

28. Vektorrechnung

28.1. Grundlagen

Insbesondere in der Physik hat man zwischen zwei verschiedenen Größen zu unterscheiden, sogenannte skalare Größen, die durch ihren Zahlenwert bereits ausreichend beschrieben werden und Größen, die außer ihrem Zahlenwert noch eine Richtung besitzen, um eindeutig bestimmt zu werden. Zur ersten Gruppe gehören solche Größen wie Temperatur, Masse oder Volumen. Zur zweiten Gruppe gehören Größen wie Kraft, Lichtstrahlen, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Die Erdbeschleunigung ist nicht nur eine Zahl von $9,81 \text{ m/s}^2$, sondern auch immer „nach unten“ gerichtet. Solche Größen, die außer einer Maßzahl auch noch eine Richtung besitzen nennt man Vektoren.

Deshalb kann man für Vektoren auch den Begriff „gerichtete Größe“ verwenden. Aus diesen Gründen haben Vektoren zunächst nur eine Länge (=Maßzahl) und eine Richtung. Die Länge bezeichnet man auch als den Betrag des Vektors. Nun stellt sich die Frage, wie gibt man denn eine Richtung des Vektors an. Die Bezeichnung „von links oben nach rechts unten“ oder „ziemlich flach“ sind da offensichtlich nicht ausreichend.

Deshalb hat sich für die Angabe der Richtung die Benutzung eines Koordinatensystems bewährt. Nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der Physik ist die Benutzung von Koordinatensystemen nichts außergewöhnliches. In der Physik spielen hauptsächlich 3-dimensionale Koordinatensysteme eine Rolle, in der Mathematik für das Zeichnen in Ebenen auch 2-dimensionale. Die Koordinatenachsen bezeichnet man mit x, y, z oder x_1, x_2 und x_3 und für die Richtung eines Vektors gibt man für jede Koordinatenachse eine Maßzahl an, in die der Vektor in Richtung dieser Achse zeigen soll. Wenn man dann für jede Achse eine Maßzahl angibt, ist die Richtung innerhalb einer zweidimensionalen oder dreidimensionalen Umgebung eindeutig festgelegt.

Vektoren können durch 2- oder 3- elementige Zahlentupel angegeben werden, aber auch einfach nur durch eine Strecke mit einer Pfeilspitze an einem Ende der Strecke.

Vektoren werden im allgemeinen durch einen Kleinbuchstaben mit einem Pfeil darüber gekennzeichnet.

(Vektoren werden im folgenden in den Zeichnungen auch in Fetter Fraktur-Schreibweise wiedergegeben: ***a, b, c***)

Zahlentupel werden in Klammern geschrieben und zwischen den einzelnen Maßzahlen für die jeweilige Achsen eine Trennung durch ; / oder | eingeführt: (2,2 | -2,1 | 5).

Keinesfalls eine Trennung durch . oder , da das zu Verwechslungen mit Dezimalzahlen führen kann. Außerdem hat sich für die Koordinatenschreibweise von Vektoren noch die Spaltenschreibweise durchgesetzt bei der jede Komponente in einer eigenen Zeile steht und der Vektor als Ganzes mit einer Klammer verbunden wird.

28.2. Geometrische Deutung von Vektoren

Aus der allgemeinen Geometrie und der Funktionsdarstellung sind Koordinatenebenen und Koordinatenachsen gut bekannt. Die Koordinatenachsen haben es bisher ermöglicht Punkte in einer Ebene eindeutig zu identifizieren: Zu einem x -Wert gehört eindeutig ein y -Wert und diese $(x|y)$ Paar stellt einen Punkt im Koordinatensystem dar, durch das z.B. die Kurve verläuft. Damit stellt die Koordinatenebene eine Menge aller zweistelligen Zahlentupel dar: $(x | y)$

Analoges gilt natürlich für eine dreidimensionale Umgebung in der alle dreistelligen Zahlentupel $(x|y|z)$ dargestellt werden können. Dabei ist wichtig, dass gleiche Zahlenkombinationen immer wieder zu dem gleichen Punkt führen.

28.2.1. Zwei- und dreikomponentige Vektoren

Man könnte irgendeinen Punkt der Zeichenebene wählen und von diesem aus soweit in die x -Richtung gehen, wie die erste Komponente eines Vektors angibt, und soweit in die y -Richtung, wie die zweite Komponente angibt. Im nebenstehenden Beispiel heißt das: "5 nach rechts in x Richtung, 3 nach oben in y Richtung gehen". Den Ausgangspunkt nennen wir Schaft, den Zielpunkt Spitze. Da der Ausgangspunkt beliebig ist, stellt das Zahlenpaar $(5, 3)$ jeden Pfeil dar, der auf diese Weise entsteht. In der Skizze rechts sind zwei solcher Pfeile für verschiedene Ausgangspunkte eingezeichnet. Jeder der beiden Pfeile wird durch den selben Vektor dargestellt.

Auf diese Weise kann jeder zweikomponentige Vektor durch Pfeile dargestellt werden. Ist eine seiner Komponenten negativ, so wird vom Schaft in die entgegengesetzte Richtung (nach links bzw. nach unten) gegangen, ist eine Komponente 0, wird der entsprechende Zug ausgelassen. Da die zweikomponentigen Vektoren so schön in die Zeichenebene passen, nennt man sie auch ebene Vektoren.

Wichtig ist, dass ein Vektor nicht nur einem Pfeil entspricht, sondern vielen. Ein Pfeil in der Zeichenebene ist durch drei Dinge eindeutig bestimmt:

- ➔ seinen Ausgangspunkt (Schaft),
 - ➔ die Richtung, in die er zeigt,
 - ➔ und seine Länge.
-
- ➔ Alle Pfeile, die einen gegebenen Vektor darstellen, zeigen in die selbe Richtung und sind gleich lang.
 - ➔ Sie unterscheiden sich nur durch den Ort ihres Schafts.

In der Praxis wird oft auf einen konkreten Pfeil gezeigt und dieser wird Vektor genannt. Genau genommen ist das eine schlampige Bezeichnung. In Wahrheit ist das nur eine Möglichkeit für einen Vektor, der an genau diesem Schaft festgemacht ist, dabei können gleiche Vektoren an beliebigen Schäften festgemacht werden. Manchmal wird das so ausgedrückt, dass ein Pfeil ein *Repräsentant* für einen Vektor (nicht aber mit diesem identisch) ist.

Analoges gilt natürlich auch für dreikomponentige Vektoren.

Aus den hier genannten Gründen gibt es für Vektoren wesentlich wichtigere Unterscheidungsmerkmale. Dabei unterscheidet man die Vektoren nach ihrem Fußpunkt und zwar in der Weise, ob der Fußpunkt genau der Koordinatenursprung oder eine beliebiger Punkt in der Koordinatenebene ist.

28.2.2. Ortsvektoren

Da die Lage eines Punktes in der Zeichenebene durch ein Zahlenpaar (seine Koordinaten) bestimmt ist, und da ein zweikomponentiger Vektor ebenfalls ein Zahlenpaar ist, kann man Komponenten mit Koordinaten und daher Vektoren mit Punkten identifizieren: Dem Punkt $A(a_1, a_2)$ entspricht der Vektor $A = (a_1, a_2)$ und umgekehrt. Vektoren mit dieser Eigenschaft, einen Punkt des Vektorraumes zu kennzeichnen, heißen Ortsvektoren (da sie einen Ort angeben).

Ortsvektoren sind also dadurch gekennzeichnet, dass ihr Fußpunkt **immer** der Ursprung des Koordinatensystems ist und die Spitze auf einen Punkt des Vektorraumes zeigt.

Solche Vektoren werden durch den Großbuchstaben ihres Punktes: A oder durch den Start- und Endpunkt des Vektors mit OA bezeichnet.

28.2.3. Freie Vektoren

Im Gegensatz zu den Ortsvektoren gibt es die freien Vektoren. Diese Vektoren geben eine Verschiebung oder Verbindung an und lassen sich im gesamten Vektorraum parallel verschieben. Ihr Fußpunkt ist die Spitze eines beliebigen Ortsvektors oder die Spitze eines anderen freien Vektors. Auf diese Weise ist es möglich mehrere Vektoren zu einem Polygonzug zu addieren, so dass am Ende ein resultierender Vektor entsteht.

28.2.4. Nullvektor

Vektorrechnung findet in einem Vektorraum statt und nicht in einem Koordinatensystem. In einem Koordinatensystem gibt es Punkte zur eindeutigen Definition der Positionen innerhalb des Koordinatensystems, im Vektorraum gibt es Ortsvektoren zu den Orten des Vektorraums. Konsequenterweise besitzt damit ein Vektorraum keinen Ursprungspunkt, sondern einen *Nullvektor*, der den Ursprung des Vektorraums kennzeichnet. Man spricht aber auch von einem Nullvektor, wenn das Ende eines Polygonzugs von mehreren Vektoren wieder am Ausgangspunkt des Polygonzugs angekommen ist. Bildlich kann man sich das so vorstellen, dass „man keine Ortsveränderung“ erreicht hat.

28.3. Rechenoperationen zwischen Vektoren

Da ein Vektor ein Gebilde aus mehreren Einzelzahlen ist, ist die Frage, wie soll man dafür eine Addition, Subtraktion oder Multiplikation definieren. Ein grundlegendes Prinzip bei der Erweiterung von Rechenoperationen in der Mathematik ist es, dass für Spezialfälle, die auf bereits bekanntes zurückführen, trotzdem die bisher bekannten Rechenoperationen gelten. Es wäre sicher ungeschickt, wenn die Addition von zwei Zahlen sich unterscheidet, wenn es sich um zwei reelle Zahlen handelt, oder um eindimensionale Vektoren, die nur aus einer Komponente bestehen.

Das Gleiche trifft für die Multiplikation von Vektoren zu. Was soll man unter dem Vektor $5 * \vec{a}$ verstehen.

Die Multiplikation von Vektoren untereinander ist eine spezielle Eigenschaft, die bei normalen reellen Zahlen nicht auftritt. Aus diesem Grund hat man für die Multiplikation von zwei Vektoren miteinander zwei verschiedene Produktformeln gefunden, deren Ergebnis bestimmte geometrische Eigenschaften zu den Vektoren besitzen, aus denen das Produkt gebildet wurde. Da diese beiden definierten Produktformen für die

Vektorrechnung fundamentale Bedeutung besitzen, werden sie an späterer Stelle ausführlich behandelt.

28.3.1. Addition von zwei Vektoren

Erster Grundsatz für die Addition von Vektoren: Es können nur Vektoren miteinander addiert werden, wenn sie die gleiche Anzahl von Komponenten besitzen. Ein Vektor der Ebene, etwa $(2|-3)$ kann nicht mit einem Vektor des Raumes, etwa $(-1|3|5)$ addiert werden. Wie bereits vorher erwähnt befindet man sich in einem Vektorraum. Der erste Vektor ist ein Vektor eines 2-dimensionalen Vektorraumes, da er nur zwei Komponenten besitzt. Der zweite Vektor ist ein Vektor eines 3-dimensionalen Vektorraumes. Die beiden Vektoren leben in verschiedenen Welten. Nun könnte man sagen, man hänge an den ersten Vektor einfach eine Komponente an, z.B. $(2|-3|0)$ und schon wären drei Komponenten vorhanden. Diese Argumentation ist zwar einleuchtend, aber dieser Vektor „lebt“ auch im 3-dimensionalen Vektorraum und hat mit dem aus dem 2-dimensionalen Raum nichts zu tun. Es handelt sich dabei lediglich um einen 3-dimensionalen Vektor dessen 3. Komponente gleich 0 ist.

Aus den Ausführungen wird schon etwa klar, wie die Addition und Subtraktion definiert ist.

Zwei Vektoren werden addiert bzw. subtrahiert, indem ihre Komponenten in der jeweiligen Position addiert oder subtrahiert werden.

Beispiel: $\vec{a} = (2|-1)$ und $\vec{b} = (3|4)$ liefern $\vec{a} + \vec{b} = (2+3 | -1+4) = (5 | 3)$ oder
 $\vec{a} = (-1 | 3 | 2)$ und $\vec{b} = (3 | -5 | -6)$ liefern $\vec{a} + \vec{b} = (-1+3 | 3-5 | 2-6) = (2 | -2 | -4)$

28.3.2. Multiplikation eines Vektor mit einer reellen Zahl (skalaren Größe)

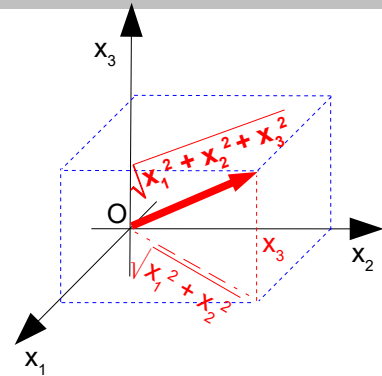
Die üblichen Rechengesetze verstehen unter dem Berechnen von 3 – mal einen Ausgangswert, dass sich der Ausgangswert um das Dreifache vergrößert, bzw., wenn man den Ausgangswert 3-mal addiert, dann ist das Ergebnis $3 * \dots$. Analog definiert man das mehrfache eines Vektors. Das n-fache eines Vektors sollte ein Vektor sein, der auch entsteht, wenn man den Vektor n-mal hintereinander addiert und sollte damit n-mal so groß sein, wie der Ausgangsvektor.

Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem man jede einzelne Komponente des Vektors mit dieser Zahl multipliziert.

Beispiel: $\vec{a} = (2|-1)$ und $t = 2$ liefern das Ergebnis $t * \vec{a} = 2 * (2|-1) = (4|-2)$
 $\vec{a} = (-1 | 3 | 2)$ und $t = -3$ liefern das Ergebnis $t * \vec{a} = -3 * (-1 | 3 | 2) = (3 | -9 | -6)$

28.3.3. Der Betrag eines Vektors

Ein in der Vektorrechnung immer wieder gebrauchter Wert ist der Betrag eines Vektors. Unter dem Betrag versteht man nichts weiter als die Länge des Vektors. Mit Hilfe dieses Betrages ist es möglich, jedem Vektor eine vorgegebene Länge zuzuordnen. Dazu im nächsten Kapitel zum Thema Einheitsvektor mehr. Der Betrag eines Vektors berechnet sich aus seinen einzelnen Komponenten im 2-dimensionalen wie im 3-dimensionalen Raum. Der Unterschied besteht darin, dass einmal 2 und einmal 3 Komponenten berücksichtigt werden müssen. Für die Berechnung der Länge spielt natürlich die Richtung keine Rolle, so dass zu dieser Berechnung der Pythagoras im 3-dimensionalen Raum benutzt wird.



$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Der Betrag eines Vektors ist die Wurzel aus der Summe der Komponentenquadrate. Für einen 2-dimensionalen Vektor entfällt die dritte Komponente.

28.3.4. Der Einheitsvektor

Die Berechnung des Betrages ist notwendig, um einen der am meisten gebrauchten Vektortypen zu erstellen, den Einheitsvektor. Jeder Vektor kann zu einem Einheitsvektor gemacht werden. Der Einheitsvektor eines Vektors hat die gleiche Richtung wie dieser, aber die Länge 1. Um das zu erreichen muss jede Komponente des Vektors durch den Betrag des Vektors dividiert werden. Es handelt sich dabei um nichts weiter, als um die Division eines Vektors mit einer reellen Zahl. Für die Kennzeichnung eines Einheitsvektors wird an den Vektorbezeichner oben eine 0 angefügt (wie ein Exponent): \vec{a}^0

(In viele Schulbüchern wird die 0 unten angefügt \vec{a}_0 , was aber durchaus zu Verwechslungen mit Vektoren führen kann, die einen Index tragen, weil sie z.B. aus einer Menge von Vektoren stammen. In diesem Dokument wird deshalb die Bezeichnung mit der 0 oben gewählt, da es eine Potenz von einem Vektor nicht gibt. Außerdem sind Ausdrücke „hoch 0“ gleich 1 in der Potenzrechnung.)

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{a}_1}{|\vec{a}|} \\ \frac{\mathbf{a}_2}{|\vec{a}|} \\ \frac{\mathbf{a}_3}{|\vec{a}|} \end{pmatrix}$$

Man kann leicht nachrechnen, dass ein solcher Vektor immer die Länge 1 hat.

28.4. Geometrische Bedeutung der Rechenoperationen

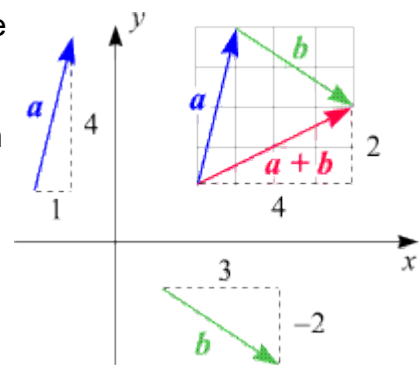
Eine wichtige Fragestellung im Zusammenhang mit den definierten Rechenoperationen ist, wie sieht das Ergebnis im Vektorraum graphisch dargestellt aus, welches Aussehen hat der Ergebnisvektor.

28.4.1. Die Summe zweier Vektoren

Die Addition zweier positiver Zahlen a und b kann man sich vorstellen als das "Aneinanderlegen" (von links nach rechts) zweier Strecken der Längen a und b . Die Summe $a + b$ entspricht dann der Gesamtlänge der beiden Strecken. Für negative Zahlen müssen wir diese Regel leicht ändern: So entspricht einem negativen b eine Strecke der Länge $|b|$, die bei der Addition "nach links" angelegt wird. Nichts anderes geschieht bei der Vektoraddition:

Seien a und b Vektoren, gedeutet als Pfeile. Wir legen sie so aneinander ("hintereinander"), dass die Spitze von a mit dem Schaft von b übereinstimmt. Die Summe $a + b$ ist dann der Vektor vom Schaft von a zur Spitze von b . Wenn wir mit einem Pfeil die Aufforderung "gehe vom Schaft zur Spitze" verbinden und zwei Pfeile wie beschrieben aneinanderlegen.

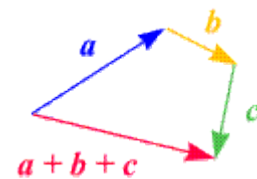
Die Summe der beiden Vektoren entspricht dann dem Vektor vom Fußpunkt des ersten Vektors zur Spitze des zweiten Vektors.



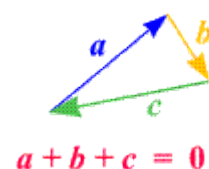
In der Skizze ist das für die beiden Vektoren $\vec{a} = (1, 4)$ und $\vec{b} = (3, -2)$, deren Summe $\vec{a} + \vec{b} = (4, 2)$ ist, illustriert.

Ein derartiges Verhalten von Pfeilen ist in der Physik bei Geschwindigkeiten und Kräften bekannt (die beide "gerichtete Größen" sind und durch Vektoren beschrieben werden). Die Summe zweier Vektoren wird dort die resultierende (Geschwindigkeit bzw. Kraft) genannt.

Die Summe von mehr als zwei Vektoren kommt auf analoge Weise zustande. Wir legen die entsprechenden Pfeile (in beliebiger Reihenfolge) "Schaft an Spitze" aneinander, wie hier in der rechten Skizze gezeigt:



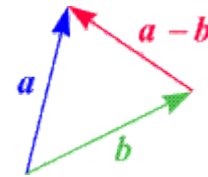
Die rechte Skizze illustriert, dass die Summe von Vektoren, die einen zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrt (das Fachterminus heißt: einen geschlossenen Polygonzug), $\vec{0}$ ist.



28.4.2. Die Differenz zweier Vektoren

Aus der geometrischen Bedeutung der Summe ergibt sich jene der Differenz zweier Vektoren:

Die nebenstehende Skizze zeigt die geometrische Bedeutung der Differenz zweier Vektoren a und b . Werden die Pfeile wie gezeigt angeordnet, so ergibt sich die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ als Verbindungsvektor der Spitzen, und zwar so, dass der erste Vektor (\vec{a}) die Spitze und der zweite (\vec{b}) den Schaft bildet. Hier haben wir eine weitere Variante der "Spitze minus Schaft"-Regel. (Beweis: Das Diagramm, anders betrachtet, stellt die Addition zweier Vektoren dar:

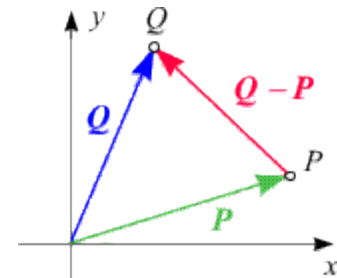


Differenz zweier Vektoren:
„Spitze minus Schaft“

$\vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}$). Die Differenz zweier Vektoren stellt sich hier als Antwort auf die Frage " $\vec{b} +$ wieviel ist \vec{a} ?" dar.

Eine wichtige Konsequenz daraus ergibt sich für die Berechnung von Verbindungsvektoren (siehe die Skizze rechts). Setzen wir für a und b die Ortsvektoren Q und P zweier Punkte Q und P , so ergibt sich für den Verbindungsvektor von P nach Q

$$\vec{PQ} = Q - P$$



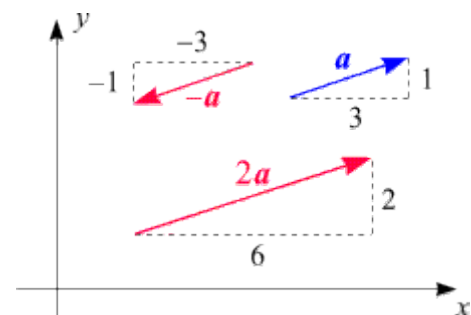
Verbindungsvektor als Differenz der Ortsvektoren

Zur Berechnung des Verbindungsvektors ist die Komponenten des zweiten Punktes von den Komponenten des ersten Punktes zu subtrahieren. Als Regel kann man sich dafür merken: „Endpunkt minus Anfangspunkt“. Diese Differenz zwischen zwei Ortsvektoren benötigt man sehr oft in der Vektorrechnung. Bei allen eckigen Körpern (Würfel, Pyramide, Quader) oder eckigen Flächen (Dreieck, Rechteck, Quadrat) lassen sich die Vektoren der Seiten als Differenz der Vektoren der Eckpunkte berechnen und darstellen.

28.4.3. Multiplikation reelle Zahl und Vektor

Sei a ein Vektor und c eine reelle Zahl, dann sind die Komponenten von ca das c -fache der Komponenten von a . Wie kann man von einem Pfeil, der a darstellt, zu einem Pfeil, der ca darstellt kommen?

- Ist $c > 0$, dann wird der a -Pfeil um den Faktor c verlängert (falls $c > 1$) oder verkürzt (falls $c < 1$).
- Ist $c < 0$, so wird der \vec{a} -Pfeil um den Faktor $|c|$ verlängert bzw. gekürzt, und es kommt noch eine Richtungsumkehr dazu.



In der Skizze ist das anhand des ebenen Vektors $\vec{a} = (3,1)$ und seiner Vielfachen

$2 \vec{a} = (6, 2)$ und $-\vec{a} = (-3, -1)$ illustriert. Des Vektor $c \vec{a}$ hat daher folgende geometrische Bedeutung:

Seine Länge beträgt das $|c|$ -fache der Länge von \vec{a} . Je nach dem Vorzeichen von c zeigt er in die gleiche oder in die entgegengesetzte Richtung wie \vec{a} (ist in jedem Fall aber parallel zu \vec{a}).

28.4.4. Linearkombination

Nach der Definition der Addition und der Multiplikation mit einem skalaren Faktor kann man einen der zentralen Begriffe der Vektorrechnung definieren: Die Linearkombination.

Definition:

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ beliebige Vektoren, so heißt jeder Vektor \mathbf{b} , der sich in der Form $\mathbf{b} = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n$ darstellen läßt, eine **Linearkombination der Vektoren $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$** . Die reellen Zahlen k_1, k_2, \dots, k_n heißen **Koeffizienten der Linearkombination**.

Bildlich gesprochen lässt sich der Vektor \mathbf{b} als Polygonzug der Vektoren $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ erzeugen. Dabei ist es erlaubt die einzelnen Vektoren α_i zu verlängern oder zu verkürzen, einschließlich deren Richtung umzukehren (negative Werte für k). Im Zusammenhang mit dieser Definition sind folgende Fragen in der Vektorrechnung interessant und nehmen eine zentrale Rolle ein:

1. Kann man einen bestimmten Vektor aus einer Menge von vorgegebenen Vektoren mittels Linearkombination erzeugen, oder nicht,
2. Kann man aus einer Menge von Vektoren einen geschlossenen Polygonzug erzeugen, dh. kann man aus einer Menge von Vektoren eine Linearkombination bilden, so dass das Ergebnis der Nullvektor ist.

28.4.5. Linear abhängige Vektoren

Es stellt sich durch einfache Überlegungen heraus, dass die beiden Fragen das gleiche Problem beschreiben: Wenn es möglich ist, aus einer Menge von Vektoren einen Vektor als Linearkombination zu erzeugen, dann ist es auch möglich aus allen diesen Vektoren einen geschlossenen Polygonzug, also einen Nullvektor, zu erzeugen. Wenn eine solche Möglichkeit besteht, ohne dass alle Koeffizienten k gleich Null sind, dann spricht man von einer Linearen Abhängigkeit der Vektoren.

Definition:

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ beliebige Vektoren, so heißen die Vektoren **linear abhängig**, wenn sich der Nullvektor als eine Linearkombination der Form $\mathbf{0} = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n$ darstellen läßt, bei der nicht alle reellen Zahlen k_1, k_2, \dots, k_n gleichzeitig 0 sein dürfen.

Natürlich lässt sich der Nullvektor immer darstellen, wenn alle k_i gleich Null sind, dann werden ja alle einzelnen Vektoren auf den Nullvektor verkürzt und die Summe von

Nullvektoren ergibt wieder einen Nullvektor. Interessant ist aber die Fragestellung, ob das auch möglich ist, wenn wenigstens einige der k_i von 0 verschieden sind. Klar ist auch, dass das nicht generell für eine Menge von Vektoren gelten kann.

28.4.6. Linear unabhängige Vektoren

Wie so oft in der Mathematik ist aber nicht die gerade definierte Eigenschaft, sondern genau die entgegengesetzte Eigenschaft interessant. Wann ist eine Menge von Vektoren nicht linear abhängig, bzw. wann ist sie linear unabhängig. Eine Menge von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn sie nicht linear abhängig ist. Aus der Definition der Linearen Abhängigkeit lässt sich eine eigene Definition für die Lineare Unabhängigkeit ableiten (eigentlich würde eine Definition ausreichen, aber die eigenständige Definition lässt sich besser auswerten).

Definition:

Sind $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ beliebige Vektoren, so heißen die Vektoren **linear unabhängig**, wenn sich der Nullvektor nur als eine Linearkombination der Form $\mathbf{0} = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + \dots + k_n \mathbf{a}_n$ darstellen lässt, bei der alle reellen Zahlen k_1, k_2, \dots, k_n **gleichzeitig** 0 sein müssen.

Die lineare Unabhängigkeit einer Menge von Vektoren hängt sehr eng mit der Dimension des Vektorraumes zusammen. In einem Vektorraum kann es niemals mehr linear unabhängige Vektoren geben, als die Dimension angibt. Das bedeutet:

In der Ebene kann es niemals mehr als zwei linear unabhängige Vektoren geben;
Im Raum kann es niemals mehr als drei linear unabhängige Vektoren geben.

Drei Vektoren in der Ebene und vier Vektoren im Raum sind also immer linear abhängig. Damit reduziert sich die Fragestellung darauf zu beweisen, ob zwei Vektoren in der Ebene linear abhängig sind oder nicht, und ob drei Vektoren im Raum linear abhängig sind oder nicht (es können auch bereits zwei Vektoren im Raum linear abhängig sein!).

Für die Ebene lässt sich die Frage sehr leicht beantworten:

In der Ebene sind zwei Vektoren genau dann linear abhängig, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist.

Die beiden Vektoren $(2|-3)$ und $(-2|5)$ sind linear unabhängig, da die Komponenten nicht durch eine Multiplikation mit der gleichen reellen Zahl ineinander überführt werden können. Dafür sind die Vektoren $(3|4)$ und $(9|12)$ linear abhängig, da der zweite Vektor das dreifache des ersten Vektors ist.

Auf der Grundlage der Definition der linearen Abhängigkeit/Unabhängigkeit kann man diesen Sachverhalt mathematisch folgendermaßen fassen:

Das Gleichungssystem $k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ hat keine Lösung. $\begin{matrix} k \cdot 2 = -2 \\ k \cdot -3 = 5 \end{matrix}$

Oder als Linearkombination mit dem Nullvektor:

Das Gleichungssystem

$$k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} k \cdot 2 - 2 \cdot l = 0 \\ k \cdot -3 + 5 \cdot l = 0 \end{array}$$

hat als Lösung nur die triviale Lösung $k=0$ und $l=0$.

