sie gar nicht gezogen werden. Also sind von den n! Anordnungen nur n!/(n–k)! Anordnungen unterscheidbar.

Beispiel

In einer Urne liegen 10 verschiedene Kugeln beschriftet von 1 bis 10. Aus dieser Urne werden nun nacheinander 3 Kugeln gezogen. Wenn die Reihenfolge nun eine Rolle spielt, also 1,2,3 eine andere Lösung ist als 3,2,1, wieviele Lösungen gibt es?

Stellt man sich vor, dass die gezogenen Kugeln in Eierbecher abgelegt werden, so können im ersten Eierbecher 10 verschieden Kugeln liegen. Im zweiten nur noch 9, da eine bereits im ersten Becher liegt. Im dritten und letzten können nur noch 8 verschiedene liegen.

Es ergeben sich: 10·9·8 Möglichkeiten, oder da hier n=10: n·(n-1)·(n-2). Dabei ist beim letzten Faktor (n–2) die Zahl, die subtrahiert werden muss gleich k+1, wenn k die Anzahl der zu ziehenden Kugeln ist.

Also gibt es genau n·(n-1)·(n-2) …. (n–k+1) Möglichkeiten:

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)\cdot\mathbf{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$$

ausgedrückt in Fakultätsschreibweise heißt das: n! / (n–k)!

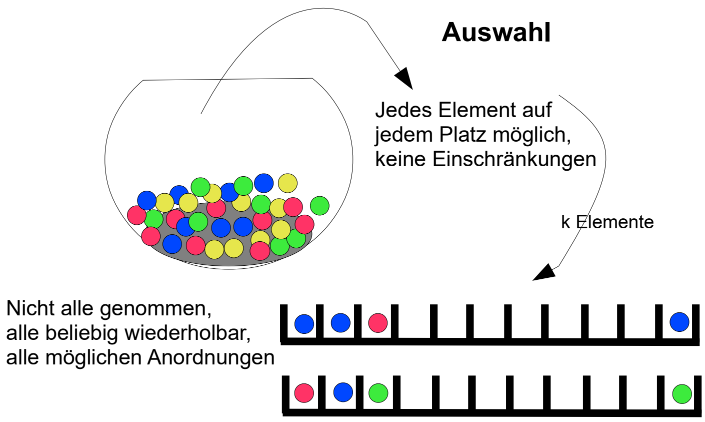
Nach der Definition des Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

folgt daraus $\binom{n}{k}$ **k!**

31.4.4.8 Herleitung aus Formel 1.2 (Permutation mit Wiederholung)

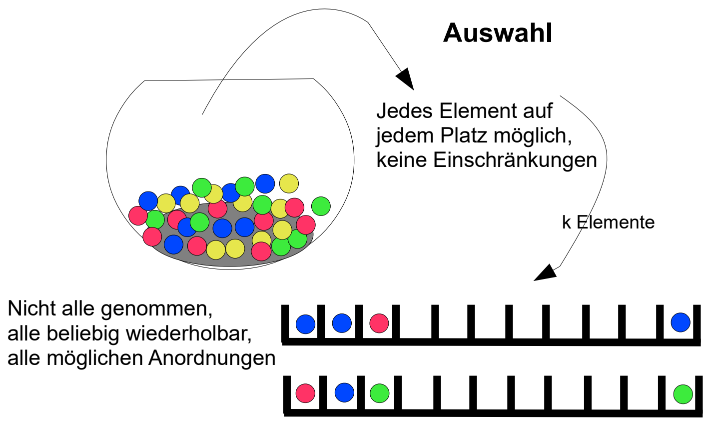
Die Anzahl von Permutationen von n Elementen, bei denen n_1 Elemente gleich sind beträgt: $n! / n_1!$ Möglichkeiten. Da in diesem Fall n-k Elemente nicht ausgewählt werden, kann die Anordnung dieser Elemente als gleich (da unbekannt) und ununterscheidbar angesehen werden. Damit entsteht aus der Formel 2.1 die Formel n!/ (n–k)!



31.4.4.9 Herleitung aus Formel 2.1 (Variation mit Wiederholung)

Die Anzahl der Variation einer n-elementigen Menge in Gruppen zu k-Elementen ist n^k.
In diesem Fall konnte man bei jeder Ziehung wieder auf n Elemente der Menge zurückgreifen, da die gezogenen Kugeln wieder zurückgelegt wurden. In diesem Fall sind aber bei der 2. Ziehung nur noch n-1 Elemente vorhanden, bei der 3. Ziehung n-2 Element usw.

1	2	3	4	k
n	**n**	**n**	**n**	**n**
n	**n-1**	**n-2**	**n-3**	**n-k+1**



dadurch entstehen n!/(n-k)! Möglichkeiten

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots\cdot(n-k+1)\quad\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-k)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Werden nur 3 Kugeln gezogen, erkennt man, dass die letzten beiden Kugeln keine Rolle spielen und beliebig vertauscht werden können. Das führt aber dazu, das von den anderen Permutationen jeweils zwei identisch sich, so dass eine gelöscht werden kann. Die Anzahl der zu löschenden entspricht genau den möglichen Permutationen, die nicht mehr unterschieden werden können, also 2! . Somit ist in diesem Fall nur noch die Hälfte der Permutationen vorhanden: 5! / 2!.

31.5. Kombinationen

Jede mögliche Anordnung aus n vorhandenen Elementen eine Gruppe von k Elementen herauszuziehen heißt Kombination dieser Elemente. Auf die Reihenfolge der Elemente innerhalb der Gruppe soll es dabei nicht ankommen. Rot-weiss-grün soll als das gleiche Element wie grün-weiss-rot, weiss-grün-rot usw. angesehen werden. Auswahlen, bei denen die Reihenfolge keine Rolle spielt heißen auch ungeordnete Stichproben.

Bei einer **Kombination** werden
- k Elemente **ausgewählt**,
- die **nicht angeordnet** werden

(ohne Beachtung der Reihenfolge)

31.5.1. Kombinationen ohne Wiederholungen

Gegeben seien n verschiedene Elemente.
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, **k Elemente**
- **ohne Berücksichtigung der Reihenfolge** , auf einmal zu ziehen und
- jedes Element nur **einmal** benutzt werden darf

Aus einer Menge von n Elementen lassen sich ohne Berücksichtigung der Reihenfolge:

$$\boxed{C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$

viele Tupel mit k Elementen bilden.

- Alle **k-Teilmengen**, die aus einer
- **n-elementigen Menge** erzeugt werden können

Bei einer konkreten Kombination wird jedes der n Objekte genau einmal oder gar nicht ausgewählt, deswegen handelt es sich um Kombinationen ohne Wiederholung (= ohne Zurücklegen).

Voraussetzungen:

- **Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander.**
- **Es werden einige (k) Elemente ausgewählt.**
- **Ein Element kann nicht mehrmals ausgewählt werden.**
- **Die Reihenfolge spielt keine Rolle**

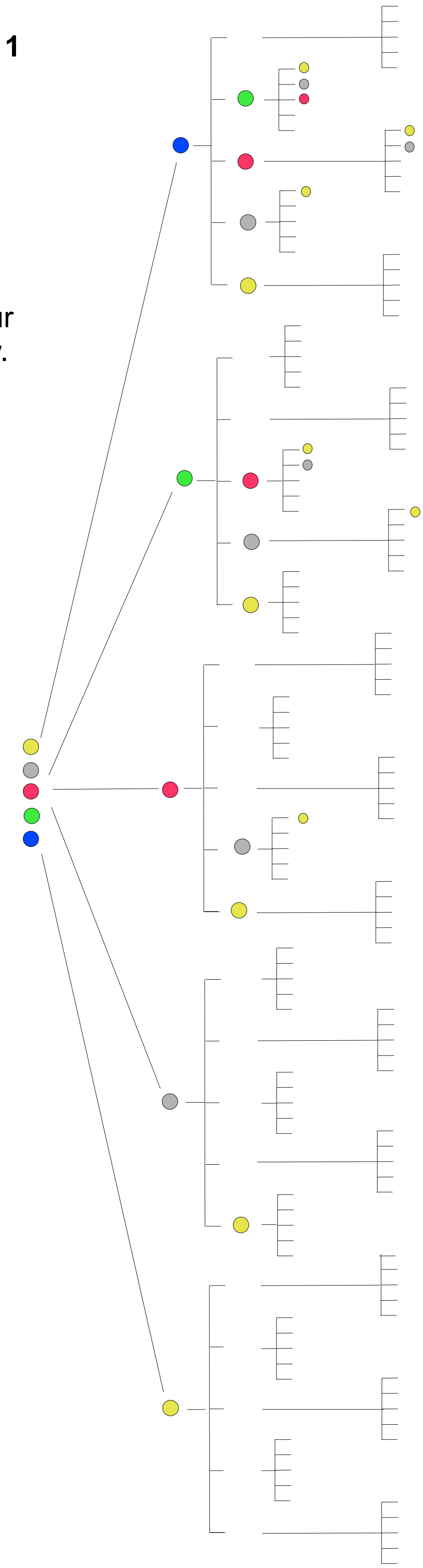
31.5.2. Umsetzung im Modell

31.5.2.1 Baumdiagramm

Auf der 2. Baumebenen fällt bei jeder gezogener Kugel **1 Baum mehr** weg, für jeweils die Farbe, die in der 1. Ziehung gezogen wurde und die Farbe, die bei einer anderen Farbe in der ersten Ziehung bereits gezogen wurde.

- in der 1. Baumebene gibt es n Möglichkeiten
- in der 2. Baumebenen gibt es für jeden Teilbaum unterschiedliche Anzahlen von Folgebäumen. Für die erste Farbe n-1, für die zweite Farbe n-2 usw.
- in der 3. Baumebenen gibt es wieder für alle bisherigen Unterbäume fallende Anzahlen von Folgebäumen. Im ersten Teilbaum 3+2+1, im zweiten Teilbaum 2+1 usw.
- Für eine gezogenen Farbe gibt es beim zweiten Ziehen 4 Möglichkeiten minus bereits doppelt erschienener Farben

Am Ende entstehen 10 verschiedene Möglichkeiten



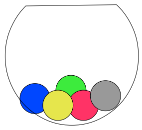
31.5.2.2 Urnenmodell

einer Auswahl, <u>auf ein Mal,</u> alle unterscheidbare Kugeln

> Aus einer Urne mit **n verschiedenen Kugeln** werden nacheinander **k Stück ohne Zurücklegen** gezogen.
> Wie viele solche Ziehungen gibt es ?

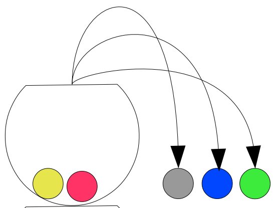
Es ist notwendigerweise k ≤ n, denn nach n Ziehungen ist die Urne leer. Die Menge der gezogenen Kugeln (die Reihenfolge spielt keine Rolle!) ist offenbar eine *Teilmenge aller n Kugeln* der gesamten Urne.