Für das zweite Paar von Vektoren kann man folgende Gleichungen aufstellen

$$k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} k \cdot 3 = 9 \\ k \cdot 4 = 12 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die Lösung $k=3$. Die Vektoren sind linear abhängig. Oder als Linearkombination mit dem Nullvektor geschrieben:

$$k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} k \cdot 3 + 9 \cdot l = 0 \\ k \cdot 4 + 12 \cdot l = 0 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt eine nichttriviale Lösung $k=3$ und $l=-1$. Damit sind die beiden Vektoren linear abhängig. Interessant dabei ist, wenn es eine solche nichttriviale Lösung gibt, dann gibt es auch unendlich viele Lösungen. Denn die Werte $k=6$ und $l=-2$ oder $k=-1$ und $l=1/3$ sind ebenfalls Lösungen.

Besitzt also ein solches Gleichungssystem von 0 verschiedene Lösungen, dann sind alle Vielfachen der einen Lösung ebenfalls Lösung.

28.4.7. Lineare Unabhängigkeit/ Abhängigkeit bestimmen

Eine häufig gestellte Frage ist die, ob drei Vektoren linear unabhängig sind. Aus der Definition ist erkennbar, dass es sich dabei um die Frage nach der Lösbarkeit eines Gleichungssystems handelt. Dazu sollen drei Vektoren a , b , c betrachtet werden. Jeder Vektor stellt die Spalte eines Gleichungssystems dar. Nach Definition soll der Nullvektor als Linearkombination darstellbar sein. Das führt zu folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 Ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar, dann gibt es nur die Null-Lösung, dass alle x gleichzeitig 0 sind. Damit sind die Vektoren linear unabhängig. Entstehen in der letzten Zeile alles Nullen (ein Widerspruch ist bei homogenen Gleichungssystem nicht möglich) dann ist das Gleichungssystem mehrfach lösbar, die Vektoren sind linear abhängig. Dabei sind t, r und s die skalaren Streckfaktoren der drei Vektoren a , b , und c .

Dieses Vorgehen ist auch möglich, wenn der Vektor c als Linearkombination der Vektoren a und b dargestellt werden soll. Im Falle einer linearen Abhängigkeit gibt es unendlich viele Kombinationen zwischen t, r und s die möglich sind. Der Parameter s ist, als einer der drei, frei wählbar. Wählt man diesen mit -1 , so entstehen in t und r die Faktoren, die für die Linearkombination notwendig sind.

28.4.8. Basis und Dimension eines Vektorraumes

Jeder Vektorraum hat eine bestimmte Dimension oder Größe. Diese Dimension gibt an, wie viele Komponenten zu einem Vektor gehören müssen, damit er Teil dieses Vektorraumes ist. Zu jeder Komponente gibt es einen zugehörigen Basisvektor des

Raumes, für den diese Komponente angibt, auf welche Länge dieser Basisvektor gestreckt oder gestaucht werden muss, damit die gewünschte Länge erreicht wird. Jede Menge von Vektoren, die sichert, dass sich alle Vektoren des Vektorraumes als Linearkombination dieser Menge darstellen lassen heißt

Definition:

Eine Teilmenge B $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ von heißt **Basis des Vektorraums**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1) Das System ist linear unabhängig
- 2) Jeder Vektor des Vektorraumes lässt sich als Linearkombination dieser Vektoren darstellen.

In dieser Definition steckt einiges an Bedingungen drin. Als erstes müssen die Vektoren linear unabhängig sein. Daraus folgt, dass im \mathbb{R}^2 nicht mehr als 2 Vektoren eine Basis bilden können und im \mathbb{R}^3 nicht mehr als 3 Vektoren. Der Rang oder die Dimension eines Vektorraumes ist die notwendige Anzahl von Vektoren, die man braucht, um eine Basis zu bilden. Jeder Vektor lässt sich dann als Linearkombination jeder Basis darstellen und es gibt keine Einschränkungen, dass eine Basis immer identisch sein muss mit den Koordinatenachsen. In der Definition einer Basis ist auch nicht enthalten, dass die Basisvektoren senkrecht zueinander stehen.

28.4.8.1. Ein rechtwinkliges Basissystem im \mathbb{R}^2

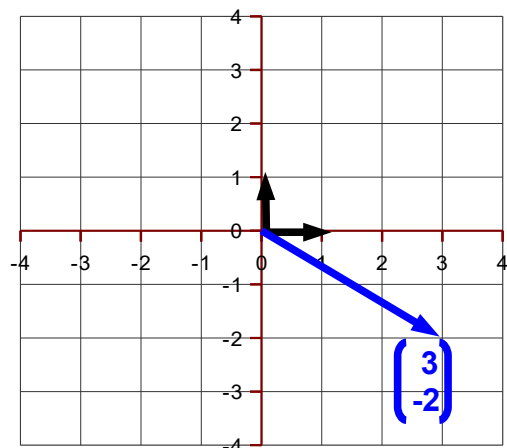
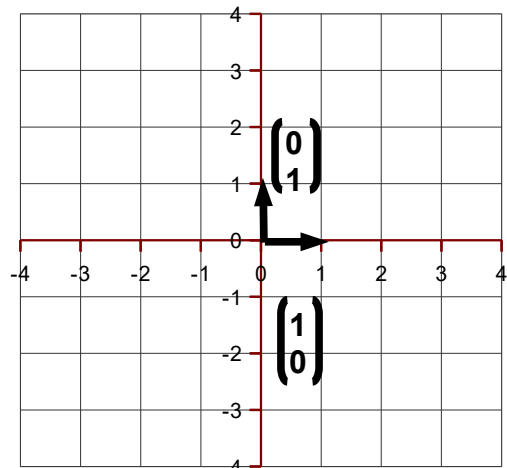
Zur besseren Veranschaulichung soll das an einem 2-dimensionalen Vektorraum dargestellt werden. Da bereits aus anderen Gebieten das rechtwinklige Koordinatensystem bekannt ist, benutzt man für die Vektorrechnung häufig diese Form. Im Gegensatz zum Koordinatensystem werden die Achsen nicht einfach mit Zahlen, die die Einheit angeben gekennzeichnet, sondern man schreibt die Einheit einer Achse als 2-dimensionalen Vektor, bei dem die Komponenten, die die Achse angibt mit 1 gekennzeichnet wird und alle anderen Komponenten mit 0.

Diese Vektoren erfüllen die Bedingung an eine Basis. Die Vektoren sind linear unabhängig und **jeder** Vektor der Ebene lässt sich mit diesen Vektoren darstellen. Jetzt soll betrachtet werden, was es eigentlich heißt, einen Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe dieser Basisvektoren darzustellen.

Da es sich um Basisvektoren der Länge 1 handelt, ist der notwendige Linearfaktor identisch mit der jeweiligen Komponente des Vektors:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diesen Zusammenhang könnte man auch herstellen, indem man folgendes Gleichungssystem aufstellt:



$$\begin{aligned} 3 &= 1x - 0y \\ -2 &= 0x + 1y \end{aligned}$$

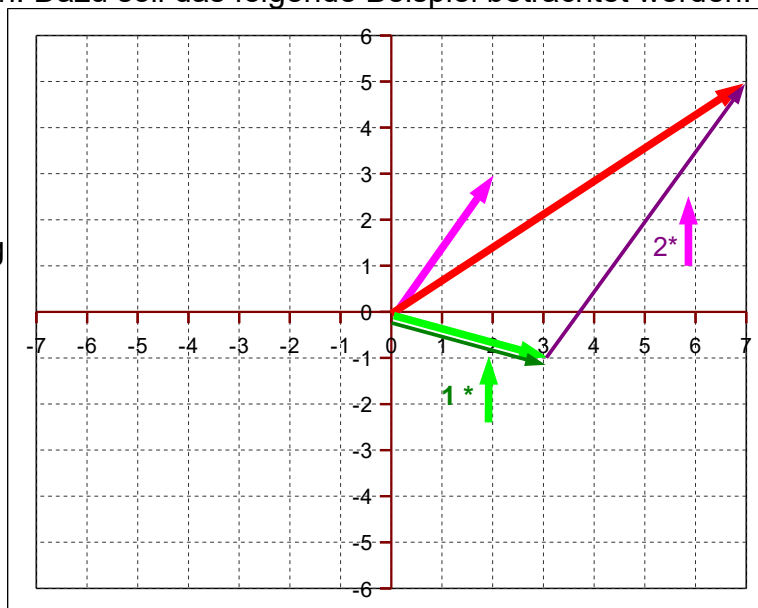
Die Zeilen des Gleichungssystems entsprechen den Komponenten der einzelnen Vektoren, die Spalten des Gleichungssystems entsprechen den Vektoren selbst. Die Lösung des Gleichungssystems sind die skalaren Faktoren, die benötigt werden zum Strecken oder Stauchen der Basisvektoren, damit der Zielvektor dargestellt werden kann.

Merksatz:

Die Komponenten eines Vektors sind die Streckfaktoren der Basisvektoren und die Lösung des Gleichungssystems, bei dem die Basisvektoren die Spalten darstellen.

Innerhalb dieses Basissystems lässt sich jeder Vektor auch als Linearkombination zweier anderer Vektoren erzeugen. Dazu soll das folgende Beispiel betrachtet werden.

Im rechtwinkligen Koordinatensystem besitzt der „rote“ Vektor die Komponenten (7|5). Dieser Vektor lässt sich aber auch als Linearkombination zweier anderer Vektoren darstellen, wenn diese nur linear unabhängig sind. Diese Bedingung wird z.B. von dem „grünen“ und „pink“ farbigen Vektor erfüllt, die im üblichen rechtwinkligen Koordinatensystem die Komponentendarstellung (3|-1) und (2|3) haben. Um jetzt den gesuchten „roten“ Vektor darzustellen ist es notwendig, die notwendige Linearkombination als Gleichungssystem zu formulieren:



$$x \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Gesucht sind die Skalierungsfaktoren für die Vektoren (3|-1) und (2|3) damit der Vektor (7|5) sich darstellen lässt. Das Ergebnis dieser Frage ist die Lösung des Gleichungssystems. Für den Skalierungsfaktor $x = 1$ und $y = 2$ kann der Vektor (7|5) als Linearkombination dargestellt werden. Bis hierher wurde alles gerechnet mit der Basis des rechtwinkligen Koordinatensystems.

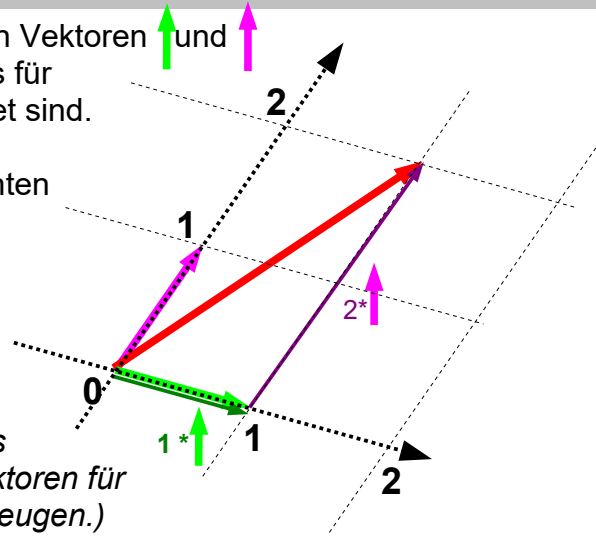
28.4.9. Ein nicht-rechtwinkliges Basissystem

Es wurde aber bereits geklärt, dass die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig und deshalb auch als Basis für einen zweidimensionalen Vektorraum geeignet sind.

In dieser Basis hat der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Komponenten (1|0) und der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Komponenten (0|1).

(Bei diesem Beispiel muss man sich von der Denkweise des üblichen rechtwinkligen Koordinatensystems lösen.

Es gibt andere Basisvektoren, die ein anderes Koordinatensystem erzeugen. Es sind die Faktoren für diese Basis gesucht, die den roten Vektor erzeugen.)



Genau so, wie der Zielvektor (7|5) durch die rechtwinkligen Basisvektoren (1|) und (0|1) als Linearkombination zu dem Ergebnis (7|5) führt

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

führt das Gleichungssystem mit den Basisvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu dem Ergebnis

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (\text{Es wurde hier bewußt auf die Komponenten des alten rechtwinkligen Basissystems verzichtet, da es das hier nicht mehr gibt})$$

Das Ergebnis dieses Gleichungssystems besagt, dass die Komponenten des Vektors, im alten rechtwinkligen Basissystem (7|5) sind, und im neuen Basissystem $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Komponenten (1|2) haben. Damit hat sich die Lösung des Gleichungssystems wieder als die Streckfaktoren der neuen Basis erwiesen, die man anwenden muss, um den Vektor mit der entsprechenden Länge und Richtung zu erzeugen.

28.5. Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist eine der wichtigsten Beziehungen der Vektorrechnung. Gegenüber den anderen beiden Produkten, dem Vektorprodukt und dem Spatprodukt gilt das Skalarprodukt unabhängig von der Dimension des Raumes, während die anderen beiden Produkte nur im \mathbb{R}^3 existieren.

Unabhängig von der Dimension des Raumes wird mit dem Skalarprodukt nachgewiesen, ob zwei Vektoren senkrecht zueinander stehen. Für den \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 kann außerdem der Winkel zwischen den beiden Vektoren und der Abstand von Punkten, Geraden und Ebenen zueinander bestimmt werden.

Die folgenden Abschnitte sollen zeigen, warum das so ist und wie man das erreichen kann.

Definition:

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ im \mathbb{R}^3 (im \mathbb{R}^2 ist eine Komponente wegzulassen).

dann versteht man unter dem **Skalarprodukt** den Wert, der durch die Summe der einzelnen Komponentenprodukte gebildet wird:

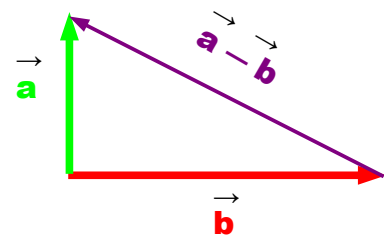
$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Wie es der Name schon sagt, ist das Ergebnis eine skalare Größe – reelle Zahl – und kein Vektor. Damit hat das Skalarprodukt auch keine Richtung und kann als solche nicht gezeichnet werden. Bei der Berechnung eines Abstandes läßt sich der Wert des Skalarproduktes zeichnerisch angeben. Als erstes soll gezeigt werden, dass das Skalarprodukt gleich 0 ist, wenn die beiden Vektoren senkrecht zueinander sind.

28.5.1. Senkrechte Vektoren

Wenn die beiden Vektoren a und b senkrecht stehen, dann bilden sie mit dem Verbindungsvektor $a - b$ ein rechtwinkliges Dreieck. Im rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz den Pythagoras:

$$|a|^2 + |b|^2 = |a - b|^2$$



Damit sind die Beträge der einzelnen Vektoren zu quadrieren, dh. von der Betragsberechnung entfallen die Wurzelzeichen und es sind die Quadrate der Komponenten zu summieren::

$$|a|^2 + |b|^2 = |a - b|^2$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$$

Für die rechte Seite ist die 2. Binomische Formel einzusetzen

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2) + (a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2) + (a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2)$$

Woraus zu erkennen ist, dass sich die quadratischen Glieder auf beiden Seiten aufheben.

$$\begin{aligned} 0 &= -2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 \\ &= -2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{aligned}$$

Nach dem Grundsatz, dass ein Produkt nur dann 0 sein kann, wenn mindestens einer der beiden Faktoren 0 ist, folgt für Vektoren, die senkrecht zueinander sind, dass das Skalarprodukt 0 sein muss.

Für den umgekehrten Beweis kann man von der Gleichung des Skalarproduktes ausgehen und durch beiderseitige Ergänzung der Gleichung rückwärtsschließen, bis man wieder beim Pythagoras angekommen ist. Auch, wenn das etwas seltsam anmutet: Es sind genauso mathematisch korrekte Umformungen, die zu einer neuen Aussage führen. Auf dem Hinweg wurde auch nichts anderes gemacht.

28.5.2. Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Eine andere Anwendung des Skalarproduktes besteht darin, den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen.

Bildet ein Vektor \vec{b} einen Winkel α mit einem Vektor \vec{a} , so kann man \vec{b} in zwei Vektoren \vec{b}_1 und \vec{b}_2 zerlegen, von denen \vec{b}_1 ein Vielfaches von \vec{a} ist ($\vec{b}_1 = s \cdot \vec{a}$) und \vec{b}_2 senkrecht auf \vec{a} steht.

Damit ergibt sich für das Skalarprodukt von \vec{a} und \vec{b} :

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} \cdot (s \vec{a} + \vec{b}_2) = s |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b}_2 = s |\vec{a}|^2$$

Da \vec{a} und \vec{b}_2 senkrecht sind, fällt der zweite Summand weg und es bleibt nur der erste Summand stehen. Damit stellt sich die Frage: Lässt sich s durch die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} ausdrücken?

Aus der Zeichnung ist leicht zu erkennen, dass die Vektoren \vec{a} bzw. \vec{b}_1 zum Winkel α die Ankathete darstellen, während der Vektor \vec{b} die Hypotenuse darstellt. Damit ergibt sich aus der Trigonometrie:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{b}_1|}{|\vec{b}|} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} |\vec{b}| \cdot \cos \alpha &= |\vec{b}_1| && \vec{b}_1 \text{ ist aber nur eine Verlängerung von } \vec{a}. \\ |\vec{b}| \cdot \cos \alpha &= s |\vec{a}| && \\ s &= \frac{|\vec{b}| \cdot \cos \alpha}{|\vec{a}|} && \text{setzt man den Wert } s \text{ in die Berechnung} \\ &&& \text{des Skalarproduktes ein} \\ \vec{a} \circ \vec{b} &= s |\vec{a}|^2 = \frac{|\vec{b}| \cdot \cos \alpha}{|\vec{a}|} |\vec{a}|^2 \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt als zweite Berechnungsformel für das Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

Stellt man diese Formel nach dem \cos des eingeschlossenen Winkels um, erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \cos \alpha$$

Es ist das Skalarprodukt über die Komponentendarstellung zu berechnen und dann das Ergebnis durch die Beträge der beiden Vektoren zu dividieren. Das Ergebnis liefert den \cos des eingeschlossenen Winkels, der dann über die Umkehrfunktion des \cos bestimmt werden kann.

Gleichzeitig sein darauf hingewiesen, dass der Vektor b_1 eine senkrechte Projektion des Vektors b auf den Vektor a ist. Denkt man sich Lichtstrahlen senkrecht zum Vektor a , die von oben auf den Vektor b fallen, dann ist der Schatten des Vektors b genau der Vektor b_1 . Diese Tatsache macht man sich bei der Berechnung von Abständen zu Nutze, deren prinzipielles Vorgehen als nächstes erläutert werden soll.

28.5.3. Abstandsberechnungen und das Skalarprodukt.

Genau diese Eigenschaft, dass das Skalarprodukt mit dem \cos des eingeschlossenen Winkels zusammenhängt, macht man sich bei Abstandsberechnung zu Nutze. Als Abstände von einem Objekt zu einem anderen werden immer die senkrechten Abstände oder kürzesten Entfernungen betrachtet. Das soll hier exemplarisch einmal für den Abstand eines Punktes zu einer Geraden in der Ebene betrachtet werden. Das Prinzip ist im \mathbb{R}^3 genau das gleiche, auf Unterschiede wird später eingegangen.

Gegeben ist ein Punkt P , dessen Abstand zu einer Geraden g bestimmt werden soll. Um den senkrechten Abstand zu bestimmen benötigt man einen Vektor, der senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden ist. Diesen Vektor setzt man in P an und sucht die Länge, wenn sein Ende genau auf der Geraden liegt.

Jede Geraden- oder Ebenengleichung hat mindestens einen Aufpunkt A , von dem man genau weiß, dass er auf der Geraden oder Ebene liegt. Jetzt bildet man den Verbindungsvektor von dem vorgegebenen Punkt P zu diesem Aufpunkt PA (oder umgekehrt, Richtung spielt keine Rolle). Es ist dabei zu beachten, dass es immer eine Ebene gibt, in der die Vektoren P , A , r und $\perp r$ liegen, auch im \mathbb{R}^3 .

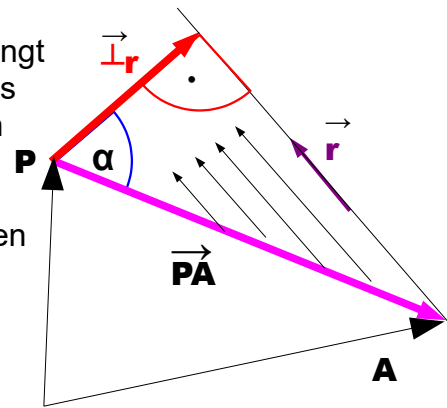
Jetzt ist die Frage, wie bekommt man eine senkrechte Projektion des Vektor PA auf den Vektor $\perp r$ zustande, (in Zeichnung durch dünne Pfeile angedeutet), oder eine Komponentenzerlegung von PA , wobei eine der Komponenten $\perp r$ ist.

Aus der Zeichnung ist erkennbar, dass PA die Hypotenuse und $\perp r$ die Ankathete in einem rechtwinkligen Dreieck sind und der Winkel α diese beiden Vektoren einschließt, also ist

$$\perp r = AP \cos \alpha$$

und nach der Definition des Skalarprodukts: $AP \circ \perp r = |\perp r| |AP| \cos \alpha$

Damit kommt das Skalarprodukt dem gesuchten Wert $AP \cos \alpha$ sehr nahe, als einzige störende Größe ist $|\perp r|$ vorhanden. Dem Problem entgeht man dadurch, dass man nicht einen beliebigen Vektor $\perp r$ benutzt, sondern einen mit der Länge = 1, also $|\perp r| = 1$.



Schlußfolgerungen

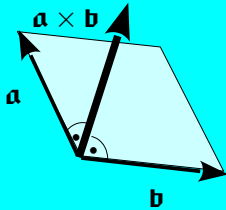
- Abstandsberechnung sind Projektionen des Verbindungsvektors zweier Punkte auf den senkrechten Abstandsvektor mit der Länge 1.
- Die verschiedenen Abstandsberechnung in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 unterscheiden sich nur dadurch: Wie findet man die Richtung des senkrechten Abstandes.

28.6. Das Vektorprodukt

Während die Berechnung des Skalarproduktes von der Dimension des Raumes unabhängig ist, existiert das Vektorprodukt nur im \mathbb{R}^3 . Das Ergebnis des Vektorproduktes ist ein Vektor, der sehr spezielle Eigenschaften besitzt. Berechnet wird das Vektorprodukt als Determinante, die aber in der Schule nicht behandelt wird. Hier soll trotzdem die übliche Definition zunächst angegeben werden:

Definition:
Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ im \mathbb{R}^3

Dann versteht man unter dem **Vektorprodukt** den Vektor, der durch die folgende Determinante gebildet wird.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$


Die Berechnung erfolgt über eine dreireihige Determinante. Für die Berechnung von dreireihigen Determinanten hat Sarrus eine sehr elegante und nützliche Formel gefunden. Man erweitert das 3×3 Gebilde noch einmal um die ersten beiden Spalten:

$$\begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Jetzt multipliziert man entlang der Diagonalen. Alle Produkte von links oben nach rechts unten erhalten ein positives Vorzeichen, dh. es wird das Vorzeichen beibehalten, welches sich aus der Multiplikation ergibt. Alle Produkte von links unten nach rechts oben erhalten ein negatives Vorzeichen, dh. bei allen Produkten wird das entstandene Vorzeichen geändert. Es entstehen jeweils drei Produkte.

$$a_2 b_3 i + a_3 b_1 j + a_2 b_2 k - b_1 a_2 k - b_2 a_3 i - b_3 a_1 j$$

Diese sechs Ausdrücke werden jetzt nach den Elementen i , j und k sortiert und zusammengefaßt:

$$(a_2 b_3 - b_2 a_3) i + (a_3 b_1 - b_3 a_1) j + (a_2 b_2 - b_1 a_2) k$$

i , j und k stehen für die Einheitsvektoren in Richtung der jeweiligen Koordinatenachsen, die Klammerausdrücke davor sind alles reelle Zahlen, so daß es sich um die Darstellung eines Vektors in seinen Basiskoordinaten handelt. Diese Komponenten entsprechen genau den oben angegebenen bei der Definition des Vektorproduktes.

Da Determinanten kein Schulstoff sind, wird von verschiedenen Lehren das nebenstehende Rechenschema angeboten. In diesem Schema ist die erste und letzte Zeile zu streichen und dann analoge Kreuzprodukte zu bilden. Dabei sind wieder bei den Produkten von links unten nach rechts oben die Vorzeichen zu ändern. Die Berechnung ist der Determinantenrechnung nachgebildet und liefert wieder einen Vektor mit drei Komponenten.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a_1 & b_1 \\ \hline a_2 & b_2 \\ \hline a_3 & b_3 \\ \hline a_1 & b_1 \\ \hline a_2 & b_2 \\ \hline a_3 & b_3 \\ \hline \end{array}$$

Das von fast allen Lehrern angebotene Gleichungssystem zur Berechnung sollte nicht benutzt werden. Warum man das nicht benutzen sollte, wird bei der geometrischen Interpretation des Vektorproduktes klar.

28.6.1. Der Ergebnisvektor des Vektorproduktes

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ soll mit dem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ skalar multipliziert werden.

$$\begin{aligned} & a_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ & a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 - a_2 a_3 b_1 \\ & a_1 a_2 b_3 - a_1 a_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 - a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2 - a_1 a_3 b_2 \\ & (a_1 a_2 - a_1 a_2) b_3 + (a_2 a_3 - a_2 a_3) b_1 + (a_1 a_3 - a_1 a_3) b_2 = 0 \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt des Vektors \vec{a} mit dem Vektorprodukt aus \vec{a} und \vec{b} ist 0. diese beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander. Die gleiche Rechnung kann man für den Vektor \vec{b} machen.

1. Der Vektor steht senkrecht auf den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} , die das Vektorprodukt gebildet haben.

28.6.2. Der Betrag des Vektorproduktes

Zur Vermeidung der Quadratwurzel soll zunächst das Quadrat des Betrages betrachtet werden.

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

nach den Binomischen Formeln ergibt sich auf der rechten Seite:

$$= (a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2) + (a_3^2 b_1^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1^2 b_3^2) + (a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2)$$

Die Klammern sind nicht notwendig und sollen nur demonstrieren, wo die einzelnen Ausdrücke herkommen.

$$= (a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2) + (a_3^2 b_1^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1^2 b_3^2) + (a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2)$$

$$= a_1^2 (b_3^2 + b_2^2) + a_2^2 (b_3^2 + b_1^2) + a_3^2 (b_2^2 + b_1^2) - 2(a_2 a_3 b_2 b_3 + a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1 a_2 b_1 b_2)$$

Bei den Quadraten der Komponenten von \vec{a} fehlt jeweils ein Quadrat der Komponenten von \vec{b} und zwar jeweils dasjenige, das die gleiche Komponenten von \vec{b} enthält.

Addiert man das bei den ersten Summanden hinzu muss man es am Ende wieder subtrahieren.

$$= a_1^2(b_3^2 + b_2^2 + b_1^2) + a_2^2(b_3^2 + b_1^2 + b_2^2) + a_3^2(b_2^2 + b_1^2 + b_3^2) - 2(a_2a_3b_2b_3 + a_1a_3b_1b_3 + a_1a_2b_1b_2) - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2)$$

Bei den ersten drei Summanden lässt sich die Klammer mit den Quadraten der b Komponenten ausklammern, da sie jetzt bei allen Quadraten der a Komponenten vorhanden sind.

Die Elemente mit negativem Vorzeichen lassen sich zu einem Binom aus drei Komponenten zusammenfassen:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ac + 2bc + 2ca$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

Die ersten beiden Klammern enthalten das Quadrat den Betrages des Vektors a und des Vektors b. Die Klammer nach dem Minuszeichen enthält das Skalarprodukt des Vektors a mit dem Vektor b. Für dieses Skalarprodukt gibt es auch eine Formel, die die Beträge der Vektoren benutzt:

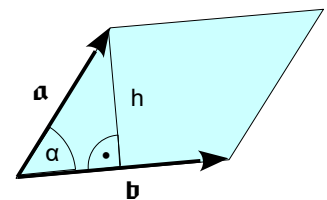
$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha)^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \alpha \\ &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Der Schritt von der vorletzten zur letzten Zeile erfolgt auf der Grundlage des Pythagoras der Trigonometrie: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ oder für den Betrag des Vektorproduktes selbst:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha$$

28.6.3. Geometrische Interpretation des Betrages

Zwei Vektoren spannen immer ein Parallelogramm auf. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms berechnet sich aus Grundseite * Höhe. Die Grundseite dieses Parallelogramms wäre etwa der Vektor b und die Länge der Grundseite $|\mathbf{b}|$. α ist der von den Vektoren a und b eingeschlossene Winkel. Damit gilt für α in dem rechtwinkligen Dreieck.



$\sin(\alpha) = \frac{h}{|\mathbf{a}|}$ oder $h = |\mathbf{a}| \sin(\alpha)$ und für den Flächeninhalt des Parallelogramms $A = |\mathbf{b}| h = |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \sin(\alpha)$

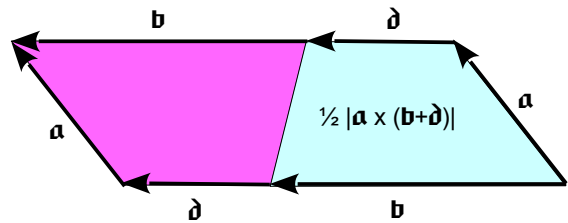
- Der Betrag des Vektors ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren a und b aufgespannt wird.

Bei der zweiten Eigenschaft entsteht das Problem, wenn man mit einem Gleichungssystem arbeitet. Die Lösung des Gleichungssystems ist eine Parameterlösung, also nicht eindeutig. Daraus kann man nicht auf einen festen Betrag schließen. Das Gleichungssystem würde nur ausreichen, wenn man nur die 1. Eigenschaft realisieren will.

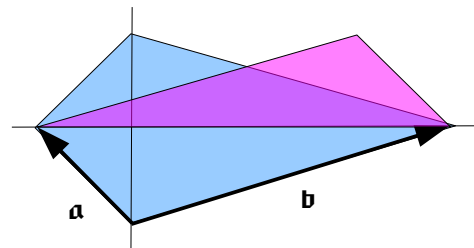
Die Parallelogrammfläche zwischen zwei Vektoren wird relativ selten gebraucht, die Fläche von dem Dreieck, das durch zwei Vektoren aufgespannt wird, schon häufiger. Die Fläche dieses Dreiecks ist die Hälfte der Fläche des Parallelogramms.

Noch interessanter ist die Berechnung der Fläche eines Trapezes:

Addiert man die beiden Paralleelseiten zusammen erhält man wieder ein Parallelogramm. Damit kann man das Vektorprodukt von \mathbf{a} und $\mathbf{b}+\mathbf{d}$ berechnen. Die Hälfte dieser Fläche ist die Fläche des Trapezes.



Gleiches gilt für das Drachenviereck. Bildet man von den beiden unterschiedlichen Seiten das Vektorprodukt, dann ist dessen Betrag der Flächeninhalt des Drachenvierecks. In der elementaren Geometrie wird der Flächeninhalt des Drachenvierecks über die beiden Diagonalen berechnet, die meist erst bestimmt werden müssen



Damit lassen sich alle Flächen mit Ecken (keine Kreise) über das Vektorprodukt berechnen.

28.6.4. Zusammenhang zwischen Beträgen des Skalarproduktes und des Vektorproduktes

$$|\mathbf{a} \odot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha \quad \text{Betrag des Skalarproduktes}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha \quad \text{Betrag des Vektorproduktes}$$

Addiert man die Quadrate der beiden Beträge erhält man folgenden Ausdruck:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \odot \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \alpha + |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \alpha = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \odot \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

Die Summe der Quadrate aus Skalarprodukt und Vektorprodukt ist gleich dem Produkte der Quadrate aus den Beträgen der beiden Vektoren. Damit ist es z.B. möglich, den Betrag des Vektorproduktes zu berechnen, wenn man den Betrag des Skalarproduktes kennt.

28.7. Das Spatprodukt

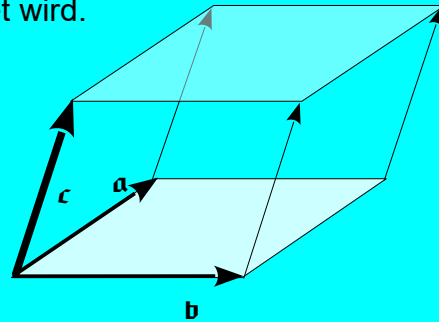
Definition:

Gegeben seien drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ im \mathbb{R}^3

Dann versteht man unter dem **Spatprodukt** die reelle Zahl, die durch die Determinante aus den drei Vektoren gebildet wird.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \odot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

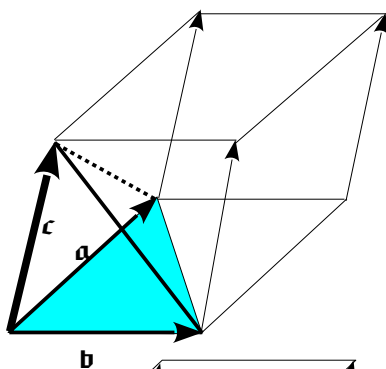
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3$$



Das Spatprodukt ist eine Zahl und kein Vektor. (Determinanten sind immer reelle Zahlen). Das Spatprodukt entsteht aus dem Skalarprodukt eines Vektors mit einem Vektorprodukt aus zwei anderen Vektoren. Aus dieser Zusammensetzung ergibt sich auch die geometrische Bedeutung des Spatproduktes. Das Vektorprodukt liefert den Flächeninhalt der Fläche von \mathbf{a} und \mathbf{b} , gleichzeitig einen Vektor, der senkrecht zu dieser Fläche steht. Das Skalarprodukt liefert die Projektion des Vektors \mathbf{c} auch diesen senkrechten Vektor, und damit die Höhe des Gebildes.

Das Spatprodukt liefert das Volumen des von den Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} aufgespannten Körpers.

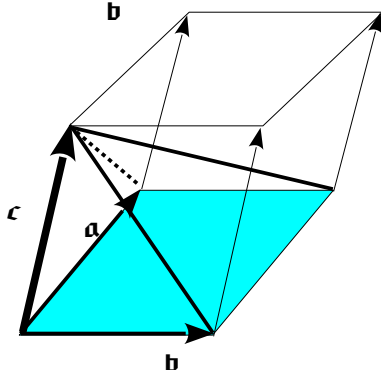
Auch hier ist es so, daß man das Volumen eines solchen Körpers relativ selten benötigt, aber einige andere Körper treten sehr oft auf und da kann man diese Beziehung nutzen.



Ein Tetraeder

Eine Pyramide, die aus drei Dreiecken besteht hat ein Volumen von $\frac{1}{6}$ des Volumen des Gesamtkörpers:

$$V = \frac{1}{6} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \odot \mathbf{c}$$



Eine vierseitige Pyramide

Eine vierseitige Pyramide besteht aus einer Rechteckgrundfläche und vier Dreiecken. Ihr Volumen beträgt $\frac{1}{3}$ des Volumen des Gesamtkörpers.

$$V = \frac{1}{3} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \odot \mathbf{c}$$

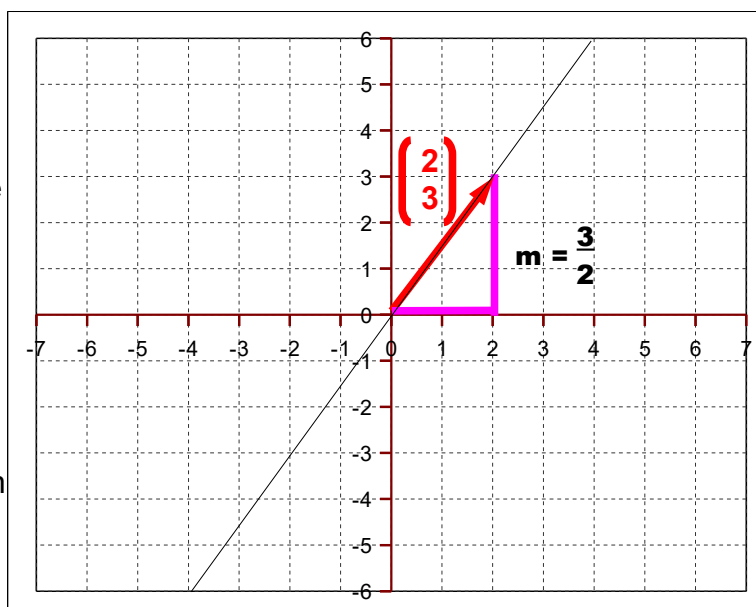
28.8. Geradengleichungen

Das Arbeiten mit Geraden ist aus dem 2-dimensionalen Koordinatensystem hinlänglich bekannt. Was soll man aber machen, wenn man eine Gerade in einem 3-dimensionalen Raum beschreiben soll und mit ihr rechnen muss, z.B. um Schnittpunkte zu berechnen. Es gibt für den 3-dimensionalen Raum keine Geradengleichung. Dort sind mindestens zwei Winkel notwendig, um die Gerade eindeutig zu bestimmen, es würden also zwei Faktoren m notwendig sein, die Variable y von einem dieser Anstiege abhängig ist und die Variable z von beiden abhängig ist. Die Vektorrechnung bietet hier ein einheitliches Konzept, mit dem man Geraden in der Ebene und Geraden im Raum nach den gleichen Regeln behandeln kann. Aus der Koordinatengeometrie ist bekannt, dass es zwei Arten von Geradengleichungen gibt: Die Punkt-Richtungs-Form und die Zwei-Punkte Form. Deshalb soll mit diesen beiden auch begonnen werden.

28.8.1. Punkt-Richtungs-Form

Wie der Name schon sagt ist zur Aufstellung der Geraden ein Punkt und eine Richtung notwendig. In der Koordinatengeometrie hat man dazu einen Punkt mit seinen Koordinaten benutzt, z.B. $P(x_1, y_1)$ und eine Richtung, die durch den Anstieg m der Geraden gegeben war. Der Punkt kann relativ einfach übernommen werden. Wie bereits eingangs der Vektorrechnung geschrieben, werden Punkte des Koordinatensystems in der Vektorrechnung durch Ortsvektoren wiedergegeben, also Vektoren, deren Fußpunkt im Koordinatenursprung, respektive im Ursprung des Vektorraumes liegen und deren Spitze genau an den Koordinaten des Punktes endet. Wie bekommt man aber die reelle Zahl m in die Vektorrechnung. Dazu soll eine kleine Skizze dienen.

In nebenstehender Darstellung ist das $m = 3/2$ eingetragen. Nun ist vom Zeichnen von Geraden bekannt, dass man den Zähler des Bruches in Richtung y -Achse abtragen muss und den Nenner von m in Richtung x -Achse. Also entsteht im \mathbb{R}^2 eine Gerade in Vektorform indem man den Zähler von m als x_2 Komponente des Richtungsvektors schreibt und den Nenner als x_1 Komponente. Besteht m nicht aus einem Bruch, sondern einer ganzen Zahl, dann kann man das so interpretieren, dass der Nenner =



1 ist und damit der Wert von m die y -Komponente des Richtungsvektors wird und die x -Komponente wird 1 gesetzt. Damit ist auch klar, wie man in der Ebene von der Vektorform einer Geraden zu der üblichen Koordinatenform zurückkommen kann, indem man den Richtungsvektor in einen Bruch umwandelt. (*Beliebte Frage und Aufgabenstellung!*). Ebenso, wie das „ x “ in der Geradengleichung die Vergrößerung oder Verkleinerung des m bewirkt, gibt es in der Vektorrechnung eine reelle Zahl t , s , k , ... mitunter auch in griechischen Buchstaben, die das Verlängern oder Verkürzen des Richtungsvektors bewirkt.

Damit erhält man die Darstellung der Punkt-Richtungs-Form in Vektorschreibweise in folgender Form:

$$\vec{X} = \vec{P} + t \vec{r}$$

→

P Aufpunkt:

Ortsvektor vom Koordinatenursprung zu einem Punkt auf der Geraden.

→

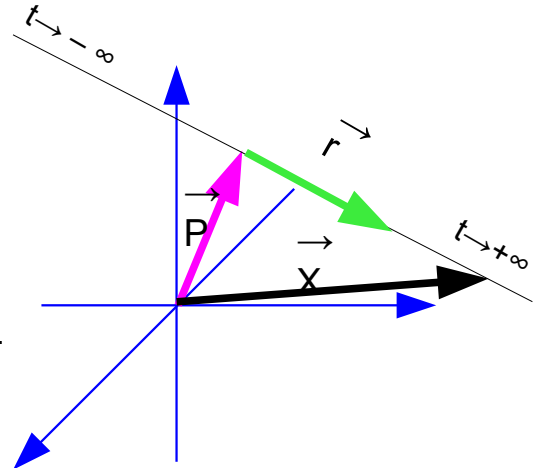
r Richtungsvektor:

Im Aufpunkt setzt der Richtungsvektor \vec{r} an, der durch Änderung des Streckfaktors t mit dem Aufpunkt für jedes t wieder einen Ortsvektor erzeugt, dessen Endpunkt auf der Geraden liegt.

→

X (variabler) Geradenpunkt:

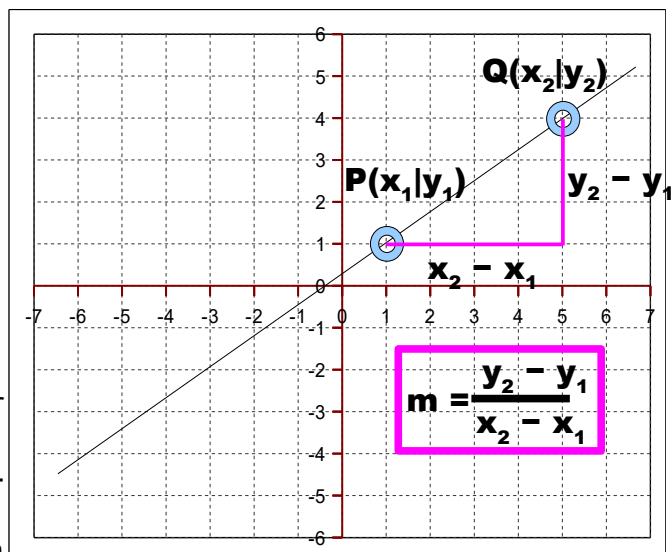
Ortsvektor zu einem Geradenpunkt, der durch einen Wert für t erzeugt wird.



28.8.2. Zwei-Punkte-Form

Ebenfalls aus der Koordinaten-geometrie ist die die Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung bekannt. Bei dieser Darstellung ist die Steigung m der Geraden unbekannt, dafür aber ein zweiter Punkt gegeben, über den man die Steigung berechnen kann.

Das m bestimmt sich aus der Differenz der y -Werte der beiden Punkte im Verhältnis zur Differenz der x -Werte der beiden Punkte. Analog zur geometrischen Interpretation der Punkt-Richtungs-Gleichung wird der Zähler des Wertes m in y -Richtung abgetragen



und der Nenner in x -Richtung. Wenn man die beiden Punkte als Ortsvektoren ansieht, dann entsteht der Quotient m genau aus dem Verbindungsvektor der beiden Punkte P und Q nach der bekannten Weise, einen Verbindungsvektoren aus zwei anderen zu erzeugen, wählt man die Differenz aus dem Endpunkt und dem Anfangspunkt und erhält die Vektorform:

$$\vec{X} = \vec{P} + t (\vec{Q} - \vec{P})$$

→ →

P, Q Aufpunkte:**Ortsvektoren** vom Koordinatenursprung zu einem Punkt auf der Geraden.

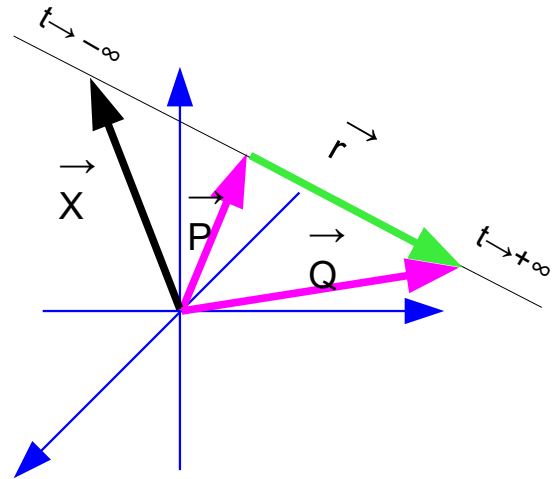
→

r Richtungsvektor:

Im Aufpunkt P setzt der Richtungsvektor r an, und bestimmt sich aus der Differenz der beiden Ortsvektoren \vec{P} und \vec{Q} :

$$r = Q - P$$

→

X (variabler) Geradenpunkt:**Ortsvektor** zu einem Geradenpunkt, der durch einen Wert für t erzeugt wird.

28.8.3. Abstand eines Punktes von einer Geraden im \mathbb{R}^2

Hier soll zunächst nur der Abstand eines Punktes von einer Geraden in der Ebene behandelt werden. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden im Raum setzt die Kenntnis von Ebenengleichungen in Vektorform voraus und wird deshalb erst im Kapitel Ebenen behandelt.

Gegeben ist ein Punkt P , dessen Abstand zu einer Geraden g bestimmt werden soll. Um den senkrechten Abstand zu bestimmen benötigt man einen Vektor, der senkrecht zum Richtungsvektor r der Geraden ist. Diesen Vektor setzt man in P an und sucht die Länge, wenn sein Ende genau auf der Geraden liegt.

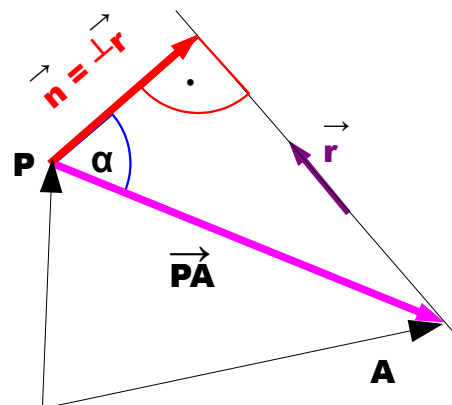
Problem: Wie erhält man den senkrechten Vektor ?

Wenn in der Ebene ein Vektor mit seinen Komponenten bekannt ist, wie hier der Richtungsvektor r , zu dem ein senkrechter Vektor gesucht ist, vertauscht man die x_1 und x_2 Koordinaten und ändert bei einer Komponente das Vorzeichen:

$$r = (r_1 \mid r_2) \quad n = \perp r = (r_2 \mid -r_1) \text{ oder } (-r_2 \mid r_1)$$

Gleichzeitig erkennt man an der Zeichnung das rechtwinklige Dreieck, und dass der Vektor \vec{n} die Ankathete des Winkels α und \vec{PA} die Hypotenuse des Dreiecks ist. Damit ist der Abstand

$$d = |\vec{PA}| \cos \alpha$$



Genau diese Formel steckt im Skalarprodukt, wenn man den senkrechten Vektor mit einer Länge 1 benutzt, da dann der Betrag dieses senkrechten Vektors keine Rolle spielt in der Gleichung des Skalarprodukts:

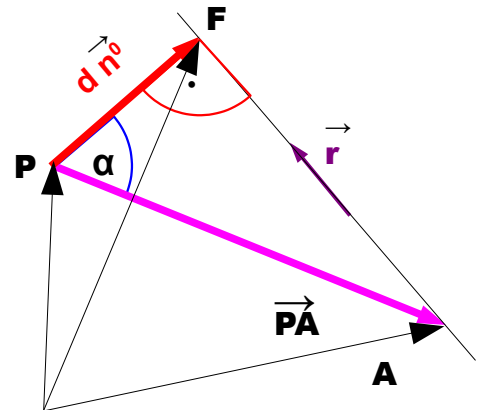
$$\vec{n} \circ \vec{PA} = n_1 PA_1 + n_2 PA_2 = |\vec{n}| |\vec{PA}| \cos \alpha$$

Dividiert man diese Gleichung durch $|\vec{n}|$ erhält man den gesuchten Abstand:

$$d = 1/|\vec{n}| \vec{n} \circ \vec{PA} = \vec{n}^0 \circ \vec{PA}$$

Das Skalarprodukt des Verbindungsvektors des Aufpunkts zum angegebenen Punkt P mit dem Normaleneinheitsvektor liefert den Abstand des Punktes.

Gleichzeitig erhält man den Fußpunkt F dieses Lotes auf der Geraden, wenn man die berechnete Länge d mit dem Normaleneinheitsvektor multipliziert und zum Punkt P addiert.

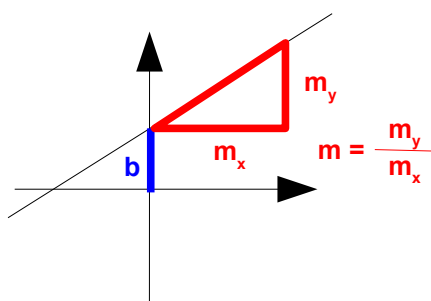


28.8.4. Koordinatendarstellung einer Geraden im \mathbb{R}^2

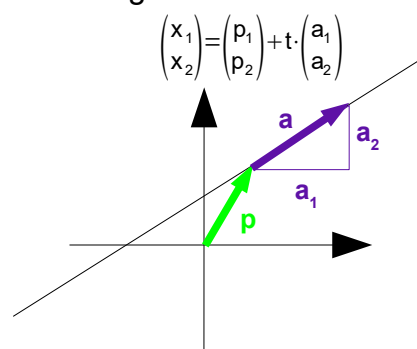
Es sollen hier nur Geraden in der Ebene betrachtet werden, also Vektoren, die nur zwei Komponenten besitzen. Außerdem soll eine Gerade in der Ebene einmal in ihrer Vektorform und einmal in der bisher bekannten, üblichen Koordinatendarstellung angegeben werden.

Für Geraden in der Ebene existiert eine Koordinatendarstellung.

Koordinatendarstellung
 $y = mx + b$



Vektordarstellung



Eine oft auftretende Fragestellung ist, wie können die beiden Formen ineinander umgewandelt werden.

28.8.4.1. Koordinatendarstellung \Rightarrow Vektordarstellung

Für die Vektordarstellung benötigt man einen Aufpunkt und einen Richtungsvektor. Wenn man nicht einen geeigneten Punkt der Geraden erst berechnen möchte, kann

man auch den Schnittpunkt mit der y-Achse als Aufpunkt benutzen: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$

Den Richtungsvektor erhält man aus der Steigung m : $\vec{a} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix}$

28.8.4.2. Vektordarstellung \Rightarrow Koordinatendarstellung

Für die Koordinatendarstellung benötigt man den Anstieg m und den Schnittpunkt mit der y – Achse, der erreicht wird, wenn $x = 0$ ist.

Für den Anstieg m werden die Komponenten des Richtungsvektors benutzt: $m = \frac{a_2}{a_1}$

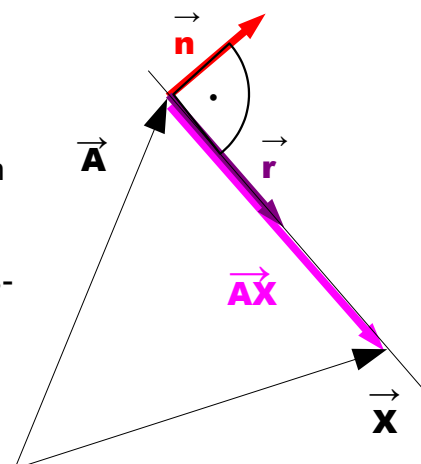
Für den Schnittpunkt mit der y-Achse ist die Bedingung $x = 0$ die entscheidende Voraussetzung. Aus dieser Bedingung resultiert aus der Vektorform folgende Gleichung: $p_1 + t a_1 = 0$ was zu einer Lösung $t = -p_1/a_1$ führt. Dieser Wert für t ist in die y-Komponente der Vektorform einzusetzen und man erhält den Punkt für den x-Wert 0: $b = p_2 + (-p_1/a_1) a_2$

28.8.5. Die Hessesche Normalform (HNF) einer Geraden im \mathbb{R}^2

Es wurde bereits mehrfach erwähnt, dass im \mathbb{R}^2 zu einem Richtungsvektor nur ein eindeutiger senkrechter Vektor existiert. Der läßt sich zwar in seiner Richtung umkehren, indem bei allen Komponenten das Vorzeichen geändert wird, das ändert aber nichts an seiner Richtung. Damit ist im \mathbb{R}^2 eine Gerade nicht nur durch ihren Richtungsvektor eindeutig bestimmt, sondern auch durch die Kenntnis des zum Richtungsvektor senkrechten Vektor. Geraden in dieser Form werden als Normalform im Sinne von „Normalenform“ sprich „senkrecht“ und nicht im Sinne, dass das die normale Form einer Geraden ist. Zur Herleitung der Formel wird noch einmal die Gerade mit ihrem senkrecht zum Richtungsvektor stehenden Normalenvektor betrachtet.

Der Normalenvektor \vec{n} ist senkrecht zum Richtungsvektor \vec{r} . Damit ist dieser Normalenvektor aber auch senkrecht zu jedem Differenzvektor zwischen zwei Punkten auf der Geraden. Das gilt insbesondere für den Differenzvektor des Aufpunkts der Geraden mit jedem anderen Ortsvektor der Geraden, da diese Differenzvektoren die gleiche Richtung haben, wie der Richtungsvektor \vec{r} . Also gilt für die Differenz eines jeden Ortsvektors auf der Geraden mit dem Ortsvektor des Aufpunkts:

$$(\vec{X} - \vec{A}) \circ \vec{n} = 0$$



Für alle Ortsvektoren, die nicht auf der Geraden liegen sind die Verbindungsvektoren mit dem Aufpunktvektor A nicht senkrecht. damit sind die Punkte auf der Geraden eindeutig bestimmt und das führt zur Gleichung der Normalform:

$$(\vec{x} - \vec{A}) \circ \vec{n} = 0$$

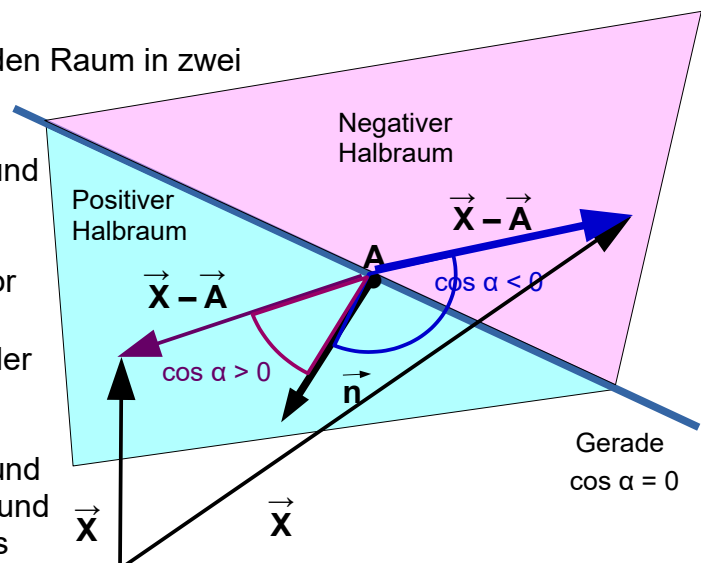
oder

$$\vec{x} \circ \vec{n} = d$$

Da es im \mathbb{R}^3 zu einer Geraden unendlich viele senkrechte Richtung gibt, existiert im \mathbb{R}^3 eine solche Normalform für Geraden nicht. Es wird sich aber später zeigen, dass im \mathbb{R}^3 eine solche Normalform für Ebenen existiert. Als Grundsatz kann man sich folgende Regel merken: Eine Normalform für ein geometrisches Objekt existiert nur dann, wenn die Dimension dieses Objektes **genau um 1 kleiner** ist, als die Dimension des Raums in dem sich das Objekt befindet. Nur in diesem Fall existiert eine eindeutig senkrechte Richtung, die die eine noch fehlende Dimension zum gesamten Raum liefert. Solche Räume werden ganz allgemein als **Hyperebene** bezeichnet.

28.8.5.1. Teilung des Raums in zwei Halbräume

Das Skalarprodukt teilt den verbleibenden Raum in zwei Hälften: In einen positiven und einen negativen Halbraum. Dabei folgt die Unterscheidung, welches der positive und welches der negative Halbraum ist der Richtung des Normalenvektors. Alle Ortsvektoren, für die der Differenzvektor $\vec{x} - \vec{A}$ mit dem Normalenvektor einen Winkel von 90° einschließt, liegen auf der Geraden. Dann unterscheidet sich der Raum in Ortsvektoren, bei denen der Winkel zwischen dem Differenzvektor und n kleiner als 90° ist (rot eingezeichnet) und Ortsvektoren, bei denen der Winkel des Differenzvektors mit dem Normalenvektor größer als 90° ist (blau eingezeichnet).



28.8.5.2. Orientierung des Normalenvektors und Koordinatenursprung

Wenn man das Skalarprodukt ausmultipliziert, dann liefert die Multiplikation $\vec{A} \circ \vec{n}$ eine reelle Zahl, so dass man die Formel auch in der folgenden Weise schreiben kann:

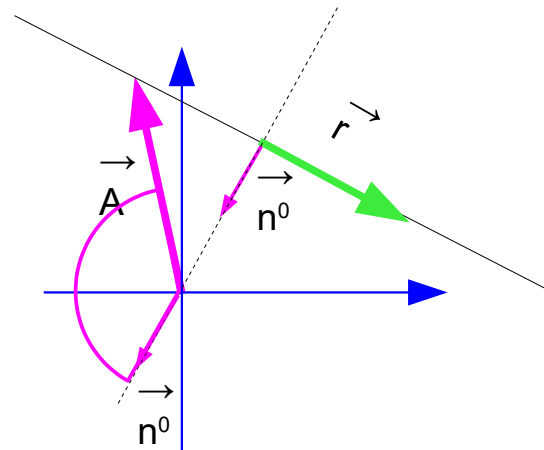
$$\vec{X} \circ \vec{n} - d = 0$$

Dabei ist d der Wert des Skalarproduktes $\vec{A} \circ \vec{n}$.