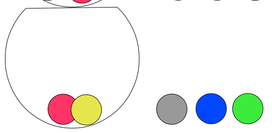
Statt die k Kugeln nacheinander zu ziehen kann man sie auch *„gleichzeitig mit einem Griff“* gezogen denken. Bei dieser Realisierung ist klar, dass es keine Wiederholung geben kann und dass die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird.



Man hat die Urne mit den fünf verschieden farbigen Kugeln.

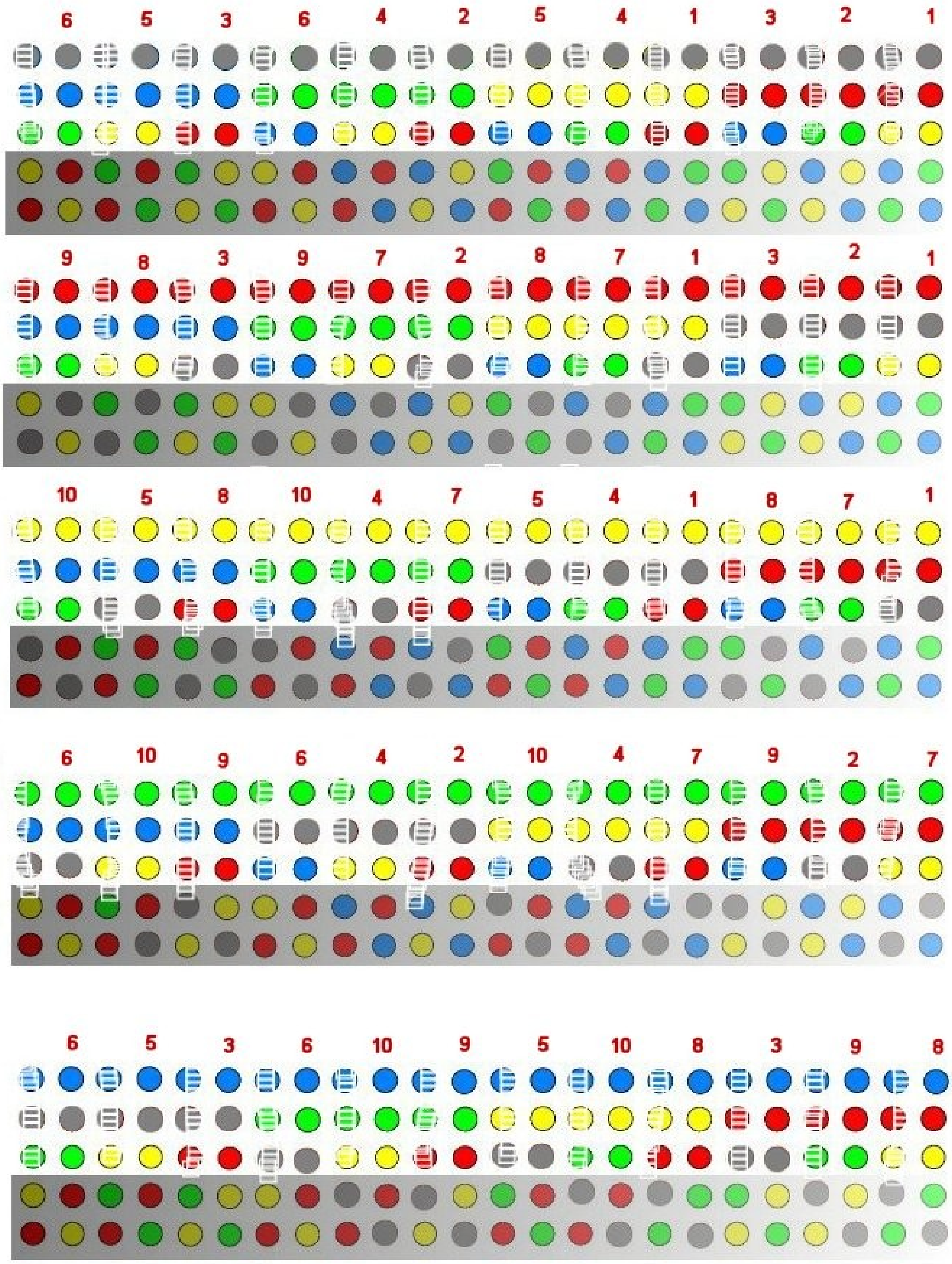
Von diesen fünf Kugeln werden nun drei Kugeln **gleichzeitig** gezogen.
Wir erwischen zufällig die grüne, die graue und die blaue Kugel.





Die eben gezogenen drei Kugeln werden nun **nicht zurückgelegt**, sondern außerhalb der Urne liegen gelassen.

Aus einer Urne mit 5 Kugeln sollen jeweils 3 gezogen werden, wobei die Reihenfolge der Farben keine Rolle spielt.



Ausgangsdarstellung sind wieder die 120 Anordnungen der Permutation. Dann ist grau abgedeckt alles beim Ziehen von 3 Kugeln nicht erscheint. Damit ist die „Variation ohne Wiederholung“ erreicht (=5!/2!) . Da die Reihenfolge der Anordnung keine Rolle spielt müssen in der Darstellung noch einmal 6 Anordnungen gleich sein (Die jeweils gleichen Anordnungen sind mit gleichen Zahlen versehen). Jede Zahl taucht genau 6 mal auf. Das ist die Anordnungen von 3 Elementen mit unterschiedlicher Reihenfolge (3! = 6). Damit ist die Zahl der Variation noch einmal durch 3! zu dividieren: 5!/2! /3! = 10.

31.5.2.3 Duales Urnenmodell

Gegeben seien **k <u>nicht</u> unterscheidbare Kugeln** und n durchnummerierte Urnen. Die Kugeln werden so auf die Urnen verteilt, dass **in keiner Urne mehr als eine Kugel** landet. Wie viele solche Verteilungen gibt es?

Nach dem Ausgangsbeispiel 3 Kugeln aus 5 zu ziehen, ohne Wiederholung, heißt das für das duale Urnenmodell: verteile 3 nicht unterscheidbare Kugeln auf 5 durchnummerierte Urnen, so dass in keiner Urne mehr als eine Kugel liegt.

3	●●●○○	●●○●○	●●○○●
5	●○●●○	●○●○●	
6	●○○●●		
9	○●●●○	○●●○●	○●○●●
10	○○●●●		

31.5.2.4 Bildmengen von Abbildungen (Teilmengen der Zielmenge B)

Wie viele streng monotone Abbildungen gibt es ?

Offenbar handelt es sich um die Festlegung einer ***Teilmenge der Menge B***. Notwendigerweise ist die Zahl der ausgewählten Elemente kleiner oder gleich der Gesamtzahl n aller Elemente von B. Die strenge Monotonie sichert, dass die Nummerierung nur in aufsteigender Reihenfolge (1, 2, 3)sein kann und dass keine zwei gleichen Nummern das gleiche Bildelement (A, B, C, D , E) liefern. Für n = 5 und k = 3 ergibt sich folgende Abbildung:

A	B	C	D	E
1	2	3		
1	2		3	
1	2			3
1		2	3	
1		2		3
1			2	3
	1	2	3	
	1	2		3
	1		2	3
		1	2	3

31.5.2.5 Wortmengen

Es ist ein Alphabet mit n verschiedenen Buchstaben gegeben.

> Wie viele Wörter der Länge k gibt es, **deren Buchstaben sortiert** sind und **jeder Buchstabe nur einmal** auftritt?

Wir bestimmen zu jedem Wort die Menge der in ihm vorkommenden Buchstaben (ohne Wiederholung der mehrfach vorkommenden Buchstaben und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge).
Zum Wort „MISSISSIPPI“ z. B. gehört die Buchstabenmenge B={I, M, P, S}.
Die Buchstabenmenge ist offensichtlich nichts anderes als eine ***Teilmenge*** *aus dem Alphabet von 26 Buchstaben.* Notwendigerweise ist die Zahl der vorkommenden Buchstaben höchstens gleich der Gesamtzahl *aller* Buchstaben des Alphabets.

31.5.2.6 Die Anzahl der k-Teilmengen einer n-Menge

Wir bilden von einer Menge M mit n Elementen die sämtlichen Teilmengen mit jeweils genau k Elementen, wählen also aus n verschiedenen Elementen k Stück aus (*ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge*!).
Zunächst stellen wir folgende wichtige Eigenschaft fest:

Zur Veranschaulichung des Begriffs der Teilmengen sollen hier Teilmengen von einer 5 elementigen Menge betrachtet werden.

Teilmenge, die aus Elementen von 0 Elementen besteht:
{ } 1 Element

Teilmenge, die aus Elemente von einem Element besteht:
{a}, {b}, {c}, {d}, {e} 5 Elemente

Teilmenge, die aus Elemente von zwei Elementen besteht:
{ab}, {ac}, {ad}, {ae},
{bc}, {bd}, {be},
{cd}, {ce},
{de} 10 Elemente

Teilmenge, die aus Elemente von drei Elementen besteht:
{abc}, {abd}, {abe}, {acd}, (ace}, {ade},
{bcd}, {bce}, {bde},
{cde}, 10 Elemente
Diese Konstellation entspricht genau der oben betrachteten mit n = 5 {a,b,c,d,e} und einer Auswahl von k = 3.

Teilmenge, die aus Elemente von vier Elementen besteht:
{abcd}, {abce}, {abde}, {acde}
{bcde}, 5 Elemente

Teilmenge, die aus Elemente von fünf Elementen besteht:
{abcde} 1 Element

Die Anzahl der verschiedenen k-Teilmengen einer n-Menge ist genau gleich der Anzahl der verschiedenen n-Dualketten mit genau k Einsen.

Ein Beispiel soll dies klar machen und damit die obige wichtige Aussage beweisen:
$M = \{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots a_n\}$
$D_1 =$ **1** 0 0 0 **1** 0 0 ... 0

$T_1 = \{a_1, a_5\}$ ist eine Teilmenge von M mit genau 2 der n Elemente von M. Dieser Teilmenge T_1 entspricht umkehrbar eindeutig die n-Dualkette D_1 = **1**000**1**00...0 mit genau 2 Einsen für die ausgewählten Elemente a_1 und a_5 und Nullen für alle nicht ausgewählten Elemente.
Jeder k-Teilmenge entspricht auf diese Weise eindeutig eine n-Dualkette mit genau k Einsen und umgekehrt. Deshalb gibt es genau so viele k-Teilmengen einer n-Menge, wie es n-Dualketten mit k Einsen gibt. Machen Sie sich diesen Zusammenhang an vielen Beispielen klar, so dass Sie ihn als verfügbaren geistigen Besitz, d. h. als Denkwerkzeug, nutzen können!