Interessant dabei ist das Vorzeichen von d . Für Abstandberechnungen wurde bereits analysiert, dass mit dem Normaleneinheitsvektor zu arbeiten ist, damit wirklich der Abstand eines Punktes zur Geraden berechnet werden kann. Es soll auch hier das Produkt des Ortsvektors A mit dem Normaleneinheitsvektor betrachtet werden.

In nebenstehende Skizze sieht man, für den Fall, dass der Normalenvektor in Richtung des Nullpunktes zeigt bildet er mit einem Ortsvektor auf der Geraden einen Winkel größer als 90° .

(Verschiebung des Normalenvektors in den Ursprung und Angabe des Winkels). Zeigt der Normalenvektor von der Geraden in die Richtung, die entgegengesetzt zum Ursprung ist, dann ist der Winkel mit einem Ortsvektor kleiner als 90° .



Das führt zu folgenden Konsequenzen:

Ist in der Gleichung $\vec{X} \circ \vec{n} - d = 0$ der Wert für d größer Null, zeigt der Normalenvektor vom Ursprung weg, ist der Wert für d kleiner Null, oder steht dort $\vec{X} \circ \vec{n} + d = 0$, dann zeigt der Normalenvektor in den Halbraum, in dem der Ursprung liegt.

Teilt man den Wert von d durch den Betrag des Normalenvektors \vec{n} , bzw. rechnet man statt mit dem Vektor \vec{n} mit dem Vektor \vec{n}^0 , dann gibt d den Abstand des Ursprungs von der Geraden an.

Da diese Hessesche Normalform häufig in der aufgelösten Form

$$\vec{X} \circ \vec{n} = d$$

angegeben wird, heißt das: Wenn $d > 0$, dann zeigt der Normalenvektor vom Ursprung weg, wenn $d < 0$, dann zeigt der Normalenvektor in den Halbraum, in dem der Ursprung liegt.

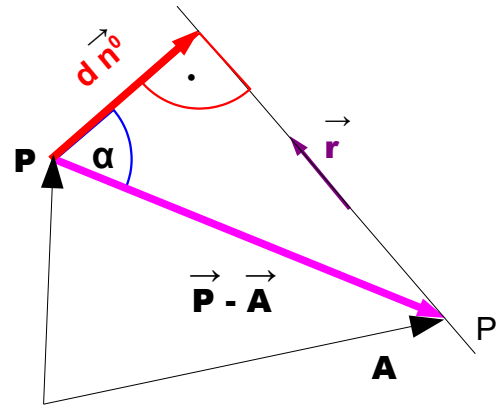
28.8.5.3. Abstandsberechnungen in der Normalenform

Wie bereits gesehen geht es bei Abstandsberechnungen immer um den senkrechten Abstand. Für diesen senkrechten Abstand ist die Normalenform hervorragend geeignet, da mit dem Normalenvektor sowieso schon der senkrechte Vektor zum Richtungsvektor in der Formel auftritt. Also müsste die Normalenform doch auch gut geeignet sein, den Abstand eines Punktes von der Geraden zu bestimmen.

Aus der normalen Berechnung des Abstandes einige Kapitel früher wurde herausgearbeitete, dass der Abstand d eines Punktes P von einer Geraden

$$\vec{n}^0 \circ (\vec{P} - \vec{A}) = d$$

ist. Diese Formel ist der Normalform sehr ähnlich. Setzt man in der Normalform für den allgemeinen Ortsvektor X den Ortsvektor des gegebenen Punktes ein, von dem der Abstand bestimmt werden soll, und benutzt als Normalenvektor den Normaleneinheitsvektor, so erhält man über das Skalarprodukt den Abstand eines beliebigen Punktes P . Für Punkte, die auf der Geraden liegen liefert das Skalarprodukt den Wert 0 (siehe Geradengleichung in HNF) was auch bedeutet, dass der Abstand dieser Punkte zur Geraden gleich 0 ist.



28.9. Ebenengleichung

Ebenen im Raum haben die gleichen Grundeigenschaften, wie Geraden in der Ebene. Die Dimension der Ebene im Raum ist genau wieder um 1 niedriger als die Dimension des Raumes. Aus diesen Gründen ist die Arbeit mit Ebenen im Raum denen von Geraden in der Ebene sehr ähnlich. Lediglich Geraden im Raum erfordern neue Denkansätze insbesondere bei Abstandsberechnungen, da es keine eindeutigen senkrechten Vektor zum Richtungsvektor der Geraden gibt.

28.9.1. Die Punkt-Richtungsform

Die Punkt-Richtungsform einer Ebene bedarf genau wie eine Gerade zunächst einen Aufpunkt, von dem bekannt ist, dass er in der Ebene liegt. Im Gegensatz zur Geraden benötigt aber die Ebene zwei Richtungsvektoren, da die Ebene ein zweidimensionales unendliches Gebilde ist.

$$\vec{X} = \vec{P} + t \vec{a} + s \vec{b}$$

→

P Aufpunkt:

Ortsvektor vom Koordinatenursprung zu einem Punkt auf der Ebene.

→

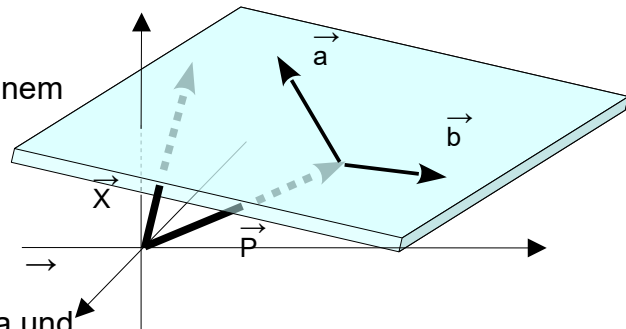
a, b Richtungsvektoren:

→

Im Aufpunkt setzen die Richtungsvektoren a und b an, die durch Änderung der Streckfaktoren t und s mit dem Aufpunkt für jedes t und s wieder einen Ortsvektor erzeugt, dessen Endpunkt auf der Ebene liegt.

X (variabler) Ebenenpunkt:

Ortsvektor zu einem Ebenenpunkt, der durch einen Wert für t und s eindeutig erzeugt wird.



28.9.2. Die Drei-Punkte-Form

Da eine Ebene zwei Richtungsvektoren benötigt braucht man drei Punkte auf der Ebene um zwei Richtungsvektoren zu erzeugen. Dazu kommt noch die Bedingung, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen dürfen (nicht kollinear sein), denn unter diesen Bedingungen würde es keine zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren geben, sondern der eine wäre nur ein Vielfaches des anderen. Damit sind alle Bedingungen für das Erstellen einer Ebenengleichung erfüllt.

$$\vec{X} = \vec{P} + t(\vec{Q} - \vec{P}) + s(\vec{R} - \vec{P})$$

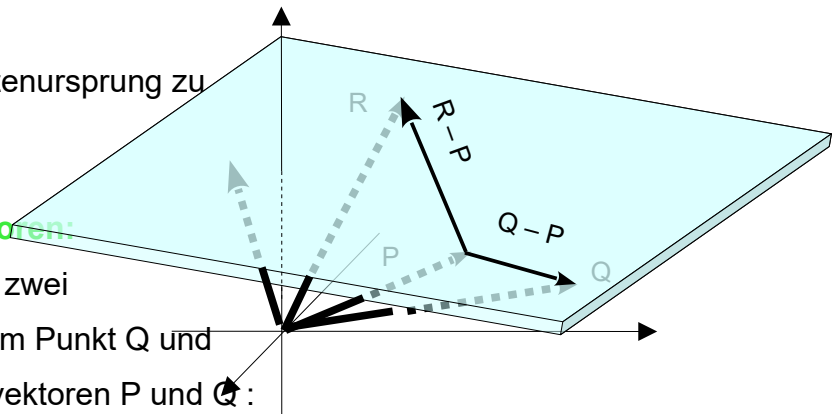
→ → →

P, Q, R Aufpunkte:**Ortsvektoren** vom Koordinatenursprung zu einem Punkt auf der Ebene.

→ → → →

R - P, Q - P Richtungsvektoren:

Im Aufpunkt P setzen jeweils zwei Richtungsvektoren an, die zum Punkt Q und zum Punkt R verlaufen. Ortsvektoren P und Q:



→

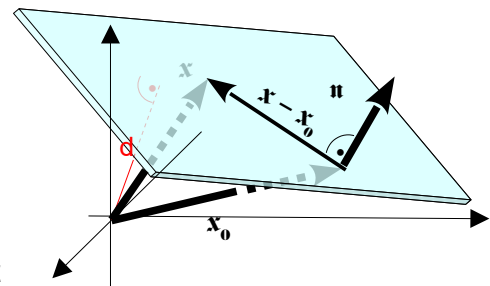
X (variabler) Ebenenpunkt:**Ortsvektor** zu einem Ebenenpunkt, der durch je einen Wert für t und s erzeugt wird.

28.9.3. Hessesche Normalform (HNF) einer Ebene im R3

Wie bereits bei den Geraden erläutert setzt die Normalform eines vektoriellen Gebildes einen eindeutigen Normalenvektor voraus und das ist nur möglich, wenn die Dimension um genau 1 niedriger ist, als die Dimension des Raumes. Deshalb gibt es im Raum eine solche Normalform nur für die Ebene, aber nicht für eine Gerade. Die formale Gleichung zur Normalform einer Geraden ist nicht zu unterscheiden.

$$(\vec{X} - \vec{P}) \circ \vec{n}^0 = 0$$

Der Unterschied zur Normalform der Geraden in der Ebene besteht lediglich darin, dass bei der Normalform der Geraden in der Ebene jeder Vektor aus zwei Komponenten besteht und die Normalform der Ebene im Raum hat Vektoren, die aus drei Komponenten bestehen. Geometrisch gesprochen ist die Aussage der Hesseschen Normalform:



Alle Verbindungsvektoren zwischen zwei Ortsvektoren, die auf der Ebene liegen, sind senkrecht zum Normalenvektor.

Alles, was bei der Normalform der Geraden über die beiden Halbräume, die Orientierung des Normalenvektors und den Abstand zum Nullpunkt geschrieben wurde, kann hier genauso übernommen werden.

28.9.4. Hessesche Normalform einer Ebene in Koordinatendarstellung

Im vorherigen Kapitel wurde die Hessesche Normalform in Vektordarstellung angegeben: $(\vec{X} - \vec{P}) \circ \vec{n}^0 = 0$. Von dieser Vektorform soll jetzt das Skalarprodukt ausmultipliziert werden, dabei wird berücksichtigt, dass man das Skalarprodukt an dem Minuszeichen trennen kann, da das Skalarprodukt distributiv ist:

$$\vec{X} \circ \vec{n}^0 - \vec{P} \circ \vec{n}^0 = 0$$

Wie bereits bei der Normalform der Geraden erläutert führt das zu der Form:

$$\vec{x} \circ \vec{n} = d$$

wobei im Falle des Einheitsvektors von n der Wert für d der Abstand der Ebene zum Ursprung ist. Jetzt soll das Skalarprodukt auf der linken Seite komponentenweise ausmultipliziert werden. Dabei werden für den auf der Ebene laufenden Vektor \vec{x} die Komponenten x_1, x_2, x_3 verwendet und für den Normalenvektor n_1, n_2, n_3 . Damit entsteht eine neue Gleichung der Form

$$x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 = d$$

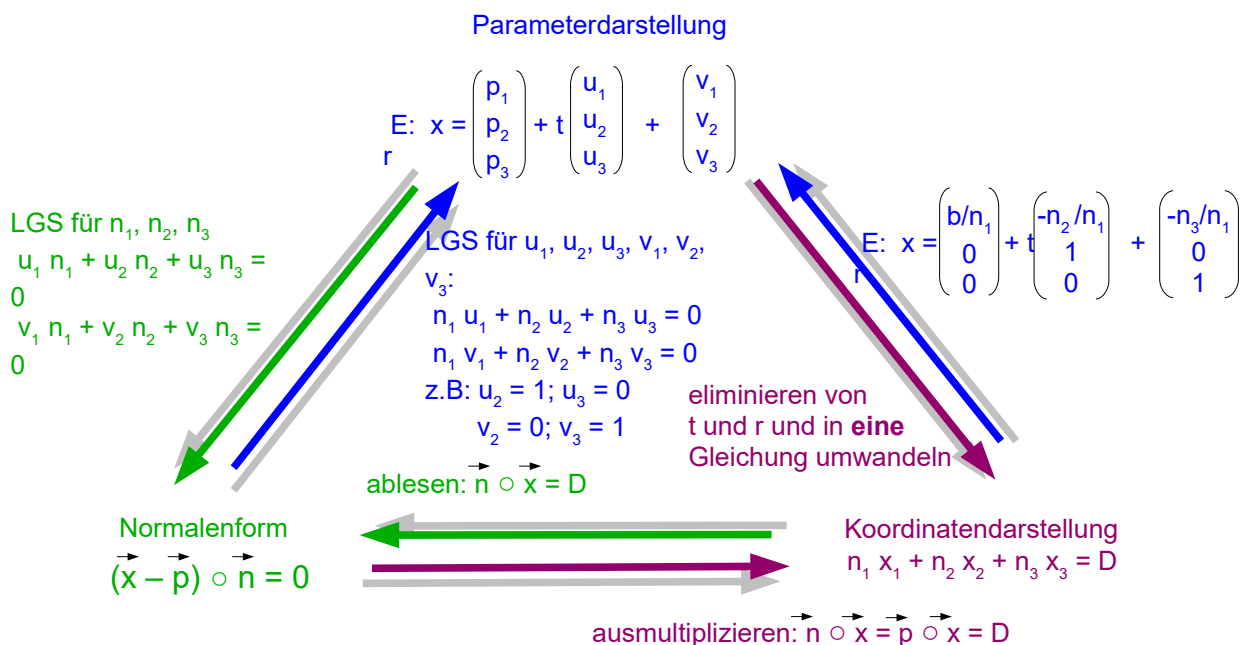
Diese Form wird als Koordinatenform der hesseschen Normalform bezeichnet, da an Stelle des Vektors \vec{x} die Koordinaten auftreten x_1, x_2, x_3 .

Dazu soll ein Beispiel betrachtet werden. Eine übliche Form, in der Ebenen angegeben werden ist $4x + 3y - 2z = -1$, oder in der hier verwendeten Schreibweise $4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1$. Genau diese Schreibweise stellt die Koordinatenform der Hesseschen Normalform dar. Aus dieser Schreibweise und der Herleitung der Formel wird folgendes sofort klar:

Die Koeffizienten der Koordinatenschreibweise sind identisch mit einem Normalenvektor der Ebene.

Für das angegebene Beispiel $4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1$ heißt das, der Normalenvektor dieser Ebene ist: $(4 \mid 3 \mid -2)$.

28.9.5. Umwandlung von Ebenengleichungen



28.9.5.1. Umwandlung Parameterdarstellung in HNF

Das Problem bei Ebenen besteht darin, wie erhält man einen Vektor, der gleichzeitig auf zwei Vektoren senkrecht steht. Dazu sollen die beiden Richtungsvektoren wieder

mit a und b bezeichnet werden, und der Normalenvektor mit n . Jeder Vektor besteht aus drei Komponenten und wenn ein Vektor senkrecht zu einem anderen steht, muss das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich Null sein, also das Skalarprodukt von a und n sowie von b und n :

$$a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 = 0$$

$$b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3 = 0$$

Dies ist ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten, nämlich den Komponenten des Vektors n . In diesem Gleichungssystem kann man einen Parameter beliebig wählen, weil es unterbestimmt ist (weniger Zeilen als Variable). Das bedeutet, dass der Normalenvektor nicht eindeutig ist, was auch geometrisch sofort einleuchtet, da mit jedem Normalenvektor auch jede Verlängerung und Verkürzung dieses Vektor mit den beiden anderen einen rechten Winkel bildet.

Beachte:
Die Richtung des Normalenvektors ist eindeutig,
aber nicht seine Länge !

Diese Rechnung ist mitunter etwas aufwendig und umständlich. Es gibt einen eleganten Weg zur Bestimmung des Normalenvektors über das sogenannte Vektorprodukt

28.9.5.2. Umwandlung HNF in Parameterdarstellung

Dazu wird die HNF in die Koordinatendarstellung überführt, so dass eine Ebenengleichung von Typ $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ entsteht. Das ist eine Gleichung mit drei Unbekannten (x_1 , x_2 und x_3), damit sind zwei Variable frei wählbar und die dritte kann bestimmt werden. Auf diese Weise erhält man drei Punkte, die auf der Ebene liegen. Von diesen Punkten kann man über die Drei-Punkte-Gleichung eine Ebene in Parameterdarstellung erzeugen.

Eine andere Variante ist die Bestimmung eines Punktes, der auf der Ebene liegt. Danach sind zwei Richtungsvektoren zu suchen, die senkrecht zum Normalenvektor sind, aber nicht unbedingt senkrecht untereinander sein müssen. Für die Richtungsvektoren selbst gilt nur die Bedingung, dass sie nicht linear abhängig sein dürfen, also der eine Richtungsvektor kein Vielfaches des anderen sein darf. Das erreicht man am einfachsten dadurch, dass man jeweils eine Komponente der Vektoren gleich Null wählt und die anderen beiden Komponenten vertauscht und bei einer das Vorzeichen ändert (s. dazu Normalenvektor einer Geraden im \mathbb{R}_2). Damit könnte man aus der Koordinatengleichung folgende Richtungsvektoren gewinnen:

$$a = (n_3, 0, -n_1) \text{ und } b = (0, -n_3, n_2)$$

Das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren mit dem Normalenvektor der Koordinatenform ist gleich Null, also stehen beide Vektoren senkrecht zum Normalenvektor.

28.9.5.3. Koordinatenform aus drei Punkten

Die Bestimmung der Koordinatenform aus drei Punkten geht normalerweise über die Parameterform. Es wird aus den drei Punkten eine Ebenengleichung in Parameterform erzeugt und die dann in die HNF umgewandelt. Es besteht aber auch die Möglichkeit aus den drei Punkten die Koordinatenform der HNF direkt zu erstellen.

Der Ausgangspunkt sind drei Punkte $P(p_1, p_2, p_3)$; $Q(q_1, q_2, q_3)$ und $R(r_1, r_2, r_3)$, die auf der Ebene liegen sollen. Alle drei Punkte müssen die Koordinatengleichung erfüllen:

$$p_1 a + p_2 b + p_3 c = d$$

$$q_1 a + q_2 b + q_3 c = d$$

$$r_1 a + r_2 b + r_3 c = d$$

Damit entsteht ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und vier Unbekannten (a,b, c, d). Von diesem Gleichungssystem ist ein Parameter frei wählbar. Man entscheidet sich für den Wert von d und gibt dieser Variablen einen beliebigen von 0 verschiedenen Wert. *(Der Wert 1 ist nicht immer der Beste, weil damit die anderen Werte sehr unhandliche Dezimalzahlen werden können.)*

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten.

1. Das Gleichungssystem ist lösbar und man erhält für die anderen drei Unbekannten die notwendigen Werte.
2. Das Gleichungssystem erzeugt einen Widerspruch und ist so nicht lösbar. In diesem Fall ist $d=0$ einzusetzen und das Gleichungssystem noch einmal zu lösen. Dann gibt es für die Werte a, b, c immer Lösungen.

Hintergrund:

Wenn es im ersten Fall lösbar ist, dann werden die Werte für a, b, c dem Wert von d angepasst, dh. jedes Vielfache der vier Werte ist auch Lösung des Gleichungssystems, deshalb spielt es keine Rolle, welchen Wert von d man vorgibt.

Hat das Gleichungssystem einen Widerspruch, erzeugen die drei Punkte keine Ebene, die zum Ursprung einen Abstand hat, sondern eine Ebene, die durch den Ursprung geht. Damit muss $d=0$ gesetzt werden, da die Ebene zum Ursprung den Abstand 0 hat. *(Das d ist nicht der tatsächliche Abstand der Ebene von Ursprung, aber $d \neq 0$ bedeutet, dass die Ebene vom Ursprung einen Abstand hat. Näheres dazu in den Abschnitten zur Abstandsberechnung.)*

Damit sind alle formelmäßigen Voraussetzungen geschaffen die gängigen Aufgabenstellungen der Vektorrechnung im dreidimensionalen Raum zu behandeln. Es wird deshalb in den kommenden Abschnitten nicht mehr darauf hingewiesen, wie man aus drei Punkten eine Ebenengleichung erstellt, oder wie man von einer Ebene in Parameterdarstellung einen Normalenvektor findet, sondern nur noch, welche der Formeln Anwendung findet.

28.10. Spezielle Ebenen

Einige Ebenen sind besonders interessant. Dazu gehören die Koordinatenebenen. Die Koordinatenebenen haben markante Ebenengleichungen, aus denen dann auch geschlossen werden kann, wie Ebenen zu den Koordinatenebenen liegen.

28.10.1. Die $x_1 - x_2$ Koordinatenebene

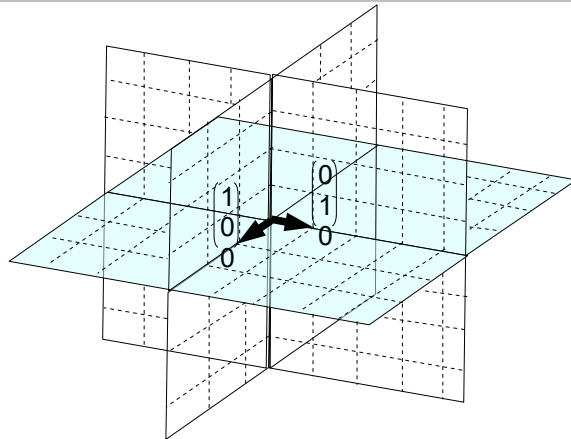
Die Parametergleichung der Ebene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind die beiden Basisvektoren der x_1 und der x_2 Achse.

Die Koordinatengleichung der Ebene

$$x_3 = 0$$



28.10.2. Die $x_2 - x_3$ Koordinatenebene

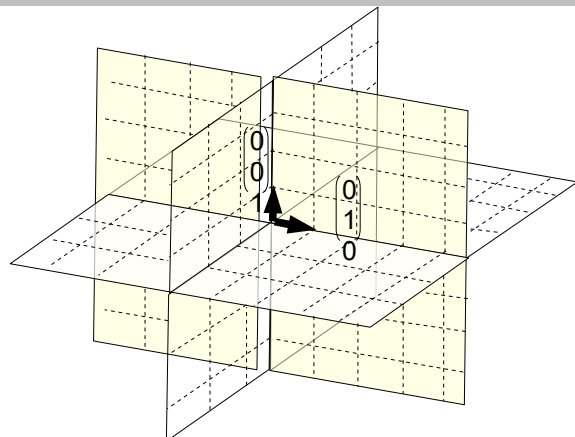
Die Parametergleichung der Ebene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind die beiden Basisvektoren der x_2 und der x_3 Achse.

Die Koordinatengleichung der Ebene

$$x_1 = 0$$



28.10.3. Die $x_1 - x_3$ Koordinatenebene

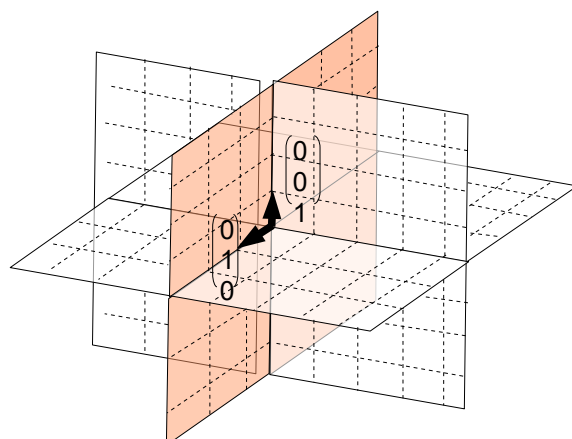
Die Parametergleichung der Ebene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind die beiden Basisvektoren der x_1 und der x_3 Achse.

Die Koordinatengleichung der Ebene

$$x_2 = 0$$



28.10.4. Die parallele Ebene zu einer Koordinatenebene

	Parameterdarstellung	Koordinatendarstellung
	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$	$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
E x_1-x_2 – Ebene:	$a_3 = 0, b_3 = 0$	$cx_3 = d$
E x_2-x_3 – Ebene:	$a_1 = 0, b_1 = 0$	$ax_1 = d$
E x_1-x_3 – Ebene:	$a_1 = 0, b_2 = 0$	$bx_2 = d$

Bei Ebenen, die parallel zu Koordinatenebenen sind, sind bei den Richtungsvektoren jeweils eine Komponente Null. In der Koordinatendarstellung tritt nur eine Koordinate auf, da nur mit einer Koordinaten ein Achsenschnittpunkt entsteht.

E x_1-x_2 – Ebene:	
E x_2-x_3 – Ebene:	
E x_1-x_3 – Ebene:	

- ◆ Keine Spurgerade mit der parallelen Ebene.
- ◆ Spurgeraden parallel zu den Achsen
- ◆ Keine Spurpunkte mit den Achsen der parallelen Ebene, deshalb nur einen Spurpunkt
- ◆ Ebene senkrecht zu zwei Koordinatenebenen
- ◆ Die Komponente der Richtungsvektoren der nicht parallelen Achse ist 0
- ◆ Normalenvektor hat nur eine von 0 verschiedene Komponente

28.10.5. Die parallele Ebene zu einer Koordinatenachse

	Parameterdarstellung	Koordinatendarstellung
	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$	$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
E x_1 – Achse:	$a_2 b_3 = a_3 b_2$	$bx_2 + cx_3 = d$
E x_2 – Achse:	$a_1 b_3 = a_3 b_1$	$ax_1 + cx_3 = d$
E x_3 – Achse:	$a_2 b_1 = a_1 b_2$	$ax_1 + bx_2 = d$

E x_1 – Achse:	
E x_2 – Achse:	
E x_3 – Achse:	

- ◆ Zwei Spurgeraden parallel zur parallelen Achse
- ◆ Kein Spurpunkt mit der parallelen Achse
- ◆ Normalenvektor hat keine Komponente der parallelen Achse, parallel zur Koordinatenebene der anderen beiden Achsen.

28.10.6. Spurgeraden

Wenn Ebenen Koordinatenebenen schneiden hinterlassen sie dort sogenannte Spurgeraden. Spurgeraden eignen sich gut, um Ebenen in ein dreidimensionales Koordinatensystem einzuzichnen. Beim Schneiden von Koordinatenebene ist ein markantes Merkmal, dass der Wert einer Koordinatenachse gleich Null ist. (Bei der x_1 - x_2 Koordinatenebene ist der Wert $x_3 = 0$) Aus dieser Eigenschaft leitet sich die Bedingung für die Berechnung der Spurgeraden ab.

	Parameterdarstellung	Koordinatendarstellung
	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$	$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
x_1 - x_2 – Ebene: $x_3 = 0$	$x_3 = 0 = p_3 + t u_3 + s v_3$	$x_3 = 0: ax_1 + bx_2 = d$
x_2 - x_3 – Ebene: $x_1 = 0$	$x_1 = 0 = p_1 + t u_1 + s v_1$	$x_1 = 0: bx_2 + cx_3 = d$
x_1 - x_3 – Ebene: $x_2 = 0$	$x_2 = 0 = p_2 + t u_2 + s v_2$	$x_2 = 0: ax_1 + cx_3 = d$

Bei Ebenendarstellungen in Parameterdarstellung entsteht aus der Bedingung, dass eine Koordinatenachse Null sein muss eine Bedingung für diese Komponente. Damit entsteht eine Gleichung mit zwei Unbekannten t und s . Diese Gleichung ist nach einer der beiden Variablen aufzulösen und in die Ebenengleichung einzusetzen. Es entsteht eine Vektorgleichung mit einem Parameter, die eine Geradengleichung darstellt.

Bei Ebenengleichungen in Koordinatendarstellung entfällt einer der drei Summanden einer Koordinatendarstellung. Es entstehen Koordinatendarstellung von Geraden, die es im dreidimensionalen Raum nicht gibt, das aber deshalb, weil diese Geraden jetzt nicht im Raum, sondern in der Ebenen liegen und da gibt es Koordinatendarstellungen für Geraden.

Nicht jede Ebene hinterlässt auf allen Koordinatenebenen Spurgeraden. Ebenen, die parallel zu Koordinatenebenen liegen haben nur auf zwei Koordinatenebenen Spurgeraden. Das gleiche trifft für Ebenen zu, die parallel zu Koordinatenachsen sind. Dazu gibt es in den vorhergehenden Kapiteln Ausführungen.

Beispiel: Ebene in Koordinatenform

$$E_1: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$

$$E_2: x_1 + 4x_2 - 19 = 0$$

$$x_1 + 4x_2 = 19$$

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 1$$

$$\frac{x_1}{19} + \frac{x_2}{\frac{19}{2}} = 1$$

Die Ebenen wurden umgeschrieben in die Achsenabschnittsform durch Division mit der rechten Seite der Gleichung und Umwandeln verbleibender Faktoren vor den x Koordinaten in einen Doppelbruch im Nenner. Die Werte im Nenner stellen den Achsenabschnittspunkt der Ebene mit der Achse dar, die über dem Bruchstrich steht.