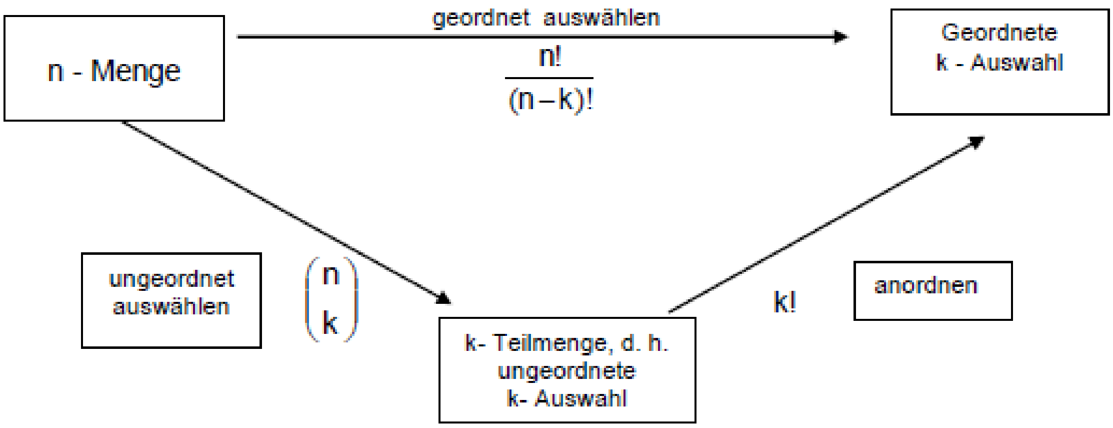
Berechnung der sogenannten Binomialkoeffizienten C(n, k)
Die noch unbekannte Anzahl **C(n, k)** gibt die
Anzahl aller verschiedenen k-Teilmengen einer n-Menge und gleichzeitig die
Anzahl aller Dualketten der Länge n mit genau k Einsen an.

Die Berechnung der Binomialkoeffizienten soll noch noch auf eine andere Weise anschaulich und übersichtlich dargestellt werden in einer Anwendungssituation für zwei der bisherigen Fälle:

Alle drei Modelle laufen darauf hinaus, von einer gewissen Menge gewisse ***Teilmengen*** zu bestimmen. Dies untersuchen wir nun an Beispielen:
Wir bestimmen die sämtlichen Teilmengen der Menge M = { a, b, c }

	{ a, b, c }	
{a, b }	{a, c }	{b, c }
{a }	{b }	{c }
	{ }	

In der obigen Aufzählung haben wir jeweils sämtliche Teilmengen, die dieselbe Anzahl von Elementen haben, in eine Zeile geschrieben:
Es gibt *eine* Teilmenge mit 0 Elementen, *drei* Teilmengen mit je 1 Element, *drei* Teilmengen mit je 2 Elementen und *eine* Teilmenge mit 3 Elementen. Insgesamt haben wir 8 verschiedene Teilmengen



Man kommt von der n-Menge zur geordneten k-Auswahl auf zwei Wegen:

- Entweder man stellt direkt geordnete k-Auswahlen her (oberer Pfeil). Dafür gibt es n*(n-1)* ...*(n-k+1) Möglichkeiten.
- Oder aber man nimmt zuerst eine ungeordnete k-Auswahl, wofür es „n über k“ Möglichkeiten gibt, und ordnet diese anschließend, wofür es jeweils k ! Möglichkeiten gibt.

31.5.2.7 Prototypisches Beispiel

Ziehung der Lottozahlen
Aus 49 nummerierten Kugeln werden nacheinander 6 Kugeln gezogen.
Wieviele mögliche 6 Zahlen können ausgewählt werden ?

Wichtig:

- Es werden einige Kugeln aus mehreren Kugeln gezogen.
- Eine gezogene Kugel kann nicht noch einmal ausgewählt werden.
- Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Kugeln gezogen werden.

N=49; k=6;
A = N!/((N-k)!*k!)
A= 49!/((49-6)!*6!) = 13983816

Es gibt ca. 14 Millionen Möglichkeiten, 6 Zahlen im Lotto anzukreuzen.

31.5.2.8 Herleitung aus Formel 2.1 (Variation ohne Wiederholung)

Wenn man k Elemente aus einer Urne mit n Elementen zieht und die Reihenfolge beachten muss, erhält man n!/(n-k)! Möglichkeiten. Jetzt sollen aber unterschiedliche Reihenfolgen wie eine Auswahl behandelt werden. k Elemente kann man aber auf k! verschiedene Weise anordnen und genau diese sollen als eine Auswahl angesehen werden. Also ist der Ausdruck noch einmal durch k! zu dividieren.

In dem zu Beginn angegebenen Beispiels heißt das, es werden nur noch die aufgetretenen Farben gezählt, alle Vertauschungen innerhalb der Reihenfolge der Farben gelten als eine Anordnung. Da 3 verschiedenfarbige Kugeln immer in 3! = 6 verschiedenen Anordnungen möglich sind, ist die Zahl der Variationen:

$$V^3_5 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60 \text{ noch einmal durch } 3! = 6 \text{ zu dividieren}$$

$$C^k_n = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = 10$$

Diese 10 Anordnungen sind durchnummeriert und gleichzeitig die 6 jeweils gleichen Anordnungen mit der gleichen Nummer versehen. Man erkennt, dass die 6 gleichen Anordnungen über jeweils 3 Zeilen mit je 2 Anordnungen vertreten sind.

31.5.3. Kombinationen mit Wiederholungen

Gegeben seien n verschiedene Elemente.

- Wieviele Möglichkeiten gibt es, **k Elemente**
- **ohne Berücksichtigung der Reihenfolge**, auf einmal zu ziehen und
- jedes Element kann **beliebig oft**, aber höchstens k mal benutzt werden.

Aus einer Menge von n Elementen lassen sich ohne Berücksichtigung der Reihenfolge:

$$\boxed{{}^{W}C_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!}}$$

viele Tupel mit k Elementen bilden, wobei die Elemente gleich sein können.

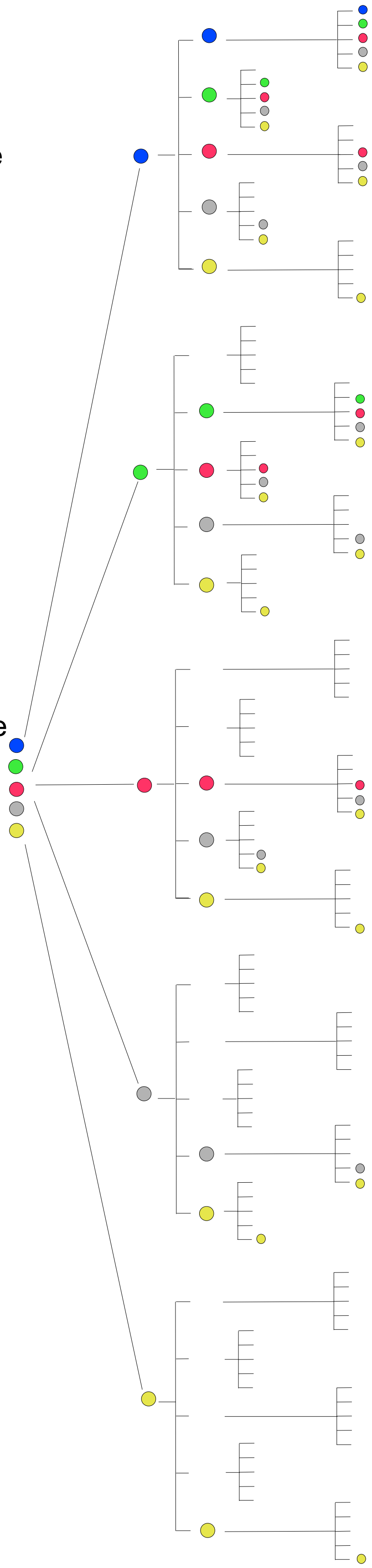
- Alle **k-Kombinationen**, die aus einer
- **n-elementigen Menge** erzeugt werden können

Voraussetzungen:

- **Alle (n) Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander**
- **Es werden einige (k) Elemente ausgewählt**.
- **Ein Element kann mehrmals ausgewählt werden.**
  Beim Ziehen mit Zurücklegen kann k > n sein, da jeder Versuch die gleichen Bedingungen hat, wie der erste Versuch.
- **Die Reihenfolge spielt keine Rolle**

31.5.4. Umsetzung im Modell

31.5.4.1 Baumdiagramm



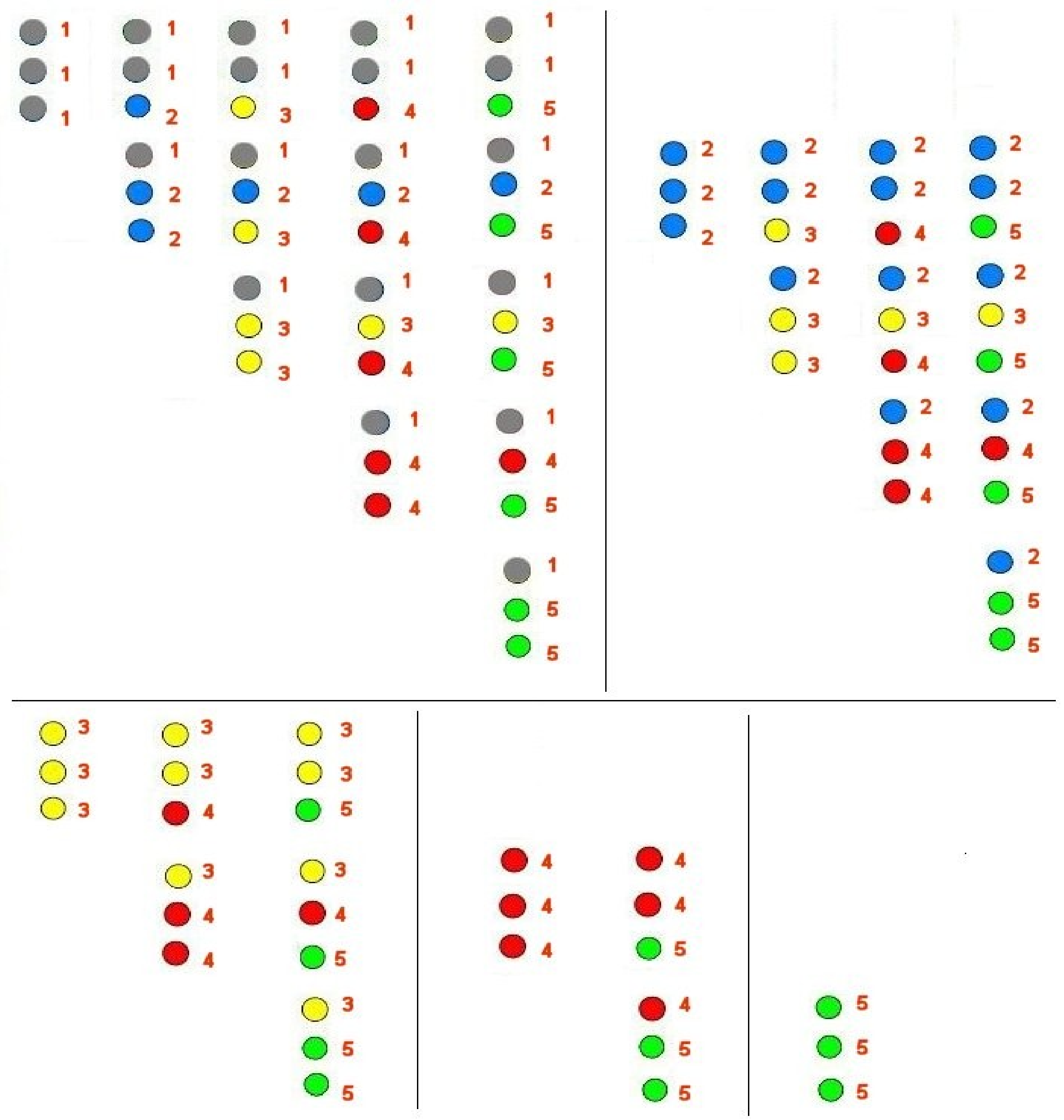
In der zweiten Baumebene ist der erste Teilbaum vollständig, bei jedem weiteren Teilbaum fällt ein ein zusätzlicher Teilbaum weg, da bei jeder weiteren Farbe die Farbkombination bereits aufgetreten ist, da die Reihenfolge des Auftretens keine Rolle spielt. das setzt sich bei jeder weiteren Ziehung fort.

- in der 2. Baumebene hat der erste Teilbaum n Unterbäume, der zweite Teilbaum n-1, der dritte n-n-2 Unterbäume usw.
- in der 3. Baumebenen gibt es für den ersten Teilbaum des ersten Baumes n Teilbäume, für den zweiten wieder n-1
- in der 3. Baumebenen gibt es für jeden weiteren Teilbaum einen kompletten Teilbaum weniger
- der zweite Teilbaum hat n-1 Teilbäume, bei dem wider der erste Unterbaum n-1 Unterbäume hat.
- für den n-2-ten Teilbaum n-2 gibt es n-2 Unterbäume, bei dem wieder der erste besetzt Teilbaum n-2 Unterbäume hat.
- Damit reduziert sich mit jedem weiteren Teilbaum die Anzahl der Unterbäume und die Besetzung der Unterbäume reduziert sich ebenfalls.

31.5.4.2 Urnenmodell

einer Auswahl, <u>auf ein Mal,</u> nicht alle unterscheidbare Kugeln
In einer Urne liegen **n unterscheidbare Kugeln**, von jeder Sorte mindestens k Stück, oder **man legt die Kugeln vor dem nächsten Ziehen wieder zurück**. Man greift nun mit einem Griff (ungeordnet) k Stück aus der Urne heraus (man kann auch k Stück nacheinander greifen und sie auf einen ungeordneten Haufen werfen). Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

In einer Urne befinden sich 5 verschiedenfarbige Kugeln. Von jeder Farbe sind mindestens 3 Kugeln vorhanden. Es werden 3 Kugeln mit einem Mal gezogen. Wieviele verschiedene Anordnungen gibt es.



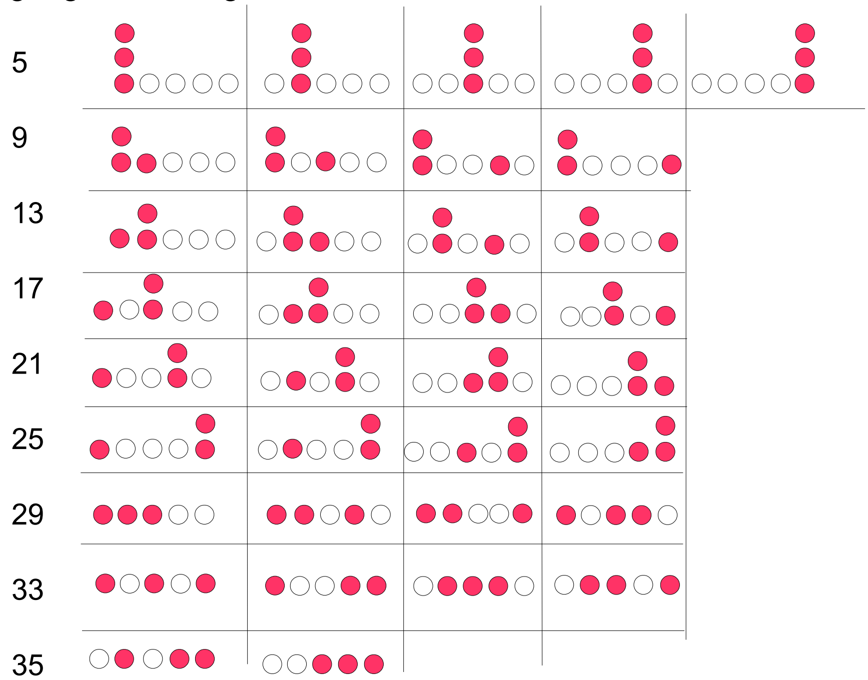
Es gibt 35 verschiedene Anordnungen

31.5.4.3 Duales Urnenmodell

Man kann alle aufgezählten Fälle behandeln durch folgende elegante Fragestellung:

> Auf wie viele verschiedene Weisen ist es möglich, **k <u>nicht</u> unterscheidbare Kugeln** in n verschiedene Schubladen (z. B. nummerierte Schubladen) zu legen, wobei **Mehrfachbelegungen zulässig sind**?

Nach dem unter a) angegebenen Beispiel aus 5 Kugeln 3 Kugeln auf einmal zu ziehen, wobei von jeder Kugelfarbe mindestens 3 vorhanden sind, führt zu dem dualen Urnenmodell: Verteile 3 nicht unterscheidbare Kugeln auf 5 nummerierte Urnen, wobei Mehrfachbelegungen zulässig sind.



In der Darstellung sind die 35 Möglichkeiten für diesen Fall angegeben.

Analog dazu ist das „Gutscheinmodell“:

- Auf wie viele verschiedene Weisen kann man k Gutscheine auf n verschiedene Sorten von Gegenständen verteilen?

31.5.4.4 Abbildungsmodell

Wieviel monotone Abbildungen gibt es ?

In diesem Fall gilt keine strenge Monotonie. Das bedeutet, dass die Elemente immer noch in aufsteigender Reihenfolge erscheinen, aber es können mehrere Urbilder auf ein Bild abgebildet werden. Es darf nur kein kleineres Element nach einem größeren Element liegen. Es kann also nicht das Element 2 hinter dem Element 3 auftreten, aber 1 und 2 auf das gleiche Element abgebildet werden, auch 2 und3, aber nicht 1 und 3, dann liegt 2 entweder vor 1 oder nach 3 und das widerspricht der Monotonie.

Zur Darstellung lassen sich sowohl die Elemente angeben, die auf das jeweilige Bild abgebildet werden, aber auch nur die Anzahl der Element, die auf ein Bild abgebildet werden. Die notwendige Monotonie sichert die Reihenfolge der Urbilder.
Auf der linken Seite die Urbilder {1, 2, 3} die auf die jeweiligen Bilder {A, B, C, D, E} abgebildet werden, auf der rechten Seite die Anzahl der Urbilder, die auf ein Bild abgebildet werden.

A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
123					3				
12	3				2	1			
12		3			2		1		
12			3		2			1	
12				3	2				1
1	23				1	2			
1	2	3			1	1	1		
1	2		3		1	1		1	
1	2			3	1	1			1
1		23			1		2		
1		2	3		1		1	1	
1		2		3	1		1		1
1			23		1			2	
1			2	3	1			1	1
1				23	1				2
	123					3			
	12	3				2	1		
	12		3			2		1	
	12			3		2			1
	1	23				1	2		
	1	2	3			1	1	1	
	1	2		3		1	1		1
	1		23			1		2	
	1		2	3		1		1	1
	1			23		1			2
		123					3		
		12	3				2	1	
		12		3			2		1
		1	23				1	2	
		1	2	3			1	1	1
		1		23			1		2
			123					3	
			12	3				2	1
			1	23				1	2
				123					3

Wir wollen ein Beispiel betrachten, indem wir alle derartigen 3-Auswahlen aus der 3-Menge {a, b, c} notieren und zwar in lexikografischer Reihenfolge:

aaa, aab, aac, abb, abc, acc, bbb, bbc, bcc, ccc. Wir erhalten 6 + 3 + 1 = 10 Stück.

Für die Auswahl von 3 Elementen aus 5 ergibt sich folgendes:

{aaa}, {aab}, {aac}, {aad}, (aae},
{abb}, {abc}, {abd}, {abe},
{acc}, {acd}, {ace},
{add}, {ade},
{aee} 5+4+3+2+1 Elemente
{bbb},{bbc},{bbd},{bbe}
{bcc},{bcd},{bce}
{bdd},{bde},
{bee} 4+3+2+1 Elemente
{ccc},{ccd},{cce}
{cdd},{cde},
{cee} 3+2+1 Elemente

{ddd},{dde},

{dee}	2+1	Elemente
{eee}	1	Elemente

15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35

31.5.4.5 Wortbildungsmodell

Ein Alphabet mit n verschiedenen angeordneten Buchstaben sei gegeben.

Wie viele Wörter der Länge k gibt es, deren **Buchstaben sortiert** sind?

Im Gegensatz zu den vorherigen Abschnitten soll nun zu jedem Wort ein Buchstaben***vorrat*** gebildet werden, also eine Zusammenfassung aller Buchstaben, bei der zwar die Reihenfolge keine Rolle spielt, Wiederholungen aber durchaus zulässig sind.
Der Buchstabenvorrat – wie ihn etwa ein Schriftsetzer als Letternvorrat zum Bleisatz des Wortes benötigt oder wie man ihn beim Scrabble-Spiel benötigt – für das Wort MISSISSIPPI ist folgender: I I I I M P P S S S S.

Es erhebt sich die Frage, wie viele mögliche Buchstabenvorräte mit k Buchstaben man aus einem Sortiment von n verschiedenen Buchstaben bilden kann. Dazu müssen natürlich alle in genügender Anzahl, also mindestens jeweils k Stück, vorhanden sein, denn es könnte ja die gesamte Stichprobe von k Stück von einer einzigen Sorte sein.
Wir wollen ein Beispiel für n = 26 und k = 2 betrachten:

AA, AB, AC,...,AZ; BB, BC, ...BZ; CC,... .... YZ; ZZ.