Spurpunkte Ebene 1: $P_1(4/0/0)$; $P_2(0|2|0)$; $P_3(0/0/2)$

Ebene 2: $P_1(19/0/0)$; $P_2(0|4,75|0)$; P_3 existiert nicht

Spurgeraden in Koordinatenform

Spurgerade in x_1 - x_2 Koordinatenebene: $x_3 = 0$

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} = 1 \qquad \frac{x_1}{19} + \frac{x_2}{19} = 1$$

Spurgerade in x_1 - x_3 Koordinatenebene: $x_2 = 0$

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_3}{2} = 1 \qquad \frac{x_1}{19} = 1 \text{ (Parallele zur } x_3\text{-Achse)}$$

Spurgerade in x_2 - x_3 Koordinatenebene: $x_1 = 0$

$$\frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 1 \qquad \frac{x_2}{19} = 1 \text{ (Parallele zur } x_3\text{-Achse)}$$

Beispiel: Ebene in Parameterform

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Spurgerade in x_1 - x_2 Koordinatenebene: $x_3 = 0$

Das führt zu einer Bedingungsgleichung für die dritte Komponente:

$$-1 + 2u - 8v = 0$$

mit der Lösung: $u = \frac{1}{2} + 4v$. Dieser Wert ist für u in die Ebenengleichung einzusetzen:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (\frac{1}{2} + 4v) \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Damit entsteht ein geometrisches Gebilde mit einem skalaren Faktor, also eine Gerade.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - 5/2 \\ 0 + 3 \\ -1 + 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -20 + 3 \\ 24 + 2 \\ 8 - 8 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -17 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Die Gerade liegt in der $x_1 - x_2$ Ebene (x_3 Komponente ist 0)
- Der Aufpunkt liegt auf der Ebene ($u = \frac{1}{2}$ $v=0$)
- Der Richtungsvektor ist eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren der Ebene ($u = 4$, $v = 1$):

Damit handelt es sich eindeutig um die Spurgerade.

28.10.7. Spurpunkte von Ebenen

Wie bei Koordinatenebenen hinterlassen Ebenen auch bei Koordinatenachsen Schnittpunkte. Schnittpunkte mit Koordinatenachsen sind dadurch gekennzeichnet, dass die Werte von zwei Koordinatenachsen Null sind. Daraus resultieren die Bedingungen für ihre Berechnung.

	Parameterdarstellung	Koordinatendarstellung
	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$	$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
x_1 – Achse: $x_2 = x_3 = 0$	$x_2 = 0 = p_2 + t u_2 + s v_2$ $x_3 = 0 = p_3 + t u_3 + s v_3$	$x_2 = x_3 = 0: ax_1 = d$
x_2 – Achse: $x_1 = x_3 = 0$	$x_1 = 0 = p_1 + t u_1 + s v_1$ $x_3 = 0 = p_3 + t u_3 + s v_3$	$x_1 = x_3 = 0: bx_2 = d$
x_3 – Achse: $x_1 = x_2 = 0$	$x_1 = 0 = p_1 + t u_1 + s v_1$ $x_2 = 0 = p_2 + t u_2 + s v_2$	$x_1 = x_2 = 0: cx_3 = d$

Für Ebenengleichungen in Parameterdarstellung entsteht aus der Bedingung ein Gleichungssystem von zwei Gleichungen und zwei Variablen, das eine eindeutige Lösung hat, wenn die Ebenen nicht parallel zu einer Koordinatenebene ist. Aus der eindeutigen Lösung folgt für die dritte Koordinaten, die nicht Null ist, ein eindeutiger Schnittpunkt.

Bei Ebenengleichungen in Koordinatenform entsteht durch die Bedingung eine sehr rudimentäre Gleichung, die den Wert des Achsenschnittpunktes unmittelbar berechnen lässt.

Für die Spezialfälle von Ebenen, die parallel zu Koordinatenebenen oder – achsen sind, sind in dem jeweiligen Kapitel Ausführungen dazu gemacht.

28.11. Punktabstand und Projektion

Um geometrisch besser zu verstehen, was damit eigentlich berechnet wird, ist noch etwas Theorie zum Vektorraum notwendig. Man kann einen Vektorraum in Unterräume zerlegen, die rechtwinklig aufeinander stehen. Das benutzt man bereits bei der Komponentendarstellung eines Vektors. Man zerlegt damit einen Vektor in die drei Anteile der Koordinatenachsen, die rechtwinklig aufeinander stehen.

Für die Betrachtungen in diesem Kapitel ist es nur wichtig, daß man den Vektorraum in zwei Teilräume zerlegt, nämlich in den Vektorraum, den das Objekt beschreibt und den dazu senkrechten Vektorraum. In den hier betrachteten Fällen heißt das, ist das Objekt eine Ebene zerlegt man den Raum in diese Ebene und einer dazu senkrechten Geraden. Ist das Objekt eine Gerade, zerlegt man den Raum in diese Gerade und eine zugehörige senkrechte Ebene. Damit lassen sich alle Vektoren des dreidimensionalen Raumes in solche Teilräume zerlegen. Gleichzeitig haben Vektoren des ursprünglichen Raumes keinen Anteil im senkrechten Raum und umgekehrt. Die beiden Räume sind durchschnittsfremd. Andererseits kann man jeden beliebigen Vektor des gesamten Raumes eindeutig in zwei Teile zerlegen, bei dem der eine Teil dem Teilraum selbst angehört und der andere Teil dem dazu senkrechten Raum.

Was bringt das für dieses Thema ?

Betrachtet man einen beliebigen Vektor, so ist die **Projektion** dieses Vektors auf einen Unterraum der **Anteil des Vektors bei der Zerlegung in den Unterraum** und seinen orthogonalen Unterraum.

Andererseits ist der **Abstand des Vektors** (Endpunkt des Vektors) zum Unterraum der **Anteil des Vektors im orthogonalen Unterraum**.

Der orthogonale Unterraum einer Geraden ist eine Ebene, der orthogonale Unterraum einer Ebene ist eine Gerade. Der orthogonale Unterraum einer Geraden ist nicht wieder eine Gerade, weil sich dann nicht alle Vektoren des gesamten Raumes darstellen lassen würden. Die Summe der Dimension des Unterraumes und des orthogonalen Unterraumes muß immer die Dimension des Gesamtraumes sein.

Für den Abstand zu einer Geraden liegt der Abstandsvektor immer in einer senkrechten Ebene, für den Abstand zu einer Ebene liegt der Abstandsvektor immer in einer Geraden. Die Länge des jeweiligen Anteils ist der Abstand zum angegebenen Objekt.

Schlußfolgerungen:

Abstandsberechnungen zu Geraden oder Ebenen sind immer Zerlegungen eines Vektors in den Anteil des ursprünglichen Objektes und des Anteils des orthogonalen Objektes. Der Anteil des ursprünglichen Objektes ist die Projektion auf dieses Objekt, der Anteil des orthogonalen Objektes ist der Abstand zu diesem Objekt.

Damit ist Abstandsberechnung zu einer Geraden oder zu einer Ebene das gleiche, worauf es ankommt ist: Wie finde ich diese Zerlegung.

Projektionen auf den einen oder anderen Unterraum sind immer Aufgaben des Skalarprodukts.

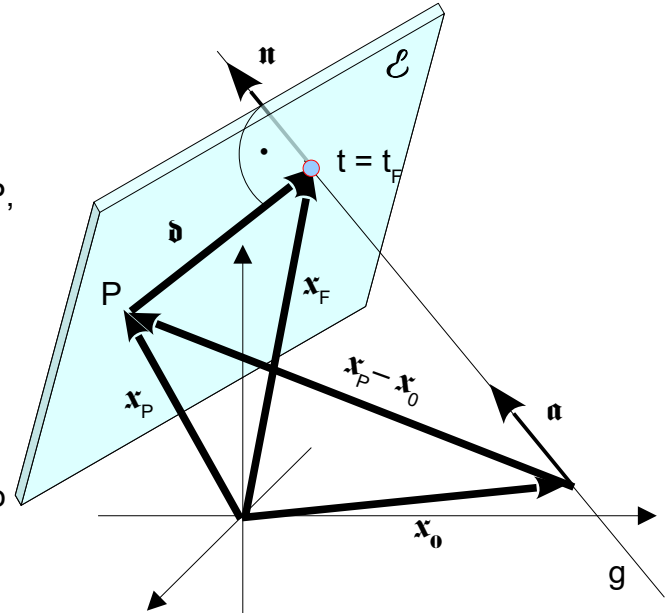
28.11.1. Der Abstand, Lotvektor, Fußpunkt von einem Punkt zu einer Geraden

Für eine Gerade im Raum ist nur eine Parameterdarstellung möglich, deshalb braucht man auch nur diese eine Darstellungsform betrachten. Das Problem der Geraden im Raum ist, dass es nicht nur eine senkrechte Richtung zu dieser Geraden gibt und dass man genau die senkrechte Richtung benötigt, die von dem vorgegebenen Punkt senkrecht auf die Gerade trifft.

Dazu soll die nebenstehende Abbildung betrachtet werden
(Vektoren sind als Fraktur-Buchstaben dargestellt):

Es gibt eine Gerade g und einen Punkt P , der durch seinen Ortsvektor \vec{x}_P gegeben ist.

- Zu dieser Geraden existiert eindeutig eine Ebene \mathcal{E} für die der Richtungsvektor der Geraden g ($= \vec{a}$) der Normalenvektor \vec{n} der Ebene ist.
- Gesucht ist jetzt die Ebene, die so verschoben ist, dass der Punkt P in dieser Ebene liegt.
- Von dieser Ebene ist der Durchstoßpunkt der Geraden durch diese Ebene zu bestimmen (\vec{x}_F). Dieser Punkt ist gleichzeitig Fußpunkt des Lotes auf die Gerade.
- Der Abstand von P zu \vec{x}_F ist der Abstand des Punktes P von der Geraden.



Diesen Weg gilt es umzusetzen. Dabei ist noch festzustellen:

- Der Vektor \vec{d} ist senkrecht zu \vec{a} und auch zu \vec{n} , da beide Vektoren identisch sind.
- nach der geometrischen Interpretation des Skalarproduktes ist das Skalarprodukt von $\vec{x}_P - \vec{x}_0$ mit dem Einheitsvektor \vec{d}^0 der Abstand von P zur Geraden.

Die zentrale Fragestellung ist die Berechnung des Faktor t_F zu Bestimmung des Durchstoßpunktes der Geraden durch die Ebene.

28.11.1.1. Berechnen des Lotfußpunktes als Durchstoßpunkt

Der Durchstoßpunkt der Geraden ist auf zwei Wegen erreichbar. Zum Ersten über den Punkt P und dem Differenzvektor d , zum zweiten über die Gerade mit einem geeigneten Parameter t_F :

$$\vec{x}_P + \vec{d} = \vec{x}_0 + t_F \vec{a}$$

Bildet man jetzt auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit dem Vektor a und berücksichtigt, dass das Skalarprodukt von a mit d gleiche Null ist, erhält man:

$$(\vec{x}_P - \vec{x}_0) \circ \vec{a} = t_F \cdot |\vec{a}|^2$$

Da $|\vec{a}|^2$ eine reelle Zahl ist, kann man durch diesen Wert dividieren und erhält aus den bekannten Größen den Wert für t_F :

$$\frac{(\vec{x}_P - \vec{x}_0) \circ \vec{a}}{|\vec{a}|^2} = t_F$$

Damit ist der Parameter für t_F gefunden und der Durchstoßpunkt kann berechnet werden. Der Durchstoßpunkt ist der Lotfußpunkt des Punktes P auf die Gerade.

$$\vec{x}_F = \vec{x}_0 + \frac{(\vec{x}_P - \vec{x}_0) \circ \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

Über diesen Durchstoßpunkt und dem Punkt P ist der Differenzvektor und damit der Abstand von P zur Geraden berechenbar. Der Differenzvektor ist der Lotvektor des Punktes P auf die Gerade, die Länge des Lotvektors ist der Abstand.

$$\vec{d} = \vec{x}_P - \vec{x}_F$$

28.11.1.2. Berechnung über Koordinatengleichung der Ebene

Von der gesuchten Ebene ist der Richtungsvektor der Geraden der zugehörige Normalenvektor. Damit kann mit Hilfe des Richtungsvektors die Koordinatengleichung der Ebene aufgestellt werden:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = d$$

Dabei sind a_1 , a_2 und a_3 bekannt, die x -Komponenten die Koordinaten eines Punktes auf der Ebene und noch unbekannt der Wert d . Da aber der Punkt P auf dieser Ebene liegen muss, kann man die Koordinaten von P in diese Gleichung einsetzen und erhält somit das notwendige d . Die Berechnung dieses Wertes d spiegelt genau die Verschiebung der Ebene in den Punkt P wider.

Damit ist die Ebenengleichung eindeutig bestimmt. Jetzt bleibt es nur noch, den Durchstoßpunkt zu berechnen. Dazu benutzt man ein Gleichungssystem, dass im Abschnitt Durchstoßpunkt Ebene-Gerade ausführlich behandelt wird.

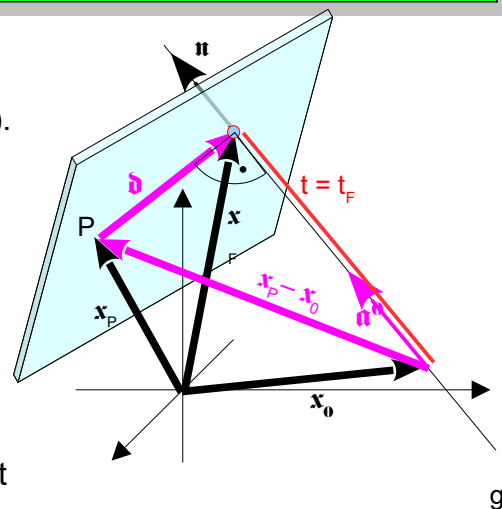
28.11.1.3. Berechnen des Fußpunktes als Projektion

Der Wert im Zähler ist die Projektion des Vektors $\vec{x}_P - \vec{x}_0$ auf den Richtungsvektor \vec{a} (Skalarprodukt). Damit erhält man einen Vektor vom Aufpunkt \vec{x}_0 zum Durchstoßpunkt \vec{x}_F

Damit bilden der Stützvektor \vec{x}_0 eine geeignete Verlängerung des Richtungsvektors \vec{a} und der Abstandsvektor \vec{d} ein rechtwinkliges Dreieck.

Projiziert man den Verbindungsvektor $\vec{x}_P - \vec{x}_0$ auf den Einheitsvektor des Richtungsvektors \vec{a}^0 , erhält man den Abstand des Fußpunktes vom Stützvektor \vec{x}_0 und damit den Faktor t_F , um von \vec{x}_0 zum Fußpunkt \vec{x}_F zu gelangen.

$$(\vec{x}_P - \vec{x}_0)_{\vec{a}} = \vec{x}_F - \vec{x}_0 = t_F \cdot \vec{a}$$



Der Vektor als Index auf der linken Seite soll die Projektion auf den Vektor \vec{a} darstellen.

Für die Projektionslänge ist jeweils das Skalarprodukt mit dem Einheitsvektor zu bilden, auf den projiziert wird, in diesem Fall also $\vec{x}_p - \vec{x}_0$ auf den Einheitsvektor in Richtung \vec{a} . Damit erhält man die Projektionslänge. Multipliziert man diese Länge wieder mit dem Einheitsvektor, erhält man den Verbindungsvektor in der gesuchten Länge:

$$(\vec{x}_p - \vec{x}_0)_{\vec{a}} = \vec{x}_F - \vec{x}_0 = ((\vec{x}_p - \vec{x}_0) \circ \vec{a}^0) \cdot \vec{a}^0$$

oder aufgelöst nach \vec{x}_F

$$\vec{x}_F = \vec{x}_0 + ((\vec{x}_p - \vec{x}_0) \circ \vec{a}^0) \cdot \vec{a}^0$$

Damit erhält man für den Fußpunkt die gleiche Gleichung wie unter 28.11.1.1., wenn man bedenkt, daß dort die Division durch $|\vec{a}|^2$ nur dazu dient, daß von den beiden Vektoren \vec{a} jeweils die Einheitsvektoren $|\vec{a}|^0$ benutzt werden.

28.11.1.4. Berechnung über Differenzialrechnung

Den Abstand eines Punktes von einer Geraden kann man auch so interpretieren: Man verbindet alle Punkte der Geraden mit dem Punkt, zu dem der Abstand bestimmt werden soll und dann sucht man den kleinsten Abstand. Der Abstand zweier Punkte im Raum ist formelmäßig sehr einfach zu erfassen:

$$d(p;x) = \sqrt{(p_1 - x_1)^2 + (p_2 - x_2)^2 + (p_3 - x_3)^2}$$

In diese Formel sind für p die Koordinaten des Punktes P und für x die Komponenten der Geradengleichung einzusetzen, was dann zu folgender Gleichung führt:

$$d(p;x) = \sqrt{(p_1 - (x_{01} + t a_1))^2 + (p_2 - (x_{02} + t a_2))^2 + (p_3 - (x_{03} + t a_3))^2}$$

Dabei sind die Komponenten x_{0i} die Komponenten des Aufpunktes und die Komponenten a_i die Komponenten des Richtungsvektors. Als Ergebnis ist eine Funktion in dem Parameter t entstanden. Von dieser Funktion ist die erste Ableitung nach t zu bilden und diese dann Null zu setzen. Der so errechnete Wert von t liefert den Parameter desjenigen Punktes, der zum Punkt P den geringsten Abstand hat.

$$d(p;x) = \sqrt{(\vec{x}_p - (\vec{x}_0 + t \cdot \vec{a}))^2} = \sqrt{((\vec{x}_p - \vec{x}_0) + t \cdot \vec{a})^2}$$

Ausmultipliziert nach binomischer Formel ergibt:

$$d(p;x) = \sqrt{(\vec{x}_p - \vec{x}_0)^2 + 2 \cdot t \cdot (\vec{x}_p - \vec{x}_0) \vec{a} + t^2 \cdot (\vec{a})^2}$$

Für das Nullsetzen der Ableitung ist nur der Zähler der Ableitung zuständig, damit fällt der Wurzelausdruck für diese Berechnung weg. Ausschlaggebend ist die innere Ableitung der Wurzel:

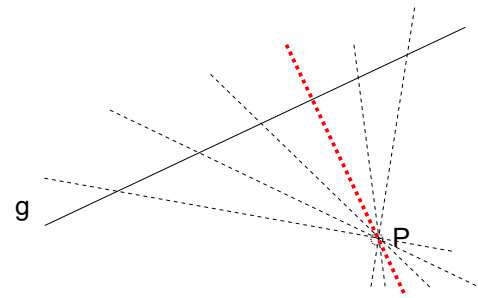
$$2 \cdot (\vec{x}_p - \vec{x}_0) \circ \vec{a} + 2 \cdot t \cdot (\vec{a})^2 = 0$$

Löst man die Gleichung nach t auf, erhält man wieder:

$$\frac{(\vec{x}_p - \vec{x}_0) \circ \vec{a}}{|\vec{a}|^2} = t_F$$

28.11.1.5. Bestimmung der senkrechten Schnittgeraden

Analog zu den Überlegung von 4 und 5 kann man auch folgende Überlegung anstellen. Es werden alle Geraden zwischen dem Punkt P und einem Geradenpunkt aufgestellt. Alle diese Geraden liegen zwangsläufig in einer Ebene (s. Lösungsweg 4). Von allen diesen Geradengleichungen ist diejenige zu suchen, deren Richtungsvektor senkrecht zur vorgegebenen Geraden ist.



$$\vec{x} = \vec{x}_P + t(\vec{x}_P - (\vec{x}_0 + \mathbf{s} \cdot \vec{r}))$$

Der Richtungsvektor dieser Geraden soll senkrecht zum Richtungsvektor der Ausgangsgeraden sein.

$$(\vec{x}_P - (\vec{x}_0 + \mathbf{s} \cdot \vec{r})) \circ \vec{r} = 0$$

Dieses Skalarprodukt liefert eine Gleichung in s.

$$(\vec{x}_P - \vec{x}_0) \circ \vec{r} + \mathbf{s} \cdot \vec{r} \circ \vec{r} = 0$$

$$\mathbf{s} = \frac{(\vec{x}_P - \vec{x}_0) \circ \vec{r}}{|\vec{r}|^2}$$

die bereits aus den vergangenen Abschnitte bekannte Formel.

Für dieses s ist der Richtungsvektor $\vec{x}_P - (\vec{x}_0 + \mathbf{s} \cdot \vec{r})$

senkrecht zum Vektor \vec{r} und damit der gesuchte Abstandsvektor von P zur Geraden g.

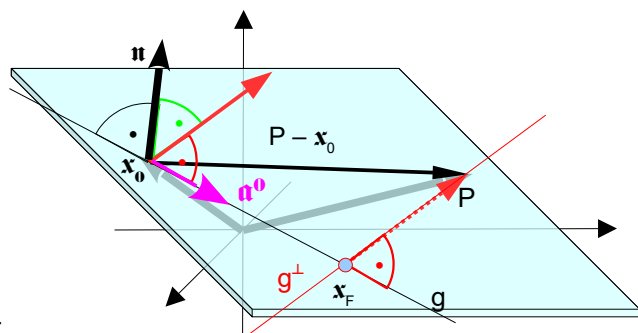
28.11.1.6. Abstandsberechnung über zweimal senkrechte Vektoren

Beim berechnen des Abstandes eines Punktes von einer Geraden benötigt man den senkrechten Abstand von der Geraden und zwar den, der in Richtung des Punktes geht. Da es aber bei einer Geraden im Raum unendlich viele senkrechte Vektoren gibt besteht das Problem im Herausfinden dieser einen notwendigen Richtung. Im Lösungsweg 1 wurde das Problem dadurch gelöst, dass man eine zur Geraden senkrechte Ebene konstruiert hat, die außerdem durch den gegebenen Punkt verläuft. Mit dem Durchstoßpunkt der Geraden hat man auf dieser Ebene den Abstand der beiden Punkte gefunden.

Hier soll eine weitere Möglichkeit gegeben werden, wie man den Abstand eines Punktes zu einer Geraden bestimmen kann. Diese Methode ist besonders bei Spiegelungen nützlich.

Wenn eine Gerade g gegeben ist und ein Punkt P, der nicht auf der Geraden liegt, dann kann man die Gerade und den Punkt

in eine gemeinsame Ebene legen. Dazu benutzt man den Richtungsvektor \vec{a} der Geraden und den Verbindungsvektor des Aufpunkts der Geraden mit Punkt P $\vec{P} - \vec{x}_0$.



Zu dieser Ebene lässt sich ein Normalenvektor \vec{n} bestimmen, der senkrecht auf dieser Ebene steht. Jetzt lässt sich zu dem Vektor \vec{n} und dem Richtungsvektor \vec{a} ebenfalls ein senkrechter Vektor finden. Welche Eigenschaften hat dieser Vektor:

1. Der Vektor ist senkrecht zu \vec{n} und ist deshalb ein Richtungsvektor der Ebene.
2. Der Vektor ist senkrecht zu \vec{a} und gibt deshalb genau die Richtung des senkrechten Abstandes zu g in der Ebene mit P an.

(In der Zeichnung rot eingezeichnet)

Jetzt lässt sich eine Gerade g^\perp in der Ebene bestimmen, für die dieser Vektor Richtungsvektor ist und die durch den Punkt P geht. Diese Gerade steht senkrecht zur Geraden g und hat mit dieser einen Schnittpunkt. Dieser Schnittpunkt ist der Fußpunkt des Lotes von P auf die Gerade g . Die Länge dieses Lotvektors ist der Abstand des Punktes P zur Geraden g .

Trägt man den Abstand von P zu diesem Fußpunkt auf der anderen Seite der Geraden g^\perp ab, erhält man den Spiegelpunkt zu P .

28.11.2. Der Abstand, Lotvektor, Fußpunkt von einem Punkt zu einer Ebene

Bei der Abstandsberechnung erfolgt immer die Projektion eines Differenzvektors zwischen bekannten Punkten auf den Normalenvektor. Die Projektion liefert das Skalarprodukt. Wenn der Vektor, auf den projiziert wird, ein Einheitsvektor ist, dann liefert die Projektion die Länge des Abstandes. Dieser Zusammenhang wird ausführlich im Abschnitt zum Skalarprodukt 5.3. erläutert.

Ausgangspunkt ist die Ebenengleichung in Normalform:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \circ \vec{n}^0 = 0$$

Gleichzeitig soll hier schon der Normalen**einheits**vektor eingesetzt werden. Andernfalls ist durch den Betrag des Vektors \vec{n} zu dividieren.

Jetzt wird für den variablen Vektor \vec{x} in der Ebenengleichung der Ortsvektor \vec{x}_p des Punktes eingesetzt, für den der Abstand berechnet werden soll. Damit erhält man folgende Gleichung:

$$(\vec{x}_p - \vec{x}_0) \circ \vec{n}^0 = d$$

Genau dieses Skalarprodukt liefert die Projektion des Differenzvektors $(\vec{x}_p - \vec{x}_0)$ auf den Normaleneinheitsvektor und damit den Abstand d des Punktes von der Ebene. Soll der Abstandsvektor \vec{d} bestimmt werden, ist der berechnete Abstand mit dem Normaleneinheitsvektor \vec{n}^0 zu multiplizieren. Dabei ist aber zu beachten, dass der berechnete Abstand mit dem aus dem Skalarprodukt entstanden Vorzeichen zu benutzen ist, da das Vorzeichen in Abhängigkeit der Richtung von \vec{n}^0 entsteht und die Seite der Ebene bestimmt, in der der Punkt liegt. Auf der Seite, in die der Normalenvektor zeigt, oder auf der anderen Seite.

Gleichzeitig entsteht aus $(\vec{x}_p + \vec{d})$ der Fußpunkt des Lotes von P auf die Ebene.

28.11.2.1. Lösungsweg 2: Abstandsberechnung ohne Fußpunkt

Soll nur der Abstand berechnet werden, kann man sich mit der Koordinatenform auch einen einfacheren Weg suchen. Alle Abstandsberechnungen benötigen den senkrechten Abstand und damit die Richtung des Normalenvektors der Ebene. Deshalb ist der Ausgangspunkt die Koordinatendarstellung der Ebene.

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

Man könnte die Gleichung auch umschreiben in die Form

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 - d = 0$$

Die Gleichung **gilt für alle Punkte auf der Ebene**. Für alle Punkte, die nicht auf der Ebene liegen wird ein anderer Wert als 0 herauskommen. Außerdem ist bekannt, dass die Koordinaten a, b, c die Komponenten des Normalenvektors sind und, dass die Koordinatendarstellung ein Skalarprodukt ist. Damit handelt es sich hier um die Projektion des Vektors (x_1, x_2, x_3) auf den Vektor (a, b, c) . Wenn der Vektor, auf den projiziert wird ein Einheitsvektor ist, dann stellt das Skalarprodukt den senkrechten Abstand dar (s. dazu Erklärungen zum Skalarprodukt). Damit ist in diesem Fall der Vektor (a, b, c) zum Einheitsvektor zu machen. Der Betrag dieses Vektors ist:

$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Damit ist die linke Seite der Gleichung durch den Wurzelausdruck zu dividieren.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot x_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot x_2 + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot x_3 - \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

Diese Gleichung gilt für alle Punkte (x_1, x_2, x_3) auf der Ebene. Für alle anderen Punkte, die nicht auf der Ebene liegen ist der von 0 verschiedene Wert der Abstand des Punktes von der Ebene.

28.11.2.2. Der Abstand des Ursprungs von der Ebene

Setzt man nun auf der linken Seite für den Punkt, von dem man den Abstand berechnen soll den Ursprung ein, kommt auf der rechten Seite der Abstand des Ursprungs heraus:

$$\frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Damit ist nicht d der Abstand zu Ursprung, sondern der auf den Einheitsvektor normierte Wert von d . Ob der tatsächlich berechnete Wert positiv oder negativ ist, hängt davon ab, ob der Ursprung auf der Seite der Ebenen liegt, in die der Normalenvektor zeigt, oder auf der anderen.

28.12. Lagebeziehung zu Geraden im Raum

Zwei Geraden in der Ebene haben drei verschiedene Möglichkeiten zueinander zu liegen: Sie sind identisch, parallel oder schneiden sich. Für Geraden im Raum gibt es noch eine vierte Möglichkeit: sie sind windschief. darunter ist zu verstehen, dass sie nicht parallel sind, aber auch keinen Schnittpunkt besitzen. Eine Eigenschaft, die in der Ebene nicht möglich ist.

Es stellt sich nun die Frage, wie kann man diese Eigenschaften bestimmen. Dazu benutzt man ein zweistufiges Schema, die Geraden zu untersuchen. Als erstes untersucht man, ob die Geraden parallel/identisch sind oder nicht, wenn sie das nicht sind, können sie nur noch windschief sein oder einen Schnittpunkt haben. Für diese Untersuchung ist das Vorgehen nach folgendem Schema hilfreich:

Die beiden Geraden liegen in Parameterform vor.