Mit A beginnen 26, mit B noch 25, mit C noch 24, ... und schließlich mit Z noch 1.

Damit haben wir also 26 + 25 + 24 + ... + 1 = $\frac{26 \cdot (26+1)}{2} = \binom{27}{2}$ = 351 Auswahlen.

Das ist die Summe der ersten Zahlen bis 26, die nach der Summenformel generell mit n*(n+1) /2 zu berechnen ist. $\frac{26 \cdot (26+1)}{2} = \binom{27}{2}$

31.5.4.6 Prototypisches Beispiel

3 Päckchen Zigaretten aus dem Zigarettenautomat
Aus einem prall gefüllten Zigarettenautomat mit 15 Fächern kann man 15 verschiedene Zigarettensorten auswählen. Sie erhalten den Auftrag, 3 Päckchen Zigaretten zu besorgen, wobei es egal ist, um was es sich dabei handelt, da es dem Raucher nur um Nikotin geht.
Wieviele mögliche Zusammensetzungen von unterschiedlichen 3 Zigarettenpäckchen gibt es.

Wichtig:
- Für jede Ziehung stehen alle Zigarettensorten zur Verfügung. D.h. sie können mehrmals dieselbe Marke ziehen (mit Wiederholung).
- Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Zigarettenpäckchen gezogen werden (Reihenfolge irrelevant).

N = 15 Zigarettensorten
k = 3 Zigarettenpäckchen
A = (N+k-1)!/((N-1)!*k!)
A = (15+3-1)!/((15-1)!*3!)
A = 680 mögliche unterschiedliche 3 Zigarettenpäckchenkombinationen

Es sollen aus den Zahlen 1,2,3,...,n jeweils k Zahlen ausgewählt werden. Da die Reihenfolge keine Rolle spielt, können wir annehmen, dass die Elemente monoton steigend geordnet sind. Wählt man z.B. n=5 und k = 3, so ist 223 eine mögliche Wahl.

31.5.4.7 Erste Herleitung

Mit Hilfe der **Kugel-Trennstrich-Methode** führen wir diesen Fall auf einen bereits gelösten zurück. Dazu soll das obige Beispiel mit den n=5 Ziffern, die zu jeweils k=3 Ziffern gruppiert werden als Anschauung dienen.
Wir erzeugen eine Box mit n Fächern. Die Fächer seien so groß, dass sie auch mehrere Kugeln aufnehmen können. Dann kann man die Kombination 111 interpretieren als: drei Kugeln in das erste Fach, oder 133 als eine Kugel in das erste Fach, zwei Kugeln in das dritte Fach. Betrachtet man jetzt die Trennung zwischen den Fächern (nicht die äußeren Randbegrenzungen) und die Kugeln als eine neue Einheit, dann ergeben sich 3 Kugeln mit 4 Trennelementen. Diese 4 Trennelemente stellen genau n-1 Elemente dar.

Damit haben wir insgesamt 7 Elemente, die beliebig permutiert werden, von denen aber jeweils 3 bzw. 4 nicht unterschieden werden können. Somit haben wir eine Permutation mit Wiederholung, also 7! / 3!*4!

Deshalb erweitern wir nun die k=3 Positionen durch Hinzufügung von Trennzeichen beim Wechsel zur um 1 höheren Zahl um n – 1 Positionen und stellen eine Zahl durch das # Zeichen dar.

Dann erhalten wir für 223 die Darstellung |##|#|| .
(Der vordere Trennstrich bedeutet Übergang von 1 zu 2, in Fach 1 keine Kugel, die nächsten ## bedeuten dann zweimal in Fach 2; dann Übergang zur 3. # ist einmal das Fach 3, und die Trennstriche zum Übergang auf 4 und auf 5 dürfen nicht weggelassen werden.)

Ebenso ist ###|||| = 111, ||||### = 555, ||##||# = 335. Jede ausgewählte Zahl lässt sich also durch Kombination von 3 (im allgemeinen k) # Zeichen und 4 (im allgemeinen n-1) Trennstrichen eindeutig darstellen.

```
111        11 2       11  3      11   4     11    5
###||||    ##|#|||    ##||#||    ##|||#|    ##||||#
           1 22       1 2 3      1 2  4     1 2   5
           #|##|||    #|#|#||    #|#||#|    #|#|||#
                      1  33      1  3 4     1  3  5
                      #||##||    #||#|#|    #||#||#
                                 1   44     1   4 5
                                 #|||##|    #|||#|#
                                            1    55
```

```
                                      #||||##

 222         22 3         22  4        22   5
|###|||     |##|#||      |##||#|      |##|||#
             2 33         2 3 4        2 3  5
            |#|##||      |#|#|#|      |#|#||#
                          2  44        2  4 5
                         |#||##|      |#||#|#
                                       2   55
                                      |#|||##


              333          33 4         33  5
            ||###||      ||##|#|      ||##||#
                           3 44         3 4 5
                         ||#|##|      ||#|#|#
                                        3  55
                                      ||#||##

                            444          44 5
                         |||###|      |||##|#
                                         4 55
                                      |||#|##

                                          555
                                      ||||###
```

Die Aufgabe heißt jetzt: Wähle aus insgesamt k+n-1 Positionen beliebig die Positionen für k Zahlzeichen (#) aus. Diese Anordnungen sind jedoch nichts anderes als Dualketten mit 3 Nullen und 5 – 1 = 4 Einsen, also 7 Elementen. Davon gibt es aber genau

$$\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$$

Die vorstehende Methode läßt sich nun verallgemeinern:

> Die k gleichen Kugeln, dargestellt durch k Nullen, werden durch (n – 1) Trennstriche, dargestellt durch n–1 Einsen, auf die n verschiedenen Schubladen verteilt.

Im allgemeinen Fall, bei dem k gleiche Kugeln in n Schubladen zu verteilen sind, ergibt sich als Anzahl aller möglichen Verteilungen die Zahl aller möglichen Dualketten mit genau k Nullen (das sind die Kugeln) und genau (n – 1) Einsen (Trennstriche). Wir erhalten demnach das folgende Ergebnis:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

31.5.4.8 Zweite Herleitung

Wir werden die Berechnung der ***Anzahl aller ungeordneten k-Auswahlen aus n mit Wiederholungsmöglichkeit*** noch auf eine weitere Weise zeigen, indem wir sie auf eine Auswahl ohne Wiederholung zurückführen.
Es sei M = {1, 2, 3, 4, 5, 6} und wir wollen die Anzahl der sämtlichen 3-Auswahlen aus dieser Menge M mit 6 Elementen bei zugelassener Wiederholung aufschreiben (linke Spalte). Jeder solchen Auswahl ordnen wir eine entsprechende in der zweiten Spalte zu, indem wir die zweite ausgewählte Zahl um 1 und die dritte um 2 erhöhen:

3-Auswahlen aus {1, 2, 3, 4, 5, 6} 8}	***3-Auswahlen aus {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,***
mit Wiederholmöglichkeit:	***ohne Wiederholmöglichkeit:***
x, y, z	***x, y+1, z+2***
1, 1, 1	1, 2, 3
1, 1, 2	1, 2, 4
1, 1, 3	1, 2, 5
1, 1, 4	1, 2, 6
1, 1, 5	1, 2, 7
1, 1, 6	1, 2, 8
1, 2, 2	1, 3, 4
….	….
x, y, z	x, y+1, z+2
…	….
4, 6, 6	4, 7, 8
5, 6, 6	5, 7, 8
6, 6, 6	6, 7, 8

Man erkennt an dieser Aufstellung – und kann sich leicht allgemein klar machen:

- Zu jeder 3-Auswahl x, y, z aus den 6 Elementen ***mit*** möglicher Wiederholung in der linken Spalte gibt es eindeutig eine ungeordnete 3-Auswahl ***ohne*** Wiederholung (also eine Teilmenge) aus den 8 Elementen in der rechten Spalte und umgekehrt.

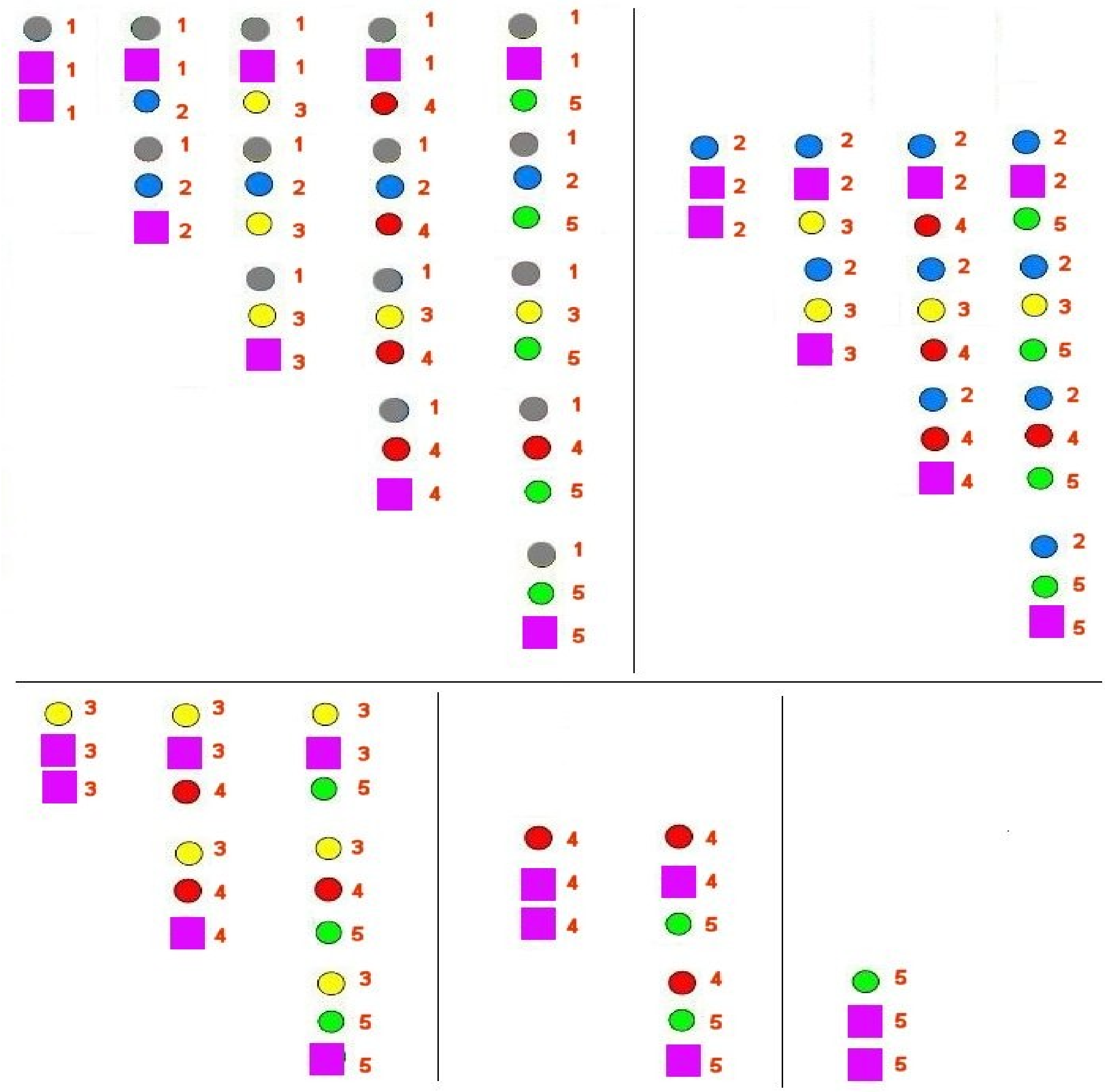
Ist nämlich irgendeine Teilmenge aus der rechten Spalte vorgegeben, z. B. 3, 5, 8, so kann man dazu eindeutig die zugehörige Auswahl der linken Spalte rekonstruieren, nämlich 3, 4, 6.
Daher gibt es genau so viele ungeordnete 3-Auswahlen aus 6 Elementen *mit* Wiederholung wie es 3-Teilmengen (d. h. ungeordnete 3-Auswahlen *ohne* Wiederholung) aus 8 Elementen gibt, nämlich $\binom{8}{3}$