1. Frage: Sind die Richtungsvektoren linear abhängig

Bei zwei Vektoren ist das nur dann der Fall, wenn ein Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist.
Ist diese Frage mit **Ja** zu beantworten dann ist als nächstes zu klären:

Frage 2a: Sind die Geraden parallel oder identisch.

Die Parallelität ist bereits bewiesen. Um zu beweisen, ob die Geraden identisch sind muss man nachweisen ob der Aufpunkt der Geraden 2 auch auf der Geraden 1 liegt, oder ob der Aufpunkt der Geraden 1 auch auf der Geraden 2 liegt. Um das nachzuweisen ist die Lösung eines Gleichungssystems notwendig.

$$\vec{x}_{P_2} = \vec{x}_{P_1} + t \cdot \vec{a}_1$$

oder

$$\vec{x}_{P_1} = \vec{x}_{P_2} + s \cdot \vec{a}_2$$

Wenn es für dieses Gleichungssystem eine Lösung gibt, sind die Geraden identisch, sonst sind sie nur parallel. Es handelt sich dabei jeweils um drei Gleichungen mit einer Unbekannten. Es reicht also eine Zeile aus dem Gleichungssystem zu betrachten und einen Wert t oder s zu berechnen. Sind für diesen Wert t oder s auch die anderen Zeilen gültig, dann sind die Geraden identisch.

Ist die erste Frage mit **Nein** zu beantworten, dann ist als nächstes zu klären:

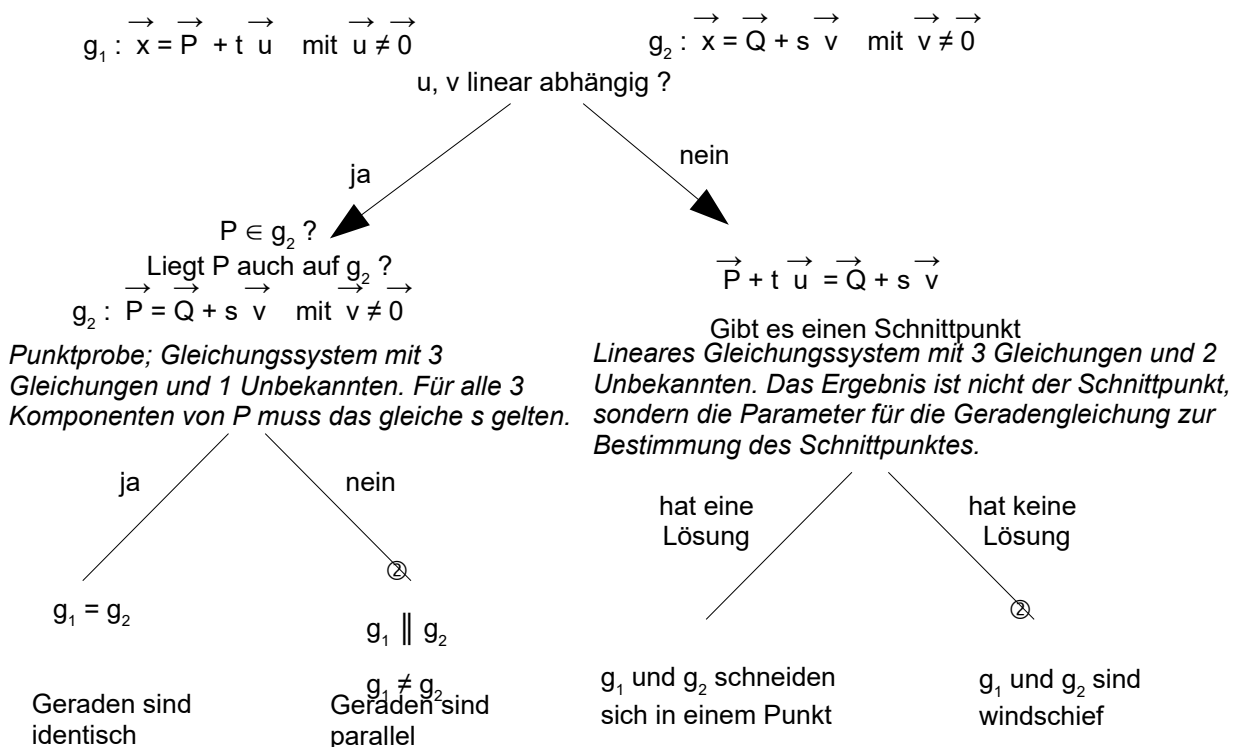
Frage 2b: Haben die Geraden einen Schnittpunkt oder sind sie windschief.

Die Beantwortung dieser Frage führt ebenfalls zu einem Gleichungssystem.

$$\vec{x}_{P_1} + t \cdot \vec{a}_1 = \vec{x}_{P_2} + s \cdot \vec{a}_2$$

Dieses Gleichungssystem berechnet einen eventuellen Schnittpunkt. Gibt es für dieses Gleichungssystem eine Lösung, dann haben die beiden Geraden einen Schnittpunkt. Dabei handelt es sich hier um ein System mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten. Auch hier könnte man zwei Gleichungen auswählen und die Parameter t und s berechnen. Erfüllen diese Parameter auch die dritte Gleichung, dann existiert ein Schnittpunkt, sonst sind sie windschief.

Übersicht:



Während die Entscheidung über parallele oder identische Geraden relativ einfach zu finden ist, ist die Entscheidung zwischen windschief und Schnittpunkt zumindest rechnerisch aufwendiger. Mit Hilfe des GTR kann man dafür ein spezielles Gleichungssystem nutzen. Wenn sich die Geraden schneiden, dann bilden sie auch eine Ebene. Damit liegen die beiden Richtungsvektoren und der Verbindungsvektor der beiden Aufpunkte(!) in dieser Ebene. Damit reduziert sich die Frage nach dem Schnittpunkt auf die Frage: Sind die beiden Richtungsvektoren und der Verbindungsvektor zwischen den beiden Aufpunkten linear abhängig oder nicht. Die Frage wird mit einem Gleichungssystem entschieden. Die ersten beiden Spalten des Gleichungssystems sind die beiden Richtungsvektoren, die dritte Spalte der Differenzvektor der Aufpunkte. Die rechte Seite besteht aus 0.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{u}_3 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{p}_3 - \mathbf{q}_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar, dann gibt es nur die Null-Lösung, also sind die Vektoren linear unabhängig, es gibt keinen Schnittpunkt, die Geraden sind windschief. Ist die letzte Zeile komplett 0, gibt es eine von 0 verschiedene Lösung, die Vektoren sind linear abhängig, die Geraden haben einen Schnittpunkt.

28.12.1. Schnittpunkt zweier Geraden

Wenn zwei Geraden im Raum nicht parallel sind, stellt sich die Frage: Schneiden sie sich, oder sind sie windschief. Da man grundsätzlich nicht nachweisen kann, ob zwei Geraden windschief sind, muss man die beiden Geraden auf einen Schnittpunkt untersuchen. Gibt es einen solchen Schnittpunkt, dann schneiden sie sich, gibt es einen solchen Schnittpunkt nicht, sind sie windschief. Damit beginnt die Untersuchung immer mit der Berechnung des Schnittpunktes. Da Geraden im \mathbb{R}^3 nur eine Parameterdarstellung besitzen, ist es nur nötig den Fall zu untersuchen, in dem beide Geraden in Parameterdarstellung gegeben sind.

Die Schnittpunktberechnung heißt wieder: der gesuchte Punkt muss beide Geradengleichungen erfüllen.

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{x}_{P_1} + t \cdot \vec{a}_1 \\ \vec{x} &= \vec{x}_{P_2} + s \cdot \vec{a}_2\end{aligned}$$

Damit führt die Aufgabestellung zu einem Gleichungssystem, in dem die beiden Geradengleichungen gleich gesetzt werden:

$$\vec{x}_{P_1} + t \cdot \vec{a}_1 = \vec{x}_{P_2} + s \cdot \vec{a}_2$$

Es entsteht ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Für dieses Gleichungssystem ist eine Lösung gesucht. Das Gleichungssystem muss nicht unbedingt lösbar sein, es kann bei der Lösung ein Widerspruch entstehen, der gleichbedeutend damit ist, dass die Geraden sich nicht schneiden, sondern windschief sind.

Beispiel

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aus den Richtungsvektoren ist schnell zu erkennen, dass sie nicht parallel sind, und das deshalb die Prüfung eines Schnittpunktes durchzuführen ist. Dazu sind die beiden Geraden gleichzusetzen, was zu folgendem Gleichungssystem führt:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{aligned}7 - 7s &= 18 + 3t & -7s - 3t &= 11 \\ 1 + s &= 9 - 10t & \Rightarrow s + 10t &= 8 \\ 8 - 3s &= 11 + 3t & -3s - 3t &= 3\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem besitzt eine Lösung: $t = 1$ und $s = -2$

Durch Einsetzen der ermittelten Werte in die jeweilige Geradengleichung erhält man in beiden Gleichungen unabhängig voneinander den Schnittpunkt:

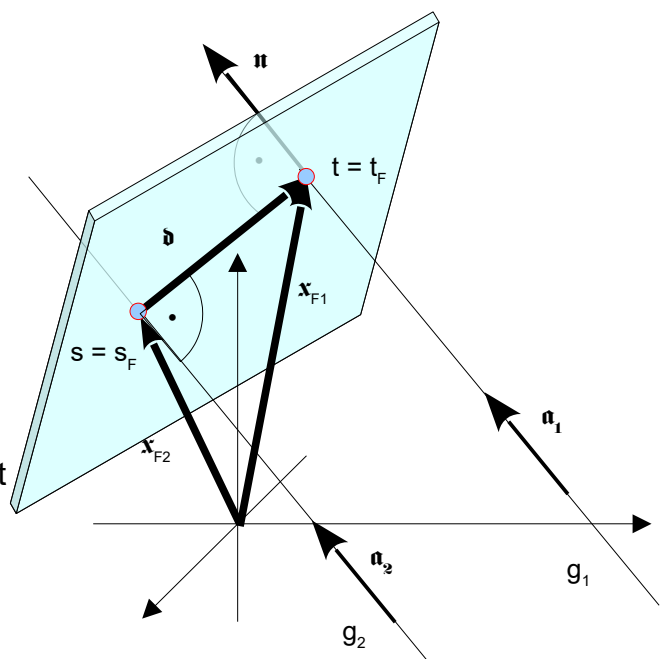
$$\text{Gerade 1: } \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix}$$

28.12.2. Abstand zweier paralleler Geraden

Haben zwei Geraden keinen Schnittpunkt, dann ist oft die Frage nach dem Abstand der beiden Geraden gestellt. Abstandsberechnungen machen nur Sinn, wenn die Geraden auch getrennt voneinander sind. Für parallele Geraden heißt das, sie dürfen nicht identisch sein, sondern müssen echt parallel sein.

In der nebenstehenden Abbildung sind zwei parallele Geraden zu sehen. Im vorhergehenden Kapitel wurde bereits erläutert, dass es zu einer Geraden im Raum genau eine Ebene gibt, für die der Richtungsvektor der Geraden der Normalenvektor der Ebene ist. In der Abbildung als n eingezeichnet. Da die Geraden parallel sind steht natürlich auch der Richtungsvektor der zweiten Geraden senkrecht auf der Ebene. Damit ist eine Möglichkeit den senkrechten Abstand zwischen den beiden Geraden zu bestimmen, den Abstand zwischen den beiden Durchstoßpunkten zu berechnen. Diese Durchstoßpunkte erhält man jeweils für einen bestimmten Parameterwert t oder s , in der Abbildung als t_F und s_F bezeichnet.



Dazu benutzt man die Ebene in der HNF, da der Normalenvektor identisch mit dem Richtungsvektor einer Geraden ist.

Dabei ist P_1 der Aufpunkt $(\vec{x} - \vec{x}_{P_1}) \circ \vec{a}_1 = 0$ der Geraden g_1 , da es bei parallelen Geraden gleichgültig ist, an welcher Stelle der Abstand berechnet wird. Damit ist gleichzeitig ein Durchstoßpunkt durch die Ebene gefunden, da dieser Punkt P_1 dann die Ebenengleichung und die Geradengleichung g_1 erfüllt und es ist nur noch der Durchstoßpunkt mit der Geraden g_2 zu bestimmen.

Die Geraden sind in Parameterform gegeben: $\vec{x} = \vec{x}_{P_2} + s \cdot \vec{a}_2$

Für den Durchstoßpunkt müssen die beiden Ortsvektoren \vec{x} auf den gleichen Punkt zeigen. Deshalb wird die Parameterform der Geradengleichung in die Ebenengleichung für den Ortsvektor \vec{x} eingesetzt.

$$(\vec{x}_{P_2} + s \cdot \vec{a}_2 - \vec{x}_{P_1}) \circ \vec{a}_1 = 0$$

Die beiden Aufpunkte und die Richtungsvektoren sind bekannt, so dass aus der Ebenengleichung jetzt eine Gleichung zur Bestimmung des Parameters s entstanden ist. Es ist eine Gleichung mit einer Unbekannten. Soll diese Gleichung allgemein nach s umgestellt werden ergibt sich:

$$s = \frac{(\vec{x}_{P_2} - \vec{x}_{P_1}) \circ \vec{a}_1}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = s_F$$

(Die Beträge der beiden Vektoren im Nenner entstehen aus dem Skalarprodukt der beiden Vektoren. Da beide in die gleiche Richtung zeigen ist das Skalarprodukt gleich dem Produkt der Beträge, denn der \cos des eingeschlossenen Winkels $- 0^\circ$ ist gleich 1.) Wird dieser Wert s_F in die Geradengleichung 2 eingesetzt ergibt sich:

$$\vec{x}_{F_2} = \vec{x}_{P_2} + \left((\vec{x}_{P_1} - \vec{x}_{P_2}) \circ \vec{a}_1 \right) \cdot \vec{a}_2^0$$

(ACHTUNG! das erste Produkt in der Klammer ist ein Skalarprodukt, danach ist dieser Wert mit dem Einheitsvektor in Richtung a_1 zu multiplizieren. Das ist dann lediglich eine Verlängerung den Vektors a_2^0 .)

Damit ist der Durchstoßpunkt der Geraden g_2 bestimmt und es muss noch der Differenzvektor zwischen dem Aufpunkt der Geraden g_1 : \vec{x}_{P_1} und dem Durchstoßpunkt der Geraden g_2 : \vec{x}_{F_2} bestimmt werden.

Dazu ist der Differenzvektor zu bilden und von diesem Differenzvektor die Länge zu bestimmen.

28.12.3. Abstand windschiefer Geraden

Die zweite Möglichkeit, dass Geraden einen Abstand besitzen ist, wenn sie windschief sind. Sie sind dann nicht parallel und haben auch keinen Schnittpunkt. Das ist die schwierigste Aufgabe beim Berechnen von Abständen. Die Schwierigkeit besteht darin, die Richtung des kürzesten senkrechten Abstand zwischen beiden Geraden zu bestimmen, da zu jeder Geraden beliebig viele senkrechte Richtungen existieren.

In der Abbildung sind zwei Geraden g_1 und g_2 gegeben. Jede dieser Geraden lässt sich eine Ebene zuordnen, so dass die Gerade in dieser Ebene liegt und die beiden Ebenen parallel sind. Solche Ebenen kann man einfach konstruieren, indem man von der ersten Geraden den Aufpunkt nimmt und die Richtungsvektoren der beiden Geraden als Richtungsvektoren der Ebene benutzt. Im zweiten Fall nimmt man den Aufpunkt der Geraden g_2 und die beiden Richtungsvektoren der Geraden. Dann besitzen die beiden Ebenen den gleichen Normalenvektor und sind somit parallel. Bei parallelen Ebenen ist der Abstand der beiden Ebenen an allen Stellen mit dem Abstand der beiden Geraden identisch, außerdem gibt der Normalenvektor die gesuchte senkrechte Richtung für beide Geraden.

Es wird der Normalenvektor \vec{n} aus den beiden Richtungsvektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 berechnet, da die Richtung von \vec{n} übereinstimmt mit der Richtung des Abstandsvektors \vec{d} . Aus der Abbildung leicht zu entnehmen ist folgende Beziehung:

$$\vec{x}_{F_1} + \vec{d} = \vec{x}_{F_2}$$

$$\vec{d} + \vec{x}_{F_1} - \vec{x}_{F_2} = \vec{0}$$

Die beiden Fußpunkte, die der Abstandsvektor verbindet sind mit dem entsprechenden Parameterwerten durch die Geradengleichungen festgelegt:

$$\vec{d} + \vec{x}_{P_1} + \mathbf{s} \cdot \vec{a}_1 - \vec{x}_{P_2} - \mathbf{t} \cdot \vec{a}_2 = \vec{0}$$

Beachtet man, dass der Abstandvektor \vec{d} in Richtung des Normalenvektors \vec{n} verläuft, aber die beiden Richtungsvektoren senkrecht zu \vec{n} sind, dann ergibt das Skalarprodukt der beiden Seiten mit dem Vektor \vec{n} :

$$\vec{d} \circ \vec{n} + (\vec{x}_{P_1} - \vec{x}_{P_2}) \circ \vec{n} = \vec{0}$$

Bringt man den zweiten Summanden auf die rechte Seite (Aufpunkte vertauscht):

$$\vec{d} \circ \vec{n} = (\vec{x}_{P_2} - \vec{x}_{P_1}) \circ \vec{n}$$

Die beiden Skalarprodukte werden durch den Betrag des Vektors \vec{n} dividiert. Damit entstehen die Skalarprodukte mit dem Einheitsvektor:

$$\vec{d} \circ \vec{n}^0 = (\vec{x}_{P_2} - \vec{x}_{P_1}) \circ \vec{n}^0$$

Da das linke Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren gebildet wird, die in gleicher Richtung verlaufen und der cos des eingeschlossenen Winkels damit =1 ist, und der Betrag des Vektors \vec{n}^0 als Einheitsvektors auch gleich 1 ist, ist das Skalarprodukt identisch mit dem Betrag von $|\vec{d}|$. Somit ist des Länge des Abstandes bekannt.

$$|\vec{d}| = (\vec{x}_{P_2} - \vec{x}_{P_1}) \circ \vec{n}^0$$

Die Richtung des Abstandsvektors ist in Richtung von \vec{n} , also ist ein Vektor in Richtung \vec{n} gesucht mit der Länge $|\vec{d}|$:

$$\vec{d} = |\vec{d}| \cdot \vec{n}^0 = ((\vec{x}_{P_2} - \vec{x}_{P_1}) \circ \vec{n}^0) \cdot \vec{n}^0$$

Für die Richtung wird der Einheitsvektor von \vec{n} benutzt, der liefert dann keinen verzerrenden Betrag für die Größe des Abstandes und die Länge des Abstandes wird aus $|\vec{d}|$ gebildet.

Damit ist der Abstand und der Abstandsvektor der windschiefen Geraden bestimmt. Für die Bestimmung der beiden Fußpunkte, das sind diejenigen auf der Geraden g_1 und g_2 für die dieser kürzeste Abstand erreicht wird, setzt man wieder folgendes Gleichung an:

$$\vec{d} + \vec{x}_{P_1} + \mathbf{s} \cdot \vec{a}_1 - \vec{x}_{P_2} - \mathbf{t} \cdot \vec{a}_2 = \vec{0}$$

Zur Berechnung von \vec{d} wurde die Gleichung mit \vec{n} durchmultipliziert, was dazu führte, dass die beiden Linearfaktoren s_F und t_F verschwunden sind. Das führt jetzt natürlich nicht zum Ziel, da die beiden Parameterwerte gebraucht werden, um den Fußpunkt auf der Ebene zu bestimmen. Aus der angegebenen Vektorgleichung wird jetzt ein Gleichungssystem für die Variablen s_F und t_F gemacht, da der Vektor \vec{d} jetzt bekannt ist.

$$\mathbf{s}_F \cdot \vec{a}_1 - \mathbf{t}_F \cdot \vec{a}_2 = \vec{x}_{P_2} - \vec{x}_{P_1} - \vec{d}$$

Auf der rechten Seite des Gleichungssystems stehen feste Vektoren und auf der linken Seite stehen die Richtungsvektoren mit den gesuchten Linearfaktoren. Damit ist ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit zwei Variablen entstanden.

28.12.4. Projektion einer Geraden auf eine Koordinatenebene

Eine allgemeine Gerade hat mit jeder Koordinatenebene einen Schnittpunkt. Es stellt sich jetzt die Frage, wenn man entlang der Koordinatenachsen paralleles Licht auf die Gerade fallen lässt, entsteht in einer Koordinatenebene eine Gerade, die nur noch zwei Komponenten in ihren Vektoren enthält, die dritte – die Richtung des parallelen Lichteinfalls – ist 0. Ein analoges Vorgehen gibt es bei Spurgeraden in den Koordinatenebenen, nur dass Geraden keine tatsächlichen Spurgeraden hinterlassen.

Aus einer Geradengleichung $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entsteht als Projektion auf die

x_1 - x_2 -Koordinatenebene die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

dabei handelt es sich immer noch um eine Gerade im dreidimensionalen Raum, die aber in der x_1 - x_2 Ebenen liegt. Analog kann man das für die anderen Koordinatenebenen durchführen. Diese Vorüberlegungen sollen jetzt für das folgende Thema der Spiegelung mit benutzt werden.

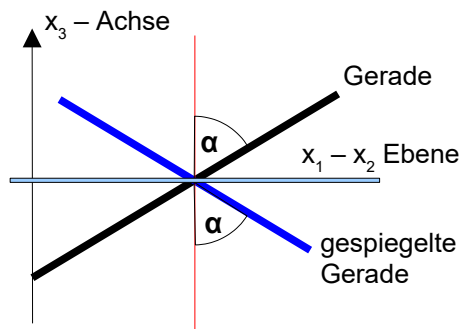
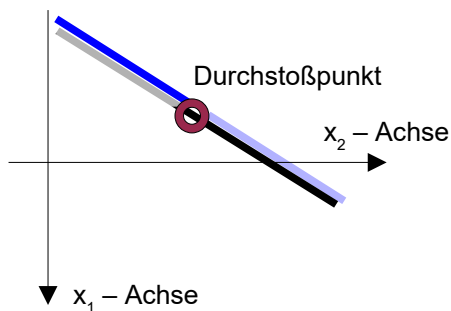
28.12.5. Spiegelung einer Geraden an einer Koordinatenebene

Einige Gebiete, z.B. die Optik benötigt sehr oft Aussagen über Spiegelung und Reflexion. Gleichzeitig sind einfallende Lichtstrahlen Vektoren, da sie außer einer Wellenlänge auch eine Richtung besitzen, die sich unterscheiden kann. Also liegt es nahe, sich bei diesem Problem der Vektorrechnung zu bedienen.

Zur Berechnung der Spiegelung bedient man sich allgemein folgenden Vorgehens: Es wird der Durchstoßpunkt der Geraden durch die Koordinatenebene berechnet und dann ein weiterer Punkt der Gerade an der Koordinatenebene gespiegelt. Diese Spiegelung erreicht man dadurch, indem man bei der Koordinate, die nicht zur Spiegelungsebene gehört das Vorzeichen ändert. Damit hat man zwei Punkte die auf der gespiegelten Geraden liegen und man kann eine Geradengleichung aufstellen.

Das Problem soll jetzt über die Projektion der Geraden auf die Koordinatenebene gelöst werden. Damit ist zuerst die Bestimmung eines Punktes vorzunehmen und anschließend der Richtungsvektor zu bestimmen. Der Punkt der gespiegelten Geraden ist mit dem Durchstoßpunkt schnell gefunden. Eine Koordinate der Geraden muss 0 sein, daraus folgt eine Gleichung zur Bestimmung des Geradenparameters und daraus die beiden anderen Koordinaten des Durchstoßpunktes.

Seitenansicht

Draufsicht $x_1 - x_2$ - Ebene ; $x_3 = 0$ 

An den nebenstehenden Ansichten ist zu erkennen, dass die Gespiegelte Gerade die gleiche Projektionsgerade in der x_1-x_2 -Ebene besitzt, wie die Ausgangsgerade. Damit müssen die x_1 und x_2 Komponenten des Richtungsvektors mit denen der Ausgangsgeraden identisch sein (Natürlich nicht in der Länge, aber man benutzt der Einfachheit halber die gleichen Werte wie bei der Ausgangsgerade).

Außerdem muss der Richtungsvektor der gespiegelten Geraden mit dem Normalenvektor der x_1-x_2 -Ebene den gleichen Winkel bilden, wie der Richtungsvektor der Ausgangsgeraden. Damit müssen beide das gleiche Skalarprodukt bilden. Da die x_1 und x_2 Komponenten gleich sind, muss die x_3 Komponente vom Betrag her auch mit der x_3 -Komponente des Richtungsvektors der Ausgangsgeraden übereinstimmen. Aber die x_3 -Richtung ist genau entgegengesetzt, also ändert sich nur das Vorzeichen der x_3 Komponente beim Richtungsvektor.

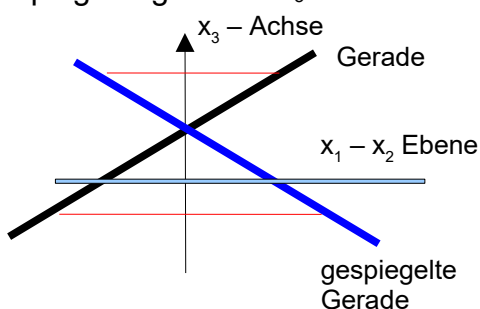
Diese Erkenntnis kann an sich auch bei der Bestimmung des Aufpunktes zu Nutze machen. Kennt man irgend einen Punkt der auf der Geraden liegt, behält man die x_1 und x_2 Koordinaten bei und ändert bei der x_3 Koordinate das Vorzeichen. Damit kann man der möglicherweise unschönen Berechnung des Durchstoßpunktes entgehen.

Da zu einem späteren Zeitpunkt das Thema Spiegelung nochmals aufgegriffen werden muss, soll hier festgehalten werden, dass das Skalarprodukt mit dem Normalenvektor der Spiegelungsebene und den Richtungsvektoren der Geraden gleich sein muss.

Die Berechnung der Reflexionsgeraden entspricht genau der Spiegelgeraden, nur, dass die x_3 Werte nicht das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen. Um vom Punkt einer Geraden den Reflexionspunkt zu bestimmen ist die Entfernung des Punktes vom Durchstoßpunkt in der Ebene zu bestimmen (Projektionsgerade) und die gleiche Entfernung auf der anderen Seite des Durchstoßpunktes abzutragen. Der x_3 Wert bleibt erhalten.

28.12.6. Spiegelung an einer Koordinatenachse

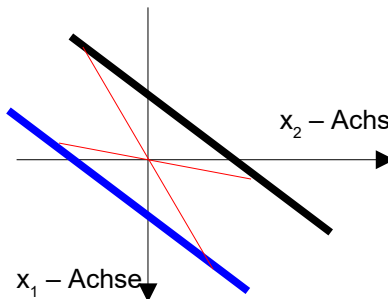
Zunächst ist zu klären, was unter Spiegelung an einer Achse zu verstehen ist. Eine Achse ist keine Spiegelungsebene im herkömmlichen Sinn. Dazu soll hier eine Spiegelung an der x_3 -Achse betrachtet werden.



Zu jedem x_3 -Wert auf der x_3 -Achse kann man eine zur x_3 -Achse senkrechte Linie – oder eine parallele Linie zu x_1-x_2 Ebene – zu der Geraden ziehen. Damit wird eine zur x_1-x_2 Ebene parallele Gerade definiert, die die x_3 Achse schneidet. Trägt man jetzt den Abstand von der x_3 -Achse bis zur Ausgangsgeraden in die entgegengesetzte Richtung ab, erhält man wieder einen Punkt.

Die Verbindung aller dieser Punkte liefert wieder eine Gerade. Diese Gerade versteht man unter der an der Achse gespiegelten Geraden. Daraus folgt die erste Eigenschaft der gespiegelten Geraden: Ausgangspunkt und gespiegelter Punkt haben die gleiche x_3 -Koordinate. Die Geraden selbst müssen weder sich noch die x_3 -Achse schneiden. Das wird noch einmal an der Draufsicht der x_1 - x_2 Ebene sichtbar.

Draufsicht x_1 - x_2 -Ebene ; $x_3 = 0$



Diese Draufsicht macht weitere Eigenschaften der gespiegelten Geraden deutlich: Sowohl die x_1 Koordinate, als auch die x_2 Koordinate eines Punktes ändern ihr Vorzeichen. Die Projektion der Geraden in die x_1 - x_2 Ebene führt zu einer parallelen Geraden, das bedeutet, dass die x_1 und x_2 Komponenten des Richtungsvektors gleich sind. Ein anderer Aufpunkt liefert eine parallele Gerade.

Die Seitenansicht der beiden Geraden zeigt, dass die Gerade für die entgegengesetzten x_1 und x_2 Werte genauso steigend oder fallend ist, wie die Ausgangsgerade.