Wählt man aus 6 Elementen jeweils 4 aus, erhält man mit der Formel „mit Wiederholung" den Wert $\binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4}$

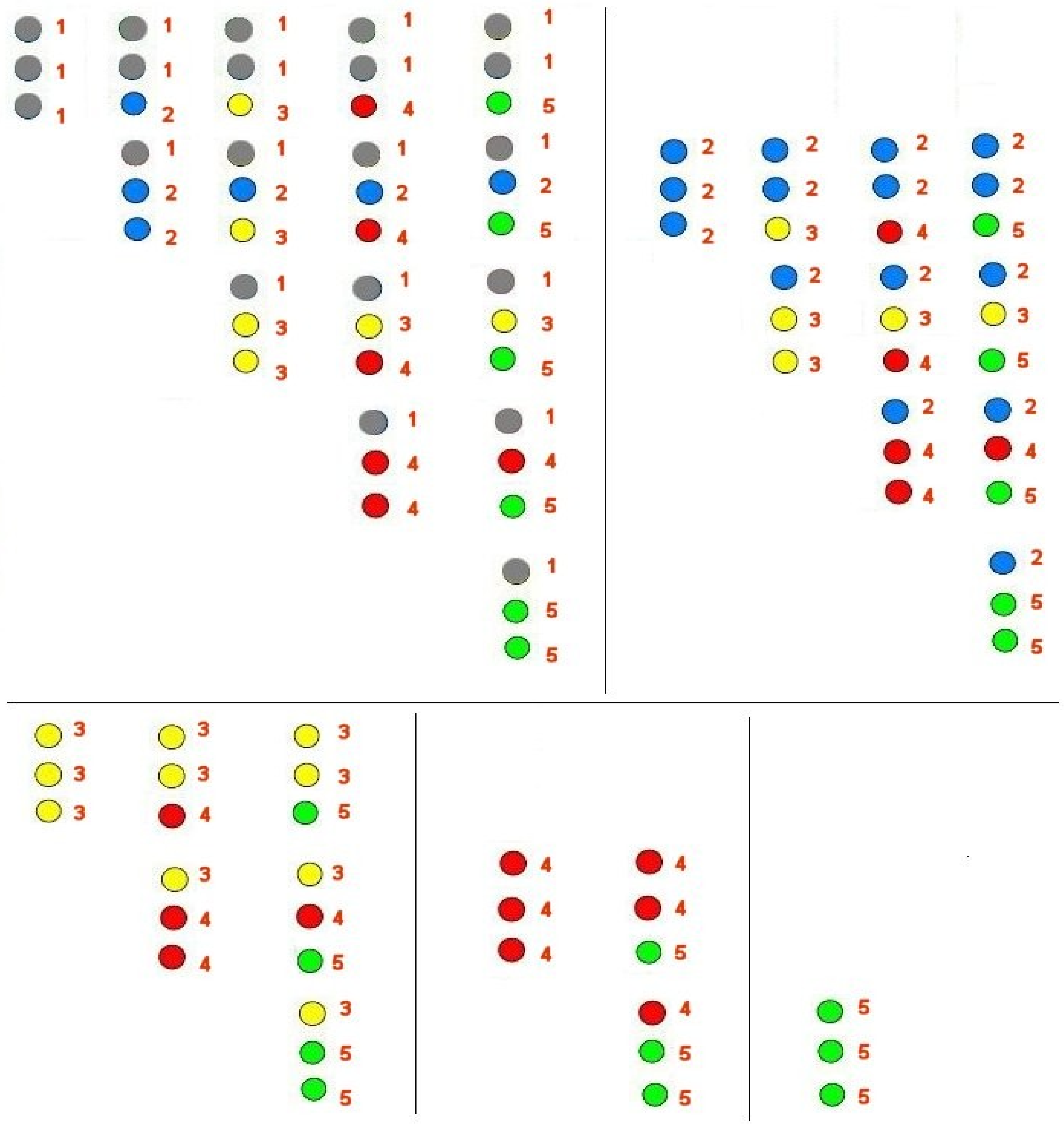
Für eine Auswahl von 4 Elementen aus 6 vorhandenen benötigt man (n–1) = 5 Trennstriche, also insgesamt 9 Elemente (4 Zahlen und 5 Trennstriche), was zu der Formel „ohne Wiederholung" führt: $\binom{9}{4}$

31.5.4.9 Dritte Herleitung

Um das Problem zu lösen, führen wir einen neuen Begriff ein: Den Begriff
Duplikator des Vorgängerobjekts für den Platz k.
Dazu beachten wir, dass die gegebenen m unterscheidbaren Objekte in der Urne, aus welcher ausgewählt werden soll, immer mit Nummern versehen gedacht werden können. Und dass zu jeder Auswahl von k Objekten aus den m Objekten dann eindeutig bezüglich der Objektnummern eine Rangliste existiert.
Eine beliebige Auswahl kann so immer unzweideutig als Rangliste interpretiert werden. In dieser Rangliste existieren dann k Plätze, auf denen die Objekte ihren Nummern nach angeordnet gedacht werden können. Durch die Wiederholungen kann es dann passieren, dass auch einmal alles Objekte mit derselben Nummer ausgewählt werden. Wiederholte Objekte wollen wir uns hier immer als Duplikate eines Originals vorstellen. Das ändert die Anzahl der Möglichkeiten nicht. Man stellt aber fest, dass bei jeder möglichen Auswahl immer mindestens ein Originalobjekt dabei ist. Duplikate kann es damit höchstens k − 1 Stück geben.
In den Ranglisten sind dann die Duplikate der gleichen Nummer nach dem Originalobjekt angeordnet, denn dieses Originalobjekt kann man sich zuerst gezogen denken, bevor Duplikate nachgeliefert werden.



Statt der Duplikate denken wir uns nun Geräte, Objekte quasi mit dem Namen ”Duplikator“, welche die Duplikate aus dem Vorgängerobjekt erzeugen. Diese Erzeugung ist eindeutig. Statt einem duplizierten Element auf Platz Nummer j kann man daher auch den zu dieser Platznummer j gehörenden Duplikator d_j ausgewählt denken. Dieser dupliziert das Objekt vom davor liegenden Platz mit der Nummer j−1 und überlässt ihm anschließend den eigenen Platz mit der Nummer j. Dieser Duplikationsprozeß ist eineindeutig. Man kann aus dem Duplikat und seiner Nummer in der Rangliste auch wieder den Duplikator zurückgewinnen. Damit haben wir das Problem, aus m Objekten in der Urne und den Duplikatoren für die Plätze 2, 3, . . . , k für unsere Rangliste k Objekte auszuwählen, wobei dann zuerst die Duplikatoren auf ihre Plätze der Rangliste gesetzt werden und anschließend die Objekte der Größe ihrer Nummern oder Ränge nach. Damit ist die Rangliste perfekt.



So haben wir das Problem, eine Auswahl von k Elementen aus m Objekten plus k − 1 Duplikatoren zu treffen. Wir wählen also aus m + k – 1 Elementen k Elemente aus und erhalten damit

$$\binom{n+k-1}{k}$$

31.5.4.10 Vierte Herleitung

Beim Bäcker gibt es 4 Sorten Kuchen: Streusel-, Bienenstich-, Kirsch- und Pflaumenkuchen. Wieviel Kuchenpakete aus 6 Stücken gibt es?
Wir nehmen eine zulässige Lösung her z.B. BBKPPS und hängen daran nochmals alle vier Sorten BKPS an und sortieren nach gleichen Kuchensorten also BBBKKPPPSS anschließend werden die unterschiedlichen Kuchensorten durch senkrechte Striche voneinander abgetrennt.
Die Anzahl der gesuchten Kuchenpakete ist genauso groß wie die Anzahl der Möglichkeiten die 3 senkrechten Striche auf die 6+4-1 Zwischenräume zwischen den einzelnen Kuchenstücken aufzuteilen.