Damit lassen sich für die gespiegelte Gerade folgende Schritte angeben:

1. Wenn ein Punkt auf der Ausgangsgeraden bestimmt ist, ist das Vorzeichen der x_1 und x_2 Komponenten zu ändern und es entsteht ein Punkt auf der gespiegelten Geraden.
2. Für den Richtungsvektor gilt, dass er genau in die entgegengesetzte Richtung steigend ist, wie der Richtungsvektor der Ausgangsgeraden. Damit sind auch beim Richtungsvektor die x_3 Koordinate beizubehalten und bei den x_1 und x_2 Koordinaten die Vorzeichen zu ändern. Alternativ kann man die Vorzeichen der x_1 und x_2 Koordinaten beibehalten und das Vorzeichen der x_3 Koordinate ändern.

Für das spätere Spiegeln an allgemeinen Geraden soll hier festgehalten werden, dass Punkt und Spiegelpunkt in einer Ebene liegen, von der die Spiegelungsgerade der Normalenvektor ist. Auf dieser Ebene haben Punkt und Spiegelpunkt zur Spiegelgeraden den gleichen Abstand aber entgegengesetzte Richtung auf der gleichen Geraden.

28.12.7. Spiegelung an einem Punkt

Spiegelung an einem Punkt entspricht genau dem, was in der Optik durch eine Sammellinse erzeugt wird. Der Spiegelungspunkt ist Brennpunkt und Mittelpunkt der Strecke zwischen Ausgangspunkt und Spiegelpunkt. Beide Punkte liegen auf einer Geraden, auf der auch der Spiegelungspunkt liegt. Die Entfernungen der beiden Punkte auf dieser Geraden vom Spiegelpunkt sind gleich.

Das Ergebnis ist eine zur Ausgangsgeraden parallele Gerade.

28.13. Lagebeziehungen zu Ebenen im Raum

Bei Abstandsberechnungen mit einer Ebene besteht schon ein großer Vorteil, es gibt eine eindeutige senkrechte Richtung, die durch den Normalenvektor der Ebene gegeben ist. Das bedeutet aber auch, dass Abstände mit Ebenen grundsätzlich in der Hesseschen Normalform zu berechnen sind, so dass Ebenengleichungen in Parameterform hier gar nicht betrachtet werden. In diesen Fällen ist als erstes die Normalform herzustellen.

Bei Schnittgeraden zwischen zwei Ebenen werden beide Gleichungsformen behandelt. Durchstoßpunkte (wie Schnittpunkte bei Geraden) setzen mindestens eine Darstellung in Parameterform voraus, da Durchstoßpunkte nur über die Bestimmung eines Linearfaktors zu berechnen sind. Bei Durchstoßpunkten von Geraden und Ebenen ist die Gerade ohnehin in Parameterdarstellung gegeben, so dass diese auch dafür benutzt wird.

28.13.1. Lage von Geraden und Ebenen im Raum

Geraden und Ebenen im Raum können drei verschiedene Lagemöglichkeiten besitzen. Die Gerade kann parallel zur Ebene sein, sie kann in der Ebene liegen, oder sich mit der Ebene in einem Punkt schneiden.

1. Frage: Sind der Richtungsvektor der Geraden und der Normalenvektor der Ebene senkrecht zueinander ?

Diese Frage wird über das Skalarprodukt geklärt. Wenn diese Frage mit „ja“ zu beantworten ist, dann sind Gerade und Ebene entweder parallel oder identisch. Gleichbedeutend damit wäre, dass sich der Richtungsvektor der Geraden als Linearkombination der beiden Richtungsvektoren der Ebene darstellen lässt. Ist diese Frage mit „nein“ zu beantworten, dann haben Gerade und Ebene einen Schnittpunkt. Geraden die sich mit einer Ebene schneiden haben auch gleichzeitig einen Schnittwinkel, der sich berechnen lässt.

Falls die Frage mit „ja“ beantwortet wird, ist weiter zu untersuchen, ob die Gerade nur parallel zur Ebenen ist, oder ob sie in der Ebne liegt.

2. Frage: Liegt der Aufpunkt der Geraden in der Ebene ?

Ist diese Frage mit „ja“ zu beantworten, dann liegt die gesamte Gerade in der Ebene.

Übersicht:

$$g: \vec{x} = \vec{P} + t \vec{u} \quad \text{mit } \vec{u} \neq \vec{0}$$

$$\vec{x} = \vec{Q} + t \vec{v} + s \vec{w} \quad \text{mit } \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$$

$$\text{bzw. } (\vec{x} - \vec{Q}) \cdot \vec{n}^0 = 0$$

u, v, w linear abhängig
oder $u \cdot n^0 = 0$

(Liegt der Richtungsvektor der Geraden
in der Ebene oder ist er parallel)

ja

nein

$P \in E$?

g und E schneiden
sich in einem Punkt

*Punktprobe; Gleichungssystem mit 3
Gleichungen und 1 Unbekannten (Gerade). oder 3
Gleichungen mit 2 Unbekannten (Ebene)..*

*Lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und
3 Unbekannten. Das Ergebnis ist nicht der Schnitt-
punkt, sondern die Parameter für die Geraden-
gleichung oder Ebenengleichung zur Bestimmung
des Schnittpunktes.*

g liegt in E

$g \parallel E$
 $g \notin E$
 g parallel
zu E

28.13.2. Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene

Für die Existenz eines Durchstoßpunktes muss das Skalarprodukt zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und dem Normalenvektor der Ebene ungleich Null sein. Für Durchstoßpunkt Berechnungen muss mindestens eine der beiden Gleichungen in Parameterform gegeben sein, da mindestens in einer Gleichung Parameter gebraucht werden, die die Koordinaten des Durchstoßpunktes berechnen lassen. Als erstes wird der Fall betrachtet, dass beide Formen in Parameterdarstellung gegeben sind. Jede Berechnung beginnt mit der Überprüfung, ob Gerade und Ebene parallel sind. Wenn das nicht der Fall ist, dann wird weiter gerechnet.

28.13.2.1. Gerade und Ebene in Parameterdarstellung

Wenn geklärt ist, dass ein Durchstoßpunkt existiert, dann wird aus den Parameterdarstellungen der beiden Gebilde ein Gleichungssystem erstellt:

Ebene: $\vec{x} = \vec{x}_{P_1} + t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$

Gerade: $\vec{x} = \vec{x}_{P_2} + r \cdot \vec{c}$

Wichtig ist, dass vor dem Bilden des Gleichungssystems die drei Linearfaktoren vor den Richtungsvektoren unterschiedliche Bezeichnungen haben. Bei der Geradengleichung

noch einmal den Buchstaben t zu verwenden führt in Chaos. Für den Durchstoßpunkt muss gelten, dass er sowohl die Ebenengleichung, wie auch die Geradengleichung erfüllt. Deshalb werden die beiden Ausdrücke der rechten Seiten gleich gesetzt.

Diese Gleichung ist $\vec{x}_{P_1} + t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{x}_{P_2} + r \cdot \vec{c}$ dann so umzuordnen, dass die Variablen alle auf der linken Seite stehen und die konstanten Vektoren auf der rechten Seite:

$$t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} - r \cdot \vec{c} = \vec{x}_{P_2} - \vec{x}_{P_1}$$

Wenn die Gerade und die Ebene nicht parallel sind, dann hat dieses Gleichungssystem eine Lösung.

28.13.2.2. Ebene in Normalform

Betrachtet man die Ebene in Normalform: $\vec{x} \circ \vec{n} = d$ und die Gerade in Parameterform $\vec{x} = \vec{x}_p + r \cdot \vec{a}$ so ist klar, dass der Durchstoßpunkt beide Gleichungen erfüllen muss. das Ziel muss wieder sein, einen Parameter für t zu bestimmen, so dass man mit der Geradengleichung auf die Koordinaten des Durchstoßpunkts kommt. Deshalb wird die Geradengleichung in die Ebenengleichung für den dort variablen Ortsvektor x eingesetzt.

$$\vec{x}_s \circ \vec{n} = (\vec{x}_p + t_s \vec{a}) \circ \vec{n} = d$$

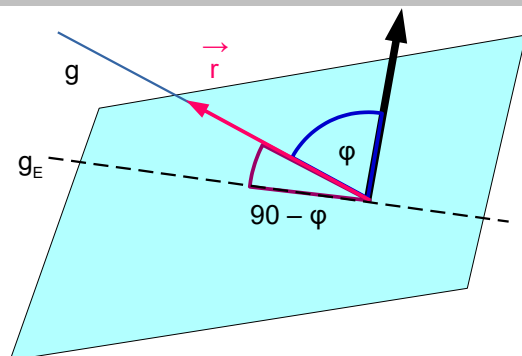
$$\vec{x}_s \circ \vec{n} = \vec{x}_p \circ \vec{n} + t_s \vec{a} \circ \vec{n} = d$$

$$t_s = \frac{d - \vec{x}_p \circ \vec{n}}{\vec{a} \circ \vec{n}}$$

Da das Ergebnis eines Skalarproduktes eine reelle Zahl ist, kann man auch durch ein Skalarprodukt dividieren.

28.13.3. Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene

Als Schnittwinkel von Gerade und Ebene wird mittels Skalarprodukt der Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und dem Normalenvektor der Ebene berechnet. Anschließend ist dieser Winkel von 90° zu subtrahieren, da mit dem Normalenvektor der Ebene und nicht mit den Richtungsvektoren gearbeitet wurde.



28.13.4. Ebene senkrecht zu einer Geraden

Gesucht ist eine Ebene, die senkrecht zu einer Geraden und durch einen vorgegebenen Punkt verläuft. Setzt man den Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor der Ebene ein erzeugt man so die linke Seite der HNF der Ebene. $\vec{x} \circ \vec{a}$

Da der vorgegebene Punkt die Ebenengleichung erfüllen soll, setzt man in die linke Seite den Ortsvektor von P ein und erhält die rechte Seite der Gleichung: $\vec{x}_p \circ \vec{a} = d$ und damit die Ebenengleichung in Normalform: $\vec{x} \circ \vec{a} = d$

28.13.5. Gerade senkrecht zu einer Ebene

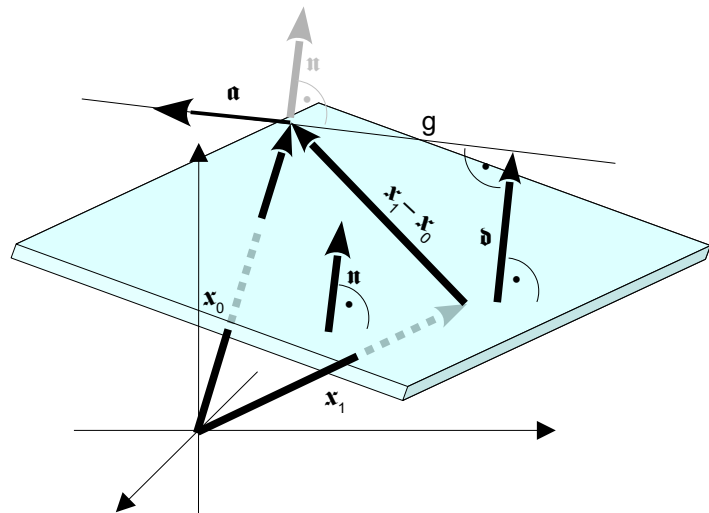
Gesucht ist eine Gerade, die senkrecht zu einer Ebene und durch einen vorgegebenen Punkt verläuft. Für den Richtungsvektor der Geraden setzt man den Normalenvektor der Ebene ein und als Aufpunkt der Geraden den vorgegebenen Punkt

$$\vec{x} = \vec{x}_p + t \cdot \vec{n}$$

28.13.6. Abstand einer Ebene zu einer Geraden

Eine solche Möglichkeit existiert nur, wenn die Gerade parallel zur Ebene verläuft, oder senkrecht zum Normalenvektor. Also ist als erstes zu prüfen, ob das Skalarprodukt des Richtungsvektors der Geraden mit dem Normalenvektor der Ebene Null ergibt. Ist das der Fall, kann mit der Berechnung begonnen werden.

Da hier auf alle Fälle der senkrechte Abstand gesucht ist, wird bei der Ebenengleichung mit der Normalenform gearbeitet, da bei dieser die senkrechte Richtung über den Normalenvektor zur Verfügung steht. Die Geradengleichung hat die Parameterform. Außerdem kann genutzt werden, dass der Abstand an allen Punkten der Geraden gleich ist, also kann ein beliebiger Punkt herausgegriffen werden, z.B. der Aufpunkt der Geraden.



Der Aufpunkt der Geraden ist in der Zeichnung mit \vec{x}_0 bezeichnet, der Aufpunkt der Ebene mit \vec{x}_1 . Wie bei allen Abstandberechnungen ist der Differenzvektor $(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$ über das Skalarprodukt auf den Normaleneinheitsvektor zu projizieren. Dadurch entsteht ein Vektor \vec{d} , der der Abstandsvektor ist. $(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \circ \vec{n}^0 = |\vec{d}|$

da \vec{x}_1 die Ebenengleichung $\vec{x}_1 \circ \vec{n} = D$ (hier wurde zur Unterscheidung bei der Ebenengleichung der Buchstabe D benutzt) erfüllt kann die Formel umgeschrieben werden:

$$D - \vec{x}_0 \circ \vec{n}^0 = |\vec{d}|$$

Damit ist der Abstand der Geraden bestimmt. Ist außerdem der Abstandvektor gesucht, ist diese Länge mit dem Einheitsvektor in Normalenrichtung zu multiplizieren.

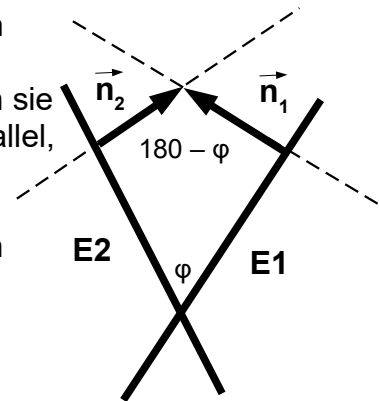
$$\vec{d} = |\vec{d}| \cdot \vec{n}^0$$

28.13.8. Schnittwinkel zweier Ebenen

Um den Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen zu berechnen muss erst geprüft werden, ob sich die Ebenen überhaupt schneiden. Zwei Ebenen schneiden sich genau dann, wenn sie nicht parallel sind. Zwei Ebenen sind genau dann nicht parallel, wenn ihre Normalenvektoren nicht die gleiche Richtung besitzen. Mit den hier zur Verfügung stehenden Mittel kann man überprüfen, ob das Skalarprodukt der beiden Vektoren mit dem Produkt ihrer Beträge identisch ist:

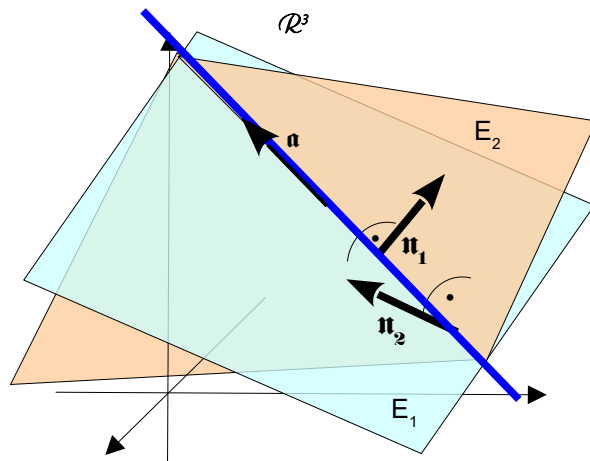
$$\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|$$

Ist das der Fall, sind die Ebenen parallel und haben keinen Schnittwinkel. Ist das nicht der Fall schneiden sich die Ebenen und der Schnittwinkel ist identisch mit dem Schnittwinkel der beiden Normalenvektoren und wird über das Skalarprodukt berechnet.



28.13.9. Schnittgerade zweier Ebenen

Wenn sich zwei Ebenen schneiden, ist das Schnittgebilde eine Gerade. Aus der Skizze ist zunächst klar, dass der Richtungsvektor der Geraden senkrecht zu den beiden Normalenvektoren sein muss, denn der Vektor muss in beiden Ebenen liegen, also zu beiden Normalen senkrecht.



28.13.9.1. Beide Ebenen in parameterfreier Darstellung

Das bedeutet, beide Ebenen liegen der HNF vor:

$$\begin{aligned}\vec{x} \circ \vec{n}_1 &= d_1 \\ \vec{x} \circ \vec{n}_2 &= d_2\end{aligned}$$

Variante 1:

Wie bereits bei der Koordinatendarstellung der Ebene gezeigt, kann die HNF problemlos in die Koordinatendarstellung überführt werden, da die Koeffizienten der Koordinatendarstellung identisch sind mit einem Normalenvektor der Ebene.

$$\begin{aligned}x_1 n_{11} + x_2 n_{12} + x_3 n_{13} &= d_1 \\ x_1 n_{21} + x_2 n_{22} + x_3 n_{23} &= d_2\end{aligned}$$

damit entsteht ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Diese Unbekannten sind die x-Werte. Dieses Gleichungssystem hat eine Parameterlösung und man kann eine Variable gleich t setzen. Danach erhält man für die anderen beiden Variablen Ergebnisse in Abhängigkeit von t. Dieses t ist gleichzeitig der Parameterwert für die Geradengleichung, dh. man fasst bei x_1 alles zusammen, was

kein t hat und alles andere, was ein t hat. Der Summand, der kein t enthält ist die Komponente des Aufpunktes für t und der Summand, der ein t enthält ist die Komponente des Richtungsvektors der Geraden.

Beispiel 1

$$E_1: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$

$$E_2: x_1 + 4x_2 = 19$$

Für $x_2 = u$

$$\text{folgt aus } E_2: x_1 = 19 - 4u$$

$$\text{und aus } E_1: 19 - 4u + 2u + 2x_3 = 4$$

$$x_3 = -15/2 + u$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 19 - 4u \\ u \\ -7,5 + u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ -7,5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Variante 2:

Der Richtungsvektor der Geraden muss in beiden Ebenen liegen, deshalb ist er senkrecht zu beiden Normalenvektoren und kann über diese erzeugt werden, wie Normalenvektoren aus Richtungsvektoren einer Ebene erzeugt werden. Damit bleibt noch die Frage nach einem Aufpunkt für diese Gerade. Von diesem Aufpunkt ist zunächst klar, dass er auch in beiden Ebenen liegen muss, wie die gesamte Schnittgerade. Also benutzt man die beiden Normalformen, um den Punkt zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \vec{x} \circ \vec{n}_1 &= \vec{x} \circ \vec{n}_2 \\ \vec{x} \circ (\vec{n}_1 - \vec{n}_2) &= 0 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung liefert eine Gleichung mit drei Unbekannten x_1 , x_2 und x_3 , wovon zwei beliebig gewählt werden können, diesmal aber nicht mit einem Parameter, sondern mit festen Zahlen. Die so ermittelten Werte sind ein Punkt auf der Schnittgeraden.

Beispiel 2

$$E_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad E_2: \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ist senkrecht zu beiden Normalenvektoren der Ebene, da er in beiden Ebenen liegen muss !

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es bleibt einen Punkt zu bestimmen, der auf der Schnittgeraden und damit in beiden Ebenen liegt. Die Bestimmung des Punktes mit Hilfe der Normalform der Ebenengleichungen, in Koordinatenform geschrieben:

$$E_1: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$$

$$E_2: x_1 + 4x_2 - 19 = 0$$

Aus z.B. $x_1=19$ und $x_2=0$ folgt $x_3 = -7,5$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ -7,5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

28.13.9.2. Eine Ebene in Parameterdarstellung, eine Ebene in parameterfreier Darstellung

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{x}_{P_1} + t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} \\ \vec{x} \circ \vec{n}_2 &= d_2 \end{aligned}$$

Der übliche Weg ist wieder das Einsetzen der Parameterdarstellung in die parameterfreie Darstellung, was zu der Formel

$$\vec{x}_{P_1} \circ \vec{n}_2 + t \cdot \vec{a} \circ \vec{n}_2 + s \cdot \vec{b} \circ \vec{n}_2 = d_2$$

führt. Einer der beiden Richtungsvektoren \vec{a} oder \vec{b} muss mindestens zu \vec{n} nicht senkrecht sein. Wenn es beide wären, dann wären die Ebenen parallel.

Es sei \vec{a} der Vektor, der nicht senkrecht zu \vec{n} ist.

In diesem Fall wird der Parameter $s = 0$ gesetzt und die Gleichung nach t aufgelöst. Damit erhält man für t :

$$t_p = \frac{d_2 - \vec{x}_{P_1} \circ \vec{n}}{\vec{a} \circ \vec{n}_2}$$

Setzt man für t diesen berechneten Wert und für $s = 0$ in die Parametergleichung der ersten Ebene ein, erhält man einen Punkt, der auf der Schnittgerade liegt. Man kann auch für s einen anderen Wert als 0 wählen, dann ist aber die Formel zur Berechnung des t etwas aufwendiger, da zwei Skalarprodukte zu berechnen sind.

Der Richtungsvektor ist als senkrechter Vektor zu den beiden Normalenvektoren zu bestimmen. Dazu ist von der ersten Ebene noch der Normalenvektor zu berechnen.

Beispiel 1

$$E_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Die komplette Parameterform der zweiten Ebenen wird in die erste Ebenengleichung eingesetzt.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{E_2}$

Durch das Skalarprodukt entsteht eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Da ist die Gleichung nach einer Unbekannten aufzulösen und in die Ebene mit der Parametergleichung einzusetzen.

$$1(15 + 4u + 4v - 4) + 2(1 - u - v - 1) + 2(-6 - u - 9v + 1) = 0$$

$$1 + 0u - 16v = 0$$

Normalerweise entsteht hier ein Abhängigkeit von u und v . In diesem Fall verschwindet das u ganz und v ist eine feste Zahl. Damit ist das u beliebig wählbar und wird zum Parameter für die Schnittgerade: Der Richtungsvektor, der bei der Variablen u steht ist Richtungsvektor der Schnittgeraden. Dann sind die Werte für u und v in die zweite Ebenengleichung einzusetzen. Das führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x_1 &= 15 + u \cdot 4 + 4/16 = 15,25 + u \cdot 4 \\x_2 &= 1 - u - 1/16 = 15/16 - u \\x_3 &= -6 - u - 9/16 = -6 \frac{9}{16} - u\end{aligned}$$

Die entsprechenden Zeilen sind nach konstanten Werten und Werten mit dem Parameter u zusammenzufassen, so dass daraus die Geradengleichung entsteht:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15,25 \\ 15/16 \\ -6 \frac{9}{16} \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2

$$E_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen entsteht folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}(2 + 0u + 2v) + 2(-1 + u + v) + 2(-2 + 4u + 3v) &= 6 \\-4 + 10u + 10v &= 6 \\u &= 1 - v\end{aligned}$$

Hier ist der Parameter u in Abhängigkeit von v angegeben. Dieser Ausdruck in Abhängigkeit von v ist in die Ebenengleichung einzusetzen.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + (1 - v) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jetzt sind die Teile zusammenzufassen, die kein v besitzen und die Teile die ein v als Faktor haben. Damit entsteht folgende Geradengleichung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Prüfung, ob diese Gerade auch Schnittgerade ist:

- Der Richtungsvektor der Geraden ist senkrecht zum Normalenvektor der Ebene E_1 , damit ist die Gerade parallel zu E_1 .
- Für $u = -1$ und $v = 1$ ist der Richtungsvektor der Geraden eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren aus E_2 , also auch parallel zu E_2 .
- Der Punkt $(2/0/2)$ erfüllt die Ebenengleichung E_1 : $(1/2/2) \circ (-2/0/1) = 0$, damit liegt der Punkt auf der Ebene E_1 .
- Für $u = 1$ und $v = 0$ liegt der Punkt auch auf E_2 .

Der Aufpunkt der Gerade liegt in beiden Ebenen, der Richtungsvektor der Gerade liegt in beiden Ebenen, damit ist die Gerade die Schnittgerade.

28.13.9.3. Beide Ebenen in Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{x}_{p_1} + t \cdot \vec{a}_1 + s \cdot \vec{b}_1 \\ \vec{x} &= \vec{x}_{p_2} + u \cdot \vec{a}_2 + v \cdot \vec{b}_2\end{aligned}$$

Punkte der Schnittgeraden müssen auf beiden Ebenen liegen. Deshalb müssen diese Punkte beide Ebenengleichungen erfüllen, was dazu führt, dass beide Ebenengleichungen gleich gesetzt werden müssen, dabei ist darauf zu achten, dass die Linearfaktoren vor den Richtungsvektoren unterschiedliche Bezeichner haben:

$$\vec{x}_{P_1} + t \cdot \vec{a}_1 + s \cdot \vec{b}_1 = \vec{x}_{P_2} + u \cdot \vec{a}_2 + v \cdot \vec{b}_2$$

Damit entsteht ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit vier Variablen. Dieses Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar, sondern besitzt eine Parameterlösung, eine Variable ist frei wählbar. Das entspricht genau der Tatsache, dass die Lösungsmenge eine Gerade ist, was ja erwartet wurde.

Wenn eine Variable frei wählbar ist, sind die Lösungen der anderen Variablen von dieser Variablen abhängig. Werden alle so bestimmten Lösungen eingesetzt sind die einzelnen Gleichungszeilen nach konstanten Werten und Werten mit Parameter zusammenzufassen und es entsteht die Geradengleichung. Jede Zeile des Gleichungssystem entspricht einer Komponente der Geradengleichung.

Beispiel 1

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ebenen erhält man die Schnittgerade.

$$\begin{aligned} 4 + s - 12t &= 15 + 4u + 4v \\ 1 + 1,5s - 4t &= 1 - u - v \\ -1 - 2s + 10t &= -6 - u - 9v \end{aligned}$$

Aus der Gleichsetzung ein „sauberes“ Gleichungssystem machen.

$$\begin{aligned} s - 12t - 4u - 4v &= 11 \\ 1,5s - 4t + u + v &= 0 \\ -2s + 10t + u + 9v &= -5 \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystem führt zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned} t - 12s - 4u - 4v &= 11 \\ 14s + 7u + 7v &= -16,5 \\ 112v &= 7 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Lösung $v = 1/16$ und u ist beliebig, es soll zur Unterscheidung $u = r$ gesetzt werden. Setzt man u und v in die Ebenengleichung 2 ein, erhält man:

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1/16 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

das Zusammenfassen der Teile ohne den Parameter r liefert:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 + 1/4 \\ 1 - 1/16 \\ -6 - 9/16 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15,25 \\ 15/16 \\ -6 \frac{9}{16} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(Die beiden Ebenen wurden bereits im Kapitel „Parameterform und Koordinatenform“ zur Berechnung der Schnittgeraden benutzt. Die dort erstellte Gerade ist bis auf das Vorzeichen mit dieser Geraden identisch.)

Beispiel 2

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + t + 3s &= 2 + 2u + 2v \\ 1 + 2t + 2s &= 3 + 2u + v \\ 1 + 3t + s &= 1 + 2u + 3v \end{aligned}$$

Parameter für E_1 :

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{4}(2r + 3) = \frac{1}{2}r + \frac{3}{4} \\ t &= 1 - 3\left(\frac{1}{2}r + \frac{3}{4}\right) + 2r + 2 \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}r \end{aligned}$$

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}r\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}r + \frac{3}{4}\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{4} \\ 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\ 1 + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ 1 + 1 \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} t + 3s - 2u - 2v &= 1 \\ 2t + 2s - 2u - v &= 2 \\ 3t + s - 2u - 3v &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t + 3s - 2u - 2v &= 1 \\ -4s + 2u + 3v &= 0 \\ v &= 1 \end{aligned}$$

Parameter für E_2 :

$$\begin{aligned} v &= 1 \\ u &= r \end{aligned}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In beiden Fällen gelangt man zu der identischen Schnittgeraden. Das muss aber nicht sein.

Die Aufpunkte der beiden Geraden müssen nicht gleich sein und die Richtungsvektoren können ein Vielfaches voneinander sein.

28.13.10. Abstand paralleler Ebenen

Für den Abstand paralleler Ebenen müssen beide Ebenen in HNF gegeben sein.

$$\vec{x} \circ \vec{n}_1 = d_1$$

$$\vec{x} \circ \vec{n}_2 = d_2$$

Bei der Beschreibung der HNF wurde bereits erklärt, dass die Werte d_1 und d_2 jeweils der Abstand der Ebene zum Ursprung ist. Damit ist der Abstand der beiden Ebenen genau die Differenz der beiden Werte, da auch der Abstand zum Ursprung senkrecht gemessen wird. Für den Abstandsvektor ist diese Differenz mit dem Normaleneinheitsvektor einer Ebene zu multiplizieren.

$$d = d_1 - d_2$$

28.14. Spiegelungen

Genauso, wie Abstände von Punkten zu Geraden und Abstände von Punkten zu Ebenen unterschiedlich behandelt werden müssen, sind auch Spiegelungen an Ebenen und Spiegelungen an Geraden unterschiedlich zu behandeln. Der Grund liegt wieder in der eindeutigen senkrechten Richtung, die bei Ebenen gegeben ist, aber bei Geraden nicht. Spiegelungen sind eine Weiterentwicklung der Abstandsberechnung, deshalb werden viele Aspekte der Abstandsberechnung hier mit einfließen. Zentraler Dreh- und Angelpunkt ist die Bestimmung des Fußpunktes des Lotes. Der Verbindungsvektor von Punkt und diesem Fußpunkt noch einmal in dem Fußpunkt angesetzt, liefert den gespiegelten Punkt.