<table>
<tr><td>B|B|B|K K P P P S S</td><td></td><td>B B|B|K|K P P P S S</td><td></td><td>B B B|K|K|P P P S S</td><td></td></tr>
<tr><td>B|B|B K|K P P P S S</td><td></td><td>B B|B|K K|P P P S S</td><td></td><td>B B B|K|K P|P P S S</td><td></td></tr>
<tr><td>B|B|B K K|P P P S S</td><td></td><td>B B|B|K K P|P P S S</td><td></td><td>B B B|K|K P P|P S S</td><td></td></tr>
<tr><td>B|B|B K K P|P P S S</td><td></td><td>B B|B|K K P P|P S S</td><td></td><td>B B B|K|K P P P|S S</td><td></td></tr>
<tr><td>B|B|B K K P P|P S S</td><td></td><td>B B|B|K K P P P|S S</td><td></td><td>B B B|K|K P P P S|S</td><td>5</td></tr>
<tr><td>B|B|B K K P P P|S S</td><td></td><td>B B|B K|K|P P P S|S</td><td>6</td><td>B B B|K K|P|P P S S</td><td></td></tr>
<tr><td>B|B|B K K P P P S|S</td><td>7</td><td>B B|B K|K|P P P S S</td><td></td><td>B B B|K K|P P|P S S</td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B|K|K P P P S S</td><td></td><td>B B|B K|K P|P P S S</td><td></td><td>B B B|K K|P P P|S S</td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B|K K|P P P S S</td><td></td><td>B B|B K|K P P|P S S</td><td></td><td>B B B|K K|P P P S|S</td><td>4</td></tr>
<tr><td>B|B B|K K P|P P S S</td><td></td><td>B B|B K|K P P P|S S</td><td></td><td>B B B|K K P|P|P S S</td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B|K K P P|P S S</td><td></td><td>B B|B K|K P P P S|S</td><td>5</td><td>B B B|K K P|P P|S S</td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B|K K P P P|S S</td><td></td><td>B B|B K K|P|P P S S</td><td></td><td>B B B|K K P|P P S|S</td><td>3</td></tr>
<tr><td>B|B B|K K P P P S|S</td><td>6</td><td>B B|B K K|P P|P S S</td><td></td><td>B B B|K K P P|P|S S</td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B K|K|P P P S S</td><td></td><td>B B|B K K|P P P|S S</td><td></td><td>B B B|K K P P|P S|S</td><td>2</td></tr>
<tr><td>B|B B K|K P|P P S S</td><td></td><td>B B|B K K|P P P S|S</td><td>4</td><td>B B B|K K P P P|S|S</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B|B B K|K P P|P S S</td><td></td><td>B B|B K K P|P|P S S</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B K|K P P P|S S</td><td></td><td>B B|B K K P|P P|S S</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B K|K P P P S|S</td><td>5</td><td>B B|B K K P|P P S|S</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B K K|P|P P S S</td><td></td><td>B B|B K K P P|P|S S</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B K K|P P|P S S</td><td></td><td>B B|B K K P P|P S|S</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B K K|P P P|S S</td><td></td><td>B B B K K P P P|S|S</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B K K|P P P S|S</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B K K P|P|P S S</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B K K P|P P|S S</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B K K P|P P S|S</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B K K P P|P|S S</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B K K P P|P S|S</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B|B B K K P P P|S|S</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Summe 1 bis 7 = 28</td><td colspan="2">Summe 1 bis 6 = 21</td><td colspan="2">Summe 1 bis 5 = 15</td></tr>
<tr><td colspan="2">7 x 8 / 2 = 28</td><td colspan="2">6 x 7 / 2 = 21</td><td colspan="2">5 x 6 / 2 = 15</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>B B B K|K|P|P P S S</td><td></td><td>B B B K K|P|P|P S S</td><td></td><td>B B B K K P|P|P|S S</td><td></td></tr>
<tr><td>B B B K|K|P P|P S S</td><td></td><td>B B B K K|P|P P|S S</td><td></td><td>B B B K K P|P|P S|S</td><td>2</td></tr>
<tr><td>B B B K|K|P P P|S S</td><td></td><td>B B B K K|P|P P S|S</td><td>3</td><td>B B B K K P|P P|S|S</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B B B K|K|P P P S|S</td><td>4</td><td>B B B K K|P P|P|S S</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B B B K|K P|P|P S S</td><td></td><td>B B B K K|P P|P S|S</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B B B K|K P|P P|S S</td><td></td><td>B B B K K|P P P|S|S</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B B B K|K P|P P S|S</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B B B K|K P P|P|S S</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B B B K|K P P|P S|S</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B B B K|K P P P|S|S</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Summe 1 bis 4 = 10</td><td colspan="2">Summe 1 bis 3 = 6</td><td colspan="2">Summe 1 bis 2 = 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">4 x 5 / 2 = 10</td><td colspan="2">3 x 4 / 2 = 6</td><td colspan="2">2 x 3 / 2 = 3</td></tr>
</table>

B B B K K P P|P|S|S	1
Summe 1 bis 1 = 1	
1 x 2 / 2 = 1	

Damit ergeben sich als Gesamtzahl der Möglichkeiten 4 Elemente in 6-er Gruppen zu packen: 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84

$$\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = 84$$

31.6. Zusammenstellung Kombinatorikformeln

Anordnung von k Elementen aus einer Menge von n Elementen	**Ohne Wiederholung**	**Mit Wiederholung**
Ziehen von k Kugeln aus einer Menge von n Kugeln	**Ohne Zurücklegen**	**Mit Zurücklegen**
Es sollen n verschiedenen Zellen mit k Elementen belegt werden.	**in jede Zelle höchsten 1**	**in jede Zelle beliebig viele**

Mit Beachtung der Reihenfolge	**Geordnete Sequenz** **ohne Wiederholung** der Länge *k* aus *n* Elementen.	**Geordnete Sequenz** **mit Wiederholung** der Länge *k* aus *n* Elementen.
unterscheidbar	Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen vom Umfang k aus n Elementen.	Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen vom Umfang k aus n Elementen.
	Variation **ohne Wiederholung.**	**Variation** **mit Wiederholung.**
	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

Ohne Beachtung der Reihenfolge	**Ungeordnete Sequenz** **ohne Wiederholung** der Länge *k* aus *n* Elementen.	**Ungeordnete Sequenz** **mit Wiederholung** der Länge *k* aus *n* Elementen.
ununterscheidbar	Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen vom Umfang k aus n Elementen.	Ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen vom Umfang k aus n Elementen.
	Kombination **ohne Wiederholung.**	**Kombination** **mit Wiederholung.**
	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

Die Umsetzungen der einzelnen Modelle der Kombinatorik auf die jeweiligen Formeln gibt folgendes Bild:

31.6.1. Aus einer Menge mit n Elementen werden k ausgewählt.

		Berücksichtigung der Reihenfolge mit	Berücksichtigung der Reihenfolge ohne
Wiederholung:	mit	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$
	ohne	$\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)$	$\binom{n}{k}$

Mit Wiederholung: Jedes Element kann mehrfach vorkommen.
Ohne Wiederholung: Jedes Element kann höchstens einmal vorkommen.

31.6.2. Aus n verschiedenen Kugeln wird k–mal eine Kugel gezogen

		Berücksichtigung der Reihenfolge mit (Urliste)	Berücksichtigung der Reihenfolge ohne (Strichliste)
Zurücklegen:	mit	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$
	ohne	$\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)$	$\binom{n}{k}$

Mit Zurücklegen: Die Kugel wird vor dem nächsten Zug in die Urne zurückgelegt.

31.6.3. k Kugeln werden auf n Urnen verteilt

		Die Kugeln sind alle verschieden	Die Kugeln sind alle gleich
Kugeln je Urne	bis zu k	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$
	höchstens eine	$\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)$	$\binom{n}{k}$

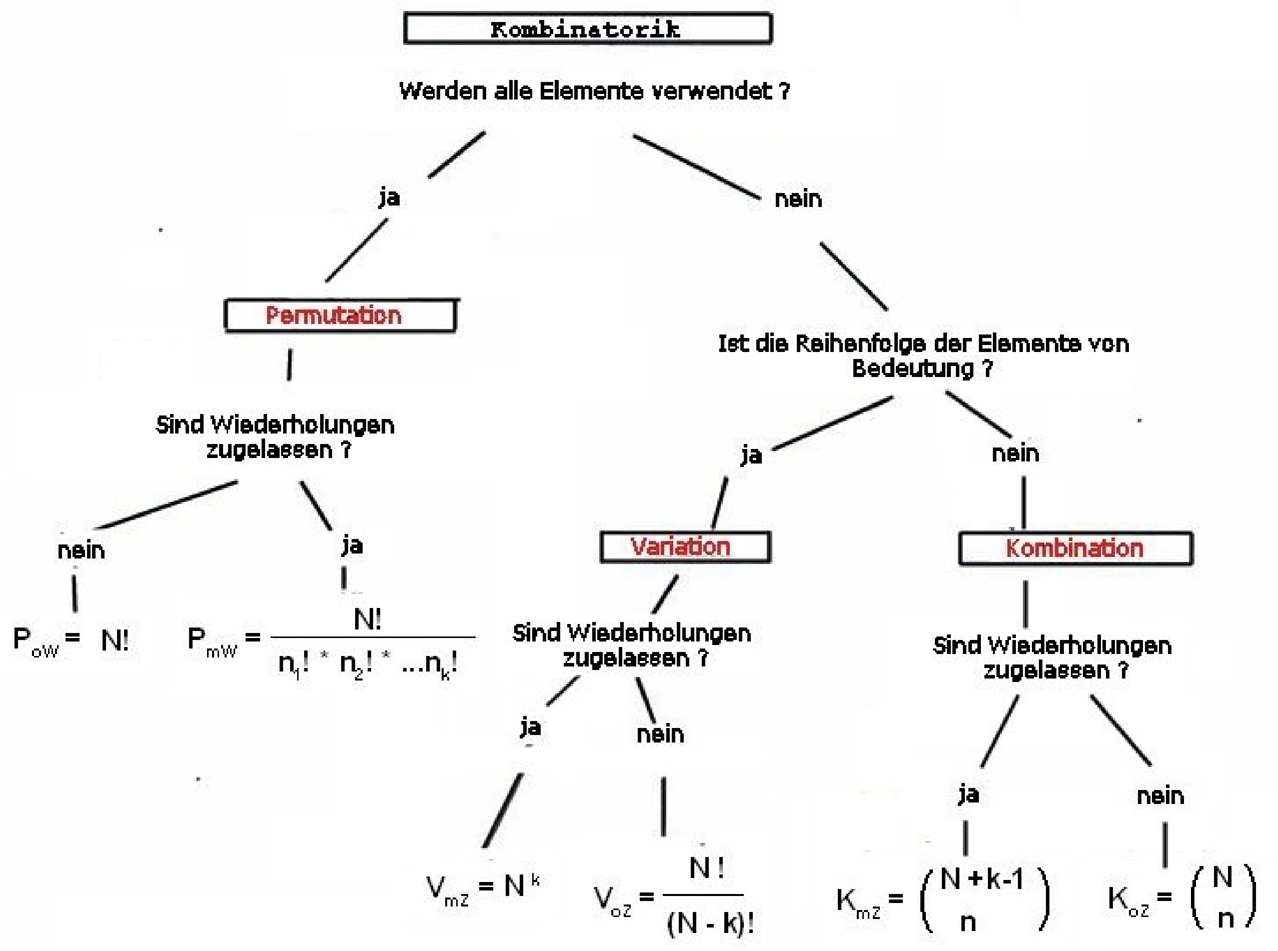
Statt nach „Die Kugeln sind alle verschieden/gleich“ kann man hier auch nach einer Entscheidungsfrage klassifizieren:

- In welche Urne soll die Kugel?
- Soll noch eine Kugel in die Urne?

31.6.4. Aus Alphabet mit n Zeichen werden Wörter der Länge k gebildet

		Berücksichtigung der Reihenfolge mit	ohne
Jedes Zeichen kann vorkommen	bis zu k mal	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$
	höchstens einmal	$\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)$	$\binom{n}{k}$

Der Entscheidungsbaum



(1) Werden alle Elemente verwendet ?

ja Permutation

(2) mit Wiederholungen

ja P_{mW}

nein P_{oW}

(2) nein Spielt die Reihenfolge eine Rolle

ja Variationen

(3) mit Wiederholungen

ja V_{mW}

nein V_{oW}

nein Kombination

(3) mit Wiederholungen

ja K_{mW}

nein K_{oW}

Wir die Reihenfolge berücksichtigt ?

- ja — Werden alle Elemente verwendet ?
  - ja — Permutation mit Wiederholungen
    - ja — P_{mW}
    - nein — P_{oW}
  - nein — Spielt die Reihenfolge eine Rolle
    - ja — Variationen mit Wiederholungen
      - ja — V_{mW}
      - nein — V_{oW}
- nein — mit Wiederholungen
  - ja — K_{mW}
  - nein — K_{oW}

Reihenfolge der ausgewählten Elemente

	beachten		nicht beachten
	alle Elemente auswählen	k Auswahl der Elemente	
nur einmal	Permutation ohne Wiederholung	Variation ohne Wiederholung	Kombination ohne Wiederholung
ein einzelnes Element			
mehrmals	Permutation mit Wiederholung	Variation mit Wiederholung	Kombination mit Wiederholung

1. Beispiel:
Auf wie viele Arten können sich 3 Personen auf 3 Stühle verteilen?
Lösung: Klärung der Fragen 1. - 4.?

	die Kugeln entsprechen den 3 Personen	$n = 3$	
1	die 3 Stühle entsprechen 3 Ziehungen	ja; $k = 3$	P
2	da sich eine Person nur auf einen Stuhl setzen kann, kann eine Kugel nicht zweimal gezogen werden	ohne Zurücklegen	P_{oW}
3			

Permutation
Damit kennt man die Anzahl der Möglichkeiten, nämlich $n! = 3! = 6$.

2. Beispiel:
Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es bei einem 4-fachen Würfelwurf?

	die Kugeln entsprechen den 6 Augenzahlen	$n = 6$	
1	es sind 4 Würfe	$k = 4$	V/K
2	es ist entscheidend in welcher Reihenfolge die Augenzahlen kommen	mit Reihenfolge	V
3	die Augenzahlen können sich wiederholen	mit Zurücklegen	V_{mW}

Variation mit Wiederholung – k-Tupel aus einer n-Menge
Damit kennt man die Anzahl der Möglichkeiten, nämlich $n^k = 6^4 = 1296$

3. Beispiel:
Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es bei einem 3-fachen Würfelwurf , wenn alle Augenzahlen verschieden sind?

	die Kugeln entsprechen den 6 Augenzahlen	$n = 6$	
1	es sind 3 Würfe	$k = 4$	V/K
2	es ist entscheidend in welcher Reihenfolge die Augenzahlen kommen	mit Reihenfolge	V
3	die Augenzahlen können sich nicht wiederholen	ohne Zurücklegen	V_{oW}

Variation ohne Wiederholung – k-Permutation aus einer n-Menge
Damit ergeben sich die Möglichkeiten zu: $n! / (n-k)! = 6!/(6-3)! = 120$

4. Beispiel:
Wie viele 4-stellige Zahlen haben genau 2 mal die Ziffer 2?

	die Kugeln entsprechen den 4 Stellen	n = 4	
1	die Ziffer 2 soll an zwei Stellen sein	k = 2	V/K
2	wo die 2-en auftreten ist uninteressant	ohne Reihenfolge	K
3	Jede Stelle kommt genau einmal vor	ohne Zurücklegen	K_{oW}

Kombination ohne Reihenfolge – k-Teilmenge aus einer n-Menge
Damit ergibt sich als Lösung: n! / (n-k)!k! = 4! / 2!2! = 6

5. Beispiel:

An einer Feier nehmen 20 Personen teil. Plötzlich geht das Bier aus. Um hinreichenden Nachschub zu besorgen, werden 3 Leute ausgewählt, weil 3 Personen notwendig sind, um das neue Fass zu transportieren. Wieviele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, 3 Leute zum Bierholen zu schicken ?

	die Personen entsprechen den 20 Stellen	n = 4	
1	3 Personen sollen ausgewählt werden	k = 2	V/K
2	In welcher Reihenfolge die Personen ausgewählt werden ist irrelevant	ohne Reihenfolge	K
3	Keine Wiederholung, eine Person kann nicht zweimal ausgewählt werden	ohne Zurücklegen	K_{oW}

Kombination ohne Reihenfolge – k-Teilmenge aus einer n-Menge
Anzahl der Kombinationen 1140

6. Beispiel

Sie stehen an der Kasse und müssen genau 4.50 Euro bezahlen. In ihrem Geldbeutel befinden sich drei 1-Euromünzen und drei 50 Pence- Münzen. Sie nehmen die Münzen nacheinander heraus und legen sie vor der Kasse ab. Wieviele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, die Münzen der Reihe nach anzuordnen ?

	Die Anzahl der Münzen ist n	n = 6	
1	Es werden alle Münzen benötigt	k = 6	P
2	Da Permutation ein Spezialfall der Variation ist, kann hier „mit Reihenfolge“ argumentiert werden,	mit Reihenfolge	
3	Mehrere der benutzten Münzen sind gleich; jeweils 3	mit Wiederholung	P_{mW}

Permutation mit Wiederholung

Anzahl der Möglichkeiten, n! /k1!k2! = 6!/3!3! = 20.
7. Beispiel

Sie gehen mit 3 Mitschülern in ein Bistro. Dort stehen 5 verschiedene Menüs zur Auswahl. Während sich die Mitschüler bereits auf die Plätze setzen, erhalten Sie den Auftrag, für sich und für die 3 Mitschüler jeweils irgendein Essen zu besorgen, weil es sich in allen Fällen um die Spezies "Allesfresser" handelt und jedem egal ist, was er ißt. Wieviele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es insgesamt, die Menü's auszuwählen.

	Die Anzahl der Menüs ist n	n = 5	
1	Die Anzahl der benötigten Essen ist	k = 4	V/K
2	Die Reihenfolge der Essen ist uninteressant, weil sowieso noch nicht klar ist, wer welches Essen bekommt.	ohne Reihenfolge	K
3	Es können mehrere Essen gleichzeitig ausgewählt werden.	mit Wiederholung	K_{mW}

Kombination mit Wiederholung – k-Kombination aus einer n-Menge

Die Anzahl der Möglichkeiten $\binom{5+4-1}{4} = \binom{8}{4} = 8*7*6*5/1*2*3*4 = 2*7*5 = 70$

8. Beispiel

Sie wollen 3 Wochen Urlaub machen und zwar jede Woche in einem anderen Land. Sie haben sich entschieden, ihren Urlaub im Reisebüro X zu buchen und erhalten dort die Auskunft, Sie könnten jederzeit in 25 Ländern Urlaub machen, müßten sich dann aber festlegen. Wieviele Möglichkeiten es gibt, Ihren Urlaub in drei Ländern zu buchen.
Eine der Möglichkeiten wäre etwa: Zuerst nach Spanien, dann nach Frankreich und zuletzt nach Italien.

	Anzahl der Ferienländer	n = 25	
1	Anzahl der Urlaubswochen	k = 3	V/K
2	Die Frage „wieviele Möglichkeiten gibt es, den Urlaub zu buchen“ beutet, dass die Reihenfolge beachtet werden muss. Wäre die Frage „wieviele Möglichkeiten gibt es drei Länder zu bereisen“, ist die Reihenfolge uninteressant	mit Reihenfolge	V
3	Man möchte natürlich in kein Land zweimal	ohne Wiederholung	V_{oW}

Variation ohne Wiederholung – k-Permutation aus einer n-Menge
Anzahl der Kombinationen n! / (n-k)! = 25! / 22! = 25 * 24 * 23 = 13800

9. Beispiel

Ein Entwicklungspsychologe will herausfinden, ob ein Kind den Größenbegriff versteht. Dazu legt er dem Kind nach Zufall 6 unterschiedlich große Figuren vor und fordert es auf: "Stell die Figuren auf den Tisch und ordne Sie nach ihrer Höhe!" Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Figuren der Höhe nach in eine Reihenfolge zu bringen ?

	Anzahl der Figuren	n = 6	
1	Anzahl der Objekte	k = 6	P
2	Da Permutation ein Spezialfall der Variation ist, kann hier „mit Reihenfolge“ argumentiert werden,	mit Reihenfolge	P
3	Keine Figur kann zweimal benutzt werden	ohne Wiederholung	P_{oW}

Permutation ohne Wiederholung
Anzahl der Möglichkeiten, n! = 6! = 720.

10. Beispiel

Sie haben in einem Kaufhaus 8 verschiedene Kleidungsstücke für jeweils 50 DM ausgesucht, können aber nur 5 bezahlen. Sie entscheiden sich deshalb dafür, 3 Kleidungsstücke nicht zu kaufen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die 3 Kleidungsstücke auszusortieren?

	Anzahl der Kleidungsstücke	n = 8	
1	Anzahl der Objekte	k = 3	V/K
2	Die Reihenfolge des Zurücklegens ist uninteressant	ohne Reihenfolge	K
3	Kein Kleidungsstück kann zweimal zurückgelegt werden	ohne Wiederholung	K_{oW}

Kombination ohne Wiederholung – k-Teilmenge aus einer n-Menge
Anzahl der Kombinationen n!/(n-k)!k! = 8!/5!3! = 8*7*6 / 1*2*3 = 8*7 = 56

11. Beispiel
Eine Prüfung bestehe aus 10 Multiple-Choice-Aufgaben mit jeweils 5 Alternativen. Wieviele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, die Alternativen aller Aufgaben anzukreuzen ?

Klarstellung: Stellen Sie sich vor, die Spalten in einem Statistikprogramm repräsentierten die Aufgaben. In den Zeilen stehen die Alternativen als Daten. Wieviele mögliche unterschiedliche Zeilen gibt es?

	Anzahl der Auswahlen ist n (gleichgültig, wieviele Fragen ich habe, sind immer 5 Möglichkeiten vorhanden)	n = 5	
1	Anzahl der Fragen (wie oft habe ich die Chance diese 5 Möglichkeiten anzukreuzen)	k = 10	V/K
2	Das Ankreuzen 1.Frage 1, 2. Frage 2 ist was anderes wie 1. Frage 2 und 2. Frage 1	mit Reihenfolge	V
3	Ich kann die Position1 mehrfach ankreuzen (da k größer n, geht das nur „mit Wiederholung“)	mit Wiederholung	V_{mW}

Variation mit Wiederholung – k-Tupel aus einer n-Menge
Damit kennt man die Anzahl der Möglichkeiten, nämlich $n^k = 5^{10} = 9765625$