28.14.1. Spiegelung eines Punktes an einem Punkt

Dabei handelt es sich um die einfachste Form der Spiegelung. Ein Punkt \vec{P} soll an einem Punkt \vec{F} gespiegelt werden. Dazu erzeugt man den Verbindungsvektor \vec{PF} und addiert diesen Vektor noch einmal zu dem Spiegelungspunkt \vec{F} . Damit erhält man den Spiegelpunkt \vec{P}' aus der Formel:

$$\vec{P}' = \vec{F} + \vec{PF} = \vec{P} + 2 \cdot \vec{PF}$$

28.14.2. Spiegeln eines Punktes an einer Geraden

Hier wird der Rechenweg zum Abstand eines Punktes von einer Geraden benutzt. Generell gibt es zwei Möglichkeiten dieses Problem zu lösen.

senkrechte Hilfsebene	Skalarprodukt
<ul style="list-style-type: none"> Zu der Geraden wird eine senkrechte Ebene in Normalform erzeugt, die durch den Punkt \vec{P} geht, der gespiegelt werden soll. Dann bestimmt man den Durchstoßpunkt \vec{F} der Geraden durch diese Ebene. Der Durchstoßpunkt \vec{F} ist der Fußpunkt des Lotes, an dem gespiegelt werden muss. Der Verbindungsvektor von \vec{P} nach \vec{F} ist der Abstandsvektor, dessen Betrag den Abstand des Punktes P von der Geraden angibt 	<ul style="list-style-type: none"> Bilde den Differenzvektor von \vec{P} und dem Aufpunkt der Geraden. Bilde das Skalarprodukt mit dem Einheitsvektor des Richtungsvektors der Geraden. Der berechnete Wert t_f ist die Entfernung des Fußpunktes vom Aufpunkt der Geraden. Benutzt man dieses t_f und den Einheitsvektor des Richtungsvektors, erhält man den Fußpunkt des Lotes.

Setzt man diesen Abstandsvektor noch einmal in \vec{F} an, erhält man den Spiegelpunkt \vec{P}' .

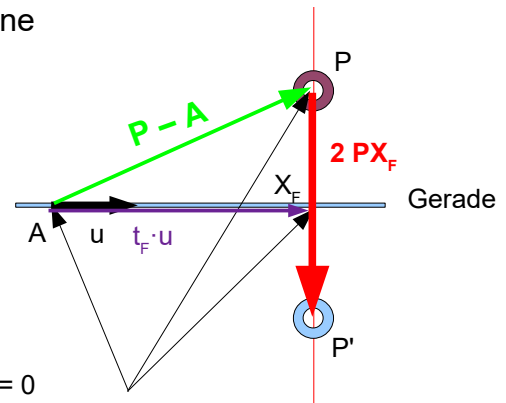
$$\vec{P}' = \vec{F} + \vec{PF} = \vec{P} + 2 \cdot \vec{PF}$$

Musterbeispiel Lösungsweg 1: senkrechte Hilfsebene

$$\text{Gerade : } g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Punkt der gespiegelt werden soll, } P = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hilfsebene mit Richtungsvektor als Normalenvektor und Aufpunkt P: } \begin{bmatrix} \vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$



Berechnen des Parameters des Durchstoßpunktes:

Koordinatenform der Ebene

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 16 = 0$$

Geradengleichung in Ebenengleichung einsetzen:

$$3(5 + 3s) + 2(9 + 2s) + 2(1 + 2s) + 16 = 0$$

$$15 + 9s + 18 + 4s + 2 + 4s + 16 = 0$$

$$51 + 17s = 0$$

$$s = -3$$

$$\text{Fußpunkt bestimmen: } g_1 : \vec{x}_F = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Abstandsvektor bestimmen: } \vec{PF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{gespiegelten Punkt bestimmen: } \vec{P'} = \vec{P} + 2 \vec{PF} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Musterbeispiel Lösungsweg 2: Skalarprodukt, Projektion auf g

Es wird die gleiche Gerade und der gleiche Punkt P benutzt.

$$\text{Abstandsvektor von } \vec{A} \text{ nach } \vec{P} \quad \vec{AP} = \vec{P} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Skalarprodukt mit dem Einheitsvektor des Richtungsvektors der Geraden: } \begin{pmatrix} -7 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}} (-21 - 30) = \frac{-51}{\sqrt{17}}$$

Um das Skalarprodukt mit einem Einheitsvektor zu bilden rechnet man es aus, das Ergebnis der Skalarproduktes durch den Betrag dieses Vektors zu dividieren. In diesem Fall ist der Betrag des Richtungsvektors $\sqrt{17}$. Wie die weitere Rechnung zeigen wird, ist es nicht ratsam den Wert für diese Wurzel über den GTR schon jetzt zu bestimmen. Man sollte mit dem Wurzelausdruck weiterarbeiten.

Berechnen des Fußpunktes unter Benutzung des berechneten Parameters und des Einheitsvektors des Richtungsvektors:

$$g_1 : \vec{x}_F = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-51}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Abstand Einheitsvektor

Die Benutzung des Einheitsvektors des Richtungsvektors ist unbedingt notwendig, damit durch die Länge des Richtungsvektors keine zusätzlichen Längeneinheiten hinzukommen. Der berechnete Parameter ist eine gibt die Längeneinheiten des Aufpunktes der Geraden zum gesuchten Fußpunkt an. Ein Vektor, der nicht die Länge 1 hat würde diesen Abstand zum Fußpunkt verfälschen. Es ist in der Formel auch klar zu sehen, dass der Betrag des Richtungsvektors damit zweimal im Nenner auftritt und sich damit die Wurzeln aufheben. es entsteht dadurch immer eine Bruch ohne einen Wurzel-ausdruck im Nenner. Deshalb ist es überflüssig, den Wert der Wurzel zu berechnen. fasst man die beiden Faktoren vor dem Richtungsvektor zusammen entsteht wieder der Wert -3 , der bereits oben als Parameterwert bestimmt wurde. Alle weiteren Rechnungen erfolgen wie beim 1. Lösungsweg. Die theoretische Grundlage für diesen Rechenweg ist das, was im Kapitel „Geometrische Bedeutung des Skalarprodukts“ steht. Es wird die Projektionseigenschaft des Skalarprodukts ausgenutzt.

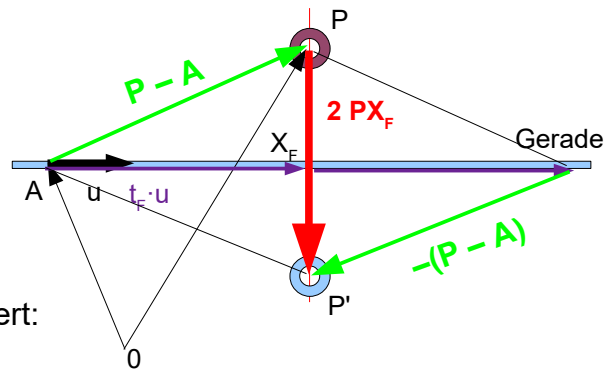
Musterbeispiel Lösungsweg 3: Skalarprodukt, Verdopplung der Projektion auf g

Bei dem Lösungsweg 2 wurde schon auf folgende Gleichungen aufmerksam gemacht, die entstehen, wenn man den Differenzvektor $P - A$ auf die Gerade mittels Skalarprodukt projiziert.

$$P \circ u + P X_F \circ u = A \circ u + t_F |u|^2$$

was aufgelöst nach t folgendes Ergebnis liefert:

$$t_F = \frac{(P - A) \circ u}{|u|^2} = [(P - A) \circ u^0] \cdot \frac{1}{|u|}$$



setzt man diesen Wert für t in die Geradengleichung ein, und berücksichtigt, dass die Division eines Vektors durch seinen Betrag auf den Einheitsvektor führt, erhält man für den Fußpunkt folgende Gleichung

$$x_F = A + [(P - A) \circ u^0] u^0$$

Dieser Vektor führt genau zum Fußpunkt auf der Geraden. Setzt man jetzt den Vektor von A nach x_F noch einmal in x_F an entsteht, wie in der obigen Zeichnung zu erkennen ein gleichschenkeliges Dreieck mit P als Punkt der Spitze und die Seiten von P auf die Gerade sind gleich lang.

Spiegelt man dieses Gebilde an der Geraden erhält man eine Raute mit gleich langen Seiten und senkrecht stehenden Diagonalen. Diese Raute liefert einen Weg, den Spiegelpunkt zu berechnen.

Von dem Punkt auf der Geraden, der durch die Verdoppelung des projizierten Vektors entstanden ist, ist der Vektor $P - A$ zu subtrahieren und man gelangt zum Spiegelpunkt.

$$\text{Geradengleichung: } g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Berechnung des Fußpunktes: } X_F = A + t_F u^0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{-28}{\sqrt{14}} \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Differenzvektor zwischen A und x_F :
$$\frac{-28}{\sqrt{14}} \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Diesen Differenzvektor noch einmal zu x_F addiert:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Von diesem Vektor den Vektor $AP = P - A$ subtrahieren:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix}$$

28.14.3. Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

Bei dieser Berechnung hat man den Vorteil, dass man die Richtung des senkrechten Abstandes bereits kennt. Diese Richtung ist die Richtung des Normalenvektors der Ebene. Was dann noch fehlt ist der Abstand des Punktes von der Ebene.

senkrechte Gerade	Skalarprodukt
<ul style="list-style-type: none"> Bestimme den Normalenvektor \vec{n} der Ebene, wenn er nicht bereits gegeben ist. Erzeuge eine Gerade g aus dem Punkt \vec{P} und dem Normalenvektor \vec{n} als Richtungsvektor der Geraden. <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $g: \vec{x} = \vec{P} + t \cdot \vec{n}$ </div> Bestimme den Durchstoßpunkt dieser Geraden durch die Ebene. Dieser Durchstoßpunkt ist der Fußpunkt des Lotes, der als Spiegelpunkt dient. 	<ul style="list-style-type: none"> Bilde den Differenzvektor von \vec{P} und dem Aufpunkt der Ebene. Bilde das Skalarprodukt mit dem Einheitsvektor des Normalenvektors der Ebene. Der berechnete Wert t_f ist die Entfernung des Punktes \vec{P} von der Ebene. Benutzt man diesen Abstand und den Einheitsvektor des Normalenvektors, erhält man den Fußpunkt des Lotes. Dabei ist auf die Orientierung von \vec{n} zu achten. (s. Beispiel)

Über diesen Rechenweg mit senkrechter Geraden wird der Abstand nicht explizit bestimmt, da man den Abstand nicht unbedingt benötigt, sondern nur den Richtungsvektor von \vec{P} nach \vec{F} . Dieser Vektor ist dann wieder in \vec{F} noch einmal anzusetzen, um den Spiegelpunkt \vec{P}' zu bekommen.

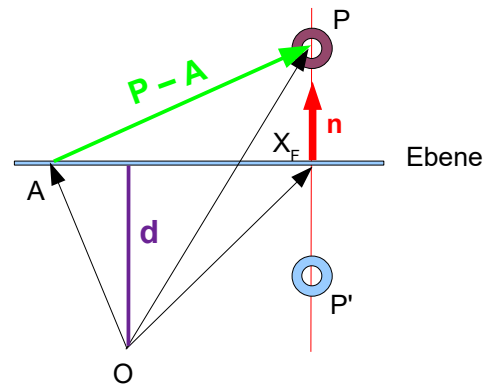
Der Lösungsweg über das Skalarprodukt benutzt den Abstand des Punktes \vec{P} von der Ebene. In den folgenden Beispielen wird gleich von einer Koordinatenform der Ebene ausgegangen. Da alle Abstandsberechnungen und auch die Spiegelungen nur über die Normalform einer Ebenen verlaufen wird auf den Schritt der Umwandlung einer Parameterform in die Normal- oder Koordinatenform verzichtet. Koordinatenform und Normalform sind nur zwei Schreibweisen ein und derselben Ebenengleichung.

Musterbeispiel Lösungsweg 1: senkrechte Gerade

Ebenengleichung: $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 45 = 0$

Punkt: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

senkrechte Gerade durch \vec{P} : $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$



Berechnung des Parameters des Durchstoßpunktes:
Geradengleichung in Ebenengleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} 2(3+2s) + 3(-1+3s) - 5(2-5s) + 45 &= 0 \\ 6 + 4s - 3 + 9s - 10 + 25s + 45 &= 0 \\ 38 + 38s &= 0 \\ s &= -1 \end{aligned}$$

Fußpunkt oder Durchstoßpunkt bestimmen: $\vec{x}_F = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

Abstandvektor bestimmen: $\vec{PF} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

gespiegelten Punkt bestimmen: $\vec{P}' = \vec{P} + 2 \vec{PF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix}$

Für die Benutzung des Skalarprodukts sind noch einige Vorbemerkungen notwendig.

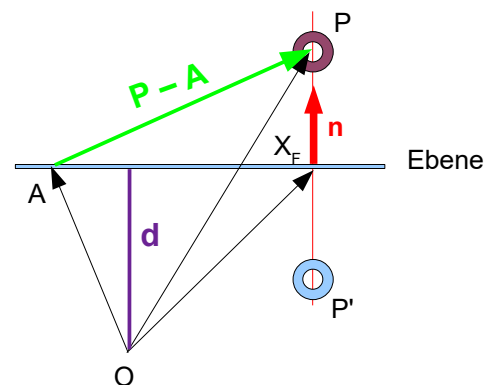
28.14.3.1. Normalenvektor zeigt in Richtung des Punktes

$$d_P = (\vec{P}-\vec{A}) \cdot \vec{n}^0$$

$d_P \vec{n}$ ist ein Vektor, der von der Ebene weg zum Punkt P zeigt. Der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel ist immer kleiner als 90° . Damit auch wirklich der Abstand von der Ebene zum Punkt genommen wird, muss der Abstand mit \vec{n}^0 multipliziert werden.

Außerdem benötigt man von P aus die Richtung hin zur Ebene und dann den gleichen Abstand noch einmal in die entgegengesetzte Richtung. Damit erhält man den Spiegelpunkt von P durch:

$$\vec{P}' = \vec{P} - 2 [(\vec{P}-\vec{A}) \cdot \vec{n}^0] \vec{n}^0$$



28.14.3.2. Normalenvektor zeigt in entgegengesetzte Richtung des Punktes

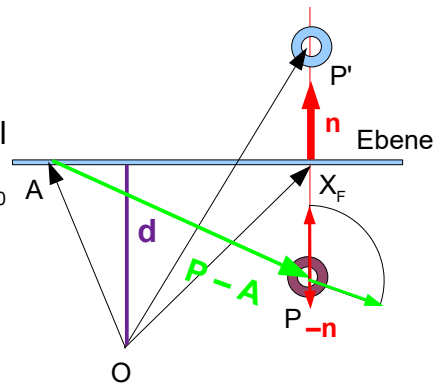
$$d_P = (P-A) \circ n^0$$

Die beiden Vektoren n und $(P-A)$ schließen einen Winkel von mehr als 90° ein. Damit liefert das Skalarprodukt einen negativen Wert, weil der \cos vor Winkel größer 90° negativ ist.

Auf Grund dessen ist die Projektion von $P-A$ auf den Normalenvektor eine Projektion auf $-n$ (siehe Zeichnung).

Damit zeigt $[(P-A) \circ n^0] n^0$ von P aus nicht in die Richtung der Ebene, sondern in die entgegengesetzte Richtung. Also muss $[(P-A) \circ n^0] n^0$ vom Punkt P aus subtrahiert werden, damit die Richtung zur Ebene hin zeigt.

$$P' = P - 2 [(P-A) \circ n^0] n^0$$



Musterbeispiel Lösungsweg 2: Skalarprodukt

Da die Ebenengleichung in Koordinatenform gegeben ist, hat man zunächst keinen Aufpunkt. Es ist also ein Punkt zu finden, der die Ebenengleichung erfüllt. Ein möglicher Punkt ist $A = (-4 \mid -4 \mid 5)$. Mit diesem Punkt als Aufpunkt wird die Aufgabe gerechnet.

Abstandsvektor von \vec{A} nach \vec{P} $\vec{AP} = \vec{P} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt mit dem Einheitsvektors des Normalenvektors der Ebene: $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{38}} (14+9+15) = \frac{38}{\sqrt{38}} = \sqrt{38}$

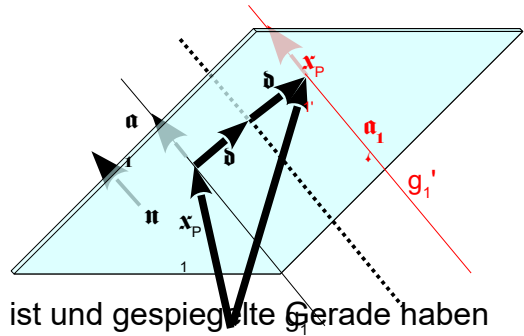
$$\vec{PF} = \vec{P} - d n^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \sqrt{38} \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Die beiden Abstandsvektoren sind identisch. Der weitere Rechenweg ist der gleiche wie bei dem 1. Lösungsweg.

Damit sind die Spiegelungen eines Punktes an Geraden und Ebenen geklärt. Sie enthalten keine wesentlich neuen Erkenntnisse. Etwas anders wird die Problemstellung, wenn man eine Gerade an einer Geraden spiegelt, oder eine Gerade an einer Ebene. Auch in diesen Zusammenhängen sind teilweise Punkte zu spiegeln. Auf den Rechenweg, diesen Spiegelpunkt zu bestimmen wird dann nicht weiter eingegangen sondern der gespiegelte Punkt nur angegeben und mit ihm weiter gerechnet.

28.14.4. Spiegelung einer Geraden an einer parallelen Geraden

- Parallele Geraden liegen zunächst immer in einer Ebene.
- Die gespiegelte Gerade muss auch in dieser Ebene liegen.
- Damit gibt es auch eine Ebene (wegen des Aufpunktes eigentlich unendlich viele), die zu allen Geraden senkrecht ist, nämlich die Ebene, die den Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor besitzt.
- Ausgangsgerade, Gerade, an der zu spiegeln ist und gespiegelte Gerade haben alle den gleichen Richtungsvektor.



Damit reduziert sich das Problem auf das Spiegeln eines Punktes der Ausgangsgeraden **senkrecht** zur Spiegellingsgeraden.

- Bestimme die Ebenengleichung, die senkrecht zu allen Geraden ist und den Aufpunkt der zu spiegelnden Geraden besitzt, in Normalform. Der Normalenvektor ist der Richtungsvektor der Geraden.
- Bestimme den Durchstoßpunkt der Geraden, an der zu spiegeln ist durch diese Ebene. Dieser Durchstoßpunkt ist der Fußpunkt des Lotes.
- Der Verbindungsvektor zwischen dem Aufpunkt der Ausgangsgeraden und diesem Fußpunkt ist noch einmal an den Fußpunkt anzusetzen und liefert einen Punkt auf der gespiegelten Geraden.
- Unter Benutzung des gegebenen Richtungsvektors ist die gespiegelte Gerade zu erstellen.

Musterbeispiel: Spiegle die Gerade g an der Geraden h

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

senkrechte Ebene durch den Aufpunkt von g :

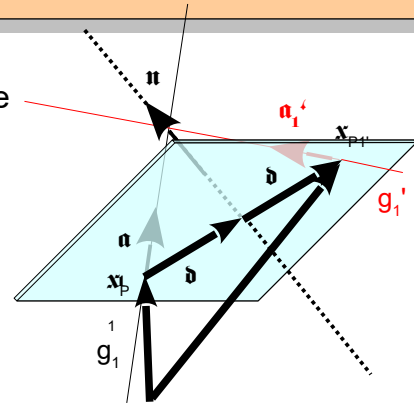
$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene liefert den Fußpunkt des Lotes für den Aufpunkt der Geraden g . Dazu setzt man die Geradengleichung h in die Ebenengleichung ein und bestimmt den notwendigen Parameter des Fußpunktes. Als Parameter ergibt sich $s = -3$ und als Fußpunkt $F = (-4 / 3 / -5)$. Damit ergibt sich als gespiegelter Punkt vom Aufpunkt: $A' = (-6/12 / -11)$ und als Geradengleichung:

$$g': \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -11 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

28.14.5. Spiegelung sich schneidender Geraden

- Geraden, die sich schneiden liegen in einer Ebene.
- Die gespiegelte Gerade muss auch in dieser Ebene liegen.
- Richtungsvektoren aller drei Geraden sind unterschiedlich.
- Bestimme den Schnittpunkt der sich schneidenden Geraden.
- Dieser Schnittpunkt muss auch auf der gespiegelten Geraden liegen.



Unter Kenntnis dieser Eigenschaften kann man folgenden Lösungsweg beschreiben:

- Erzeuge eine Ebene, die senkrecht zu der Geraden ist, an der gespiegelt werden soll. Der Normalenvektor ist der Richtungsvektor der Spiegelgeraden.
- Der Aufpunkt dieser Ebene ist aber der Aufpunkt \vec{P} der Ausgangsgeraden, die gespiegelt werden soll.
- Bestimme den Schnittpunkt dieser Ebene mit der Spiegelgeraden. Dieser Schnittpunkt ist der Fußpunkt \vec{F} des Lotes.
- Den Abstandsvektor von \vec{P} nach \vec{F} noch einmal in \vec{F} angesetzt ergibt den Spiegelpunkt \vec{P}'

Musterbeispiel: Spiegele die Gerade g an der Geraden h

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man bestimmt als erstes den Schnittpunkt der beiden Geraden: $S(2/1/3)$

Dann eine Hilfsebene senkrecht zu der Geraden, **an der gespiegelt** werden soll, in diesem Fall die Gerade h. Aufpunkt dieser Ebene ist weder der Aufpunkt der Geraden g. damit ist sicher gestellt, dass man von g senkrecht auf die Gerade h auftrifft und damit den Fußpunkt des Lotes vom Aufpunkt von g auf h bestimmt.

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Gesucht ist jetzt der Durchstoßpunkt der Geraden h durch diese Ebene. Das ist der Fußpunkt des Lotes. Dieser Fußpunkt ist $F=(0/0/2)$. Damit ergibt sich als gespiegelten Punkt $A' = (0/-1/3)$. Der Richtungsvektor der gespiegelten geraden ist aus der Differenz des gespiegelten Punktes A' und des Schnittpunktes zu berechnen. Als Geradengleichung ergibt sich damit:

$$g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kleine Möglichkeit der Kontrolle: Da alle drei Geraden in einer Ebene liegen muss das Skalarprodukt der Einheitsvektoren des Richtungsvektors der Ausgangsgeraden g mit der Spiegelungsgeraden h gleich dem Skalarprodukt der gespiegelten Geraden g' mit der Spiegelungsgeraden h sein, da die Winkel zwischen den Richtungsvektoren gleich sein

müssen. Um unterschiedliche Längen zwischen den gespiegelten Richtungsvektoren auszugleichen muss die Rechnung auf die Einheitsvektoren bezogen werden. Das Skalarprodukt von g und h ergibt 3 , die Beträge der beiden Vektoren sind $\sqrt{2}$ und $\sqrt{6}$. Damit ergibt sich als Wert $3/\sqrt{12}$.

Das Skalarprodukt von g' und h ergibt -6 und die Beträge $\sqrt{6}$ und $\sqrt{8}$.

$$\frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{12} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \quad \text{und für das zweite Skalarprodukt} \quad \frac{6}{\sqrt{48}} = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{48} = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{3 \cdot 16} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Die unterschiedlichen Vorzeichen liegen an der Orientierung der Richtungsvektoren. Wenn man für die gespiegelte Gerade den Vektor $(2/2/0)$ benutzt, statt des Vektors mit den negativen Komponenten erhält man auch positive Vorzeichen im Skalarprodukt.

28.14.6. Spiegelung einer Geraden an einer parallelen Ebene

- Bei einer Geraden, parallel zu einer Ebene haben alle Punkte den gleichen Abstand zur Ebene.
- Der Lotvektor ist der Normalenvektor der Ebene.
- Der Richtungsvektor der gespiegelten Geraden ist gleich dem Richtungsvektor der Ausgangsgeraden.

Lösungsweg:

- spiegele einen Punkt der Ausgangsgeraden an der Ebene.
- Dieser gespiegelte Punkt ist der Aufpunkt der gespiegelten Geraden. Richtungsvektor ist der Richtungsvektor der Ausgangsgeraden.

28.14.7. Spiegeln einer Geraden an einer Ebene, die die Ebene scheidet

Analog zum Spiegeln zweier Geraden, die sich schneiden, muss es hier einen Durchstoßpunkt geben, der auch auf der gespiegelten Geraden liegt.

- Berechne den Durchstoßpunkt \vec{S}
- Spiegele den Aufpunkt \vec{P} der Ausgangsgeraden an der Ebene. Bilde dazu die Lotgerade von \vec{P} auf die Ebene.
- Aus dem gespiegelten Punkt \vec{P}' und dem Durchstoßpunkt \vec{S} ergibt sich die Geradengleichung.

28.14.8. Spiegeln einer Ebene an einer parallelen Ebene

- Bilde von beiden Ebenen die Normalform.

- Parallele Ebenen haben den gleichen Normalenvektor.
- Spiegele einen Punkt der Ausgangsebene an der parallelen Ebene.
- Der gespiegelte Punkt ist der Aufpunkt für die Normalform der gespiegelten Ebene. Der Normalenvektor ist mit den beiden anderen identisch.

28.14.9. Spiegeln einer Ebene an einer sich schneidenden Ebene.

- Analog zu den beiden anderen Fällen: wenn es sich um sich schneidende Objekte handelt, muss die Schnittgerade auch in der gespiegelten Ebene liegen.
- Der Richtungsvektor der Schnittgeraden berechnet sich aus dem Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren.
- Zu der Schnittgeraden muss ein Aufpunkt bestimmt werden (s. Kapitel Schnittgeraden)
- Damit sind für die gespiegelte Ebene schon einmal ein Aufpunkt und ein Richtungsvektor bekannt.
- Spiegele einen Punkt der Ausgangsebene an der Spiegelebene
- Der Verbindungsvektor zum Aufpunkt der Schnittgeraden liefert den zweiten Richtungsvektor.

Musterbeispiel: spiegele die Ebene E an der Ebenen H.

$$E: 7x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0$$

$$H: 2x_1 - x_2 - x_3 - 1 = 0$$

Bestimme die Schnittgerade.

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ist das Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren. da der Richtungsvektor in beiden Ebenen liegt, muss das Skalarprodukt zu beiden Normalenvektoren 0 sein. Damit ist noch ein Punkt zu finden, der auf beiden Ebenen liegt und damit auch auf der Schnittgeraden. (*Es soll aus dem Gleichungssystem nicht die Schnittgerade als Lösung herauskommen, sondern nur ein Punkt, da der Richtungsvektor auf anderem Weg bestimmt wird.*)

$$7x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \quad | (-3)$$

$$7x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0$$

$$-6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -3$$

$$7x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 = -3$$

für $x_2 = 1$ und $x_1 = -1$ ist die zweite Gleichung lösbar.

für die erste Gleichung ergibt sich: $-7 - 5 - 3x_3 = 0$ mit der Lösung $x_3 = -4$

daraus ergibt sich ein Aufpunkt $(-1/ 1/ 4)$ und mittels Richtungsvektor folgende Geradengleichung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Als nächstes ist ein Punkt auf E gesucht, der dann an H gespiegelt wird. Dieser Punkt darf nicht auch noch auf g liegen, bzw. darf er kein Punkt von H sein, was das gleiche bedeutet. Für diesen Punkt gibt es zunächst jede Freiheit, er muss nur die Ebenengleichung von E erfüllen. Welcher Spiegelpunkt danach herauskommt, kann man hier noch nicht erkennen, so dass bei einem ungünstig gewählten Punkt durchaus ein unhandlicher Spiegelpunkt herauskommen kann. Am einfachsten lässt sich ein Punkt bestimmen, bei dem eine oder zwei Koordinaten gleich 0 sind. Hier soll der Punkt $P_2(0/3/-5)$ gewählt werden, obwohl in dem speziellen Fall auch der Ursprung $(0/0/0)$ möglich wäre.

Dieser Punkt ist an der Ebene H zu spiegeln.

Orthogonale Gerade zu H, die durch den Punkt P_2 geht:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimme den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene H:

$$2(2r) - (3 - r) - (-5 - r) = 1$$

$$4r - 3 + r + 5 + r = 1$$

$$6r + 2 = 1$$

$$r = -1/6$$

Dieser Wert für r liefert den Durchstoßpunkt D : $(-1/3 \mid 19/6 \mid -29/6)$

Als Abstandvektor ergibt sich: $D - P_2 = (-1/3 \mid 1/6 \mid 1/6)$

Diesen Vektor zweimal zu P_2 addiert liefert den gespiegelten Punkt P_2' :

$$(-2/3 \mid 10/3 \mid -14/3)$$

Der zweite Richtungsvektor ergibt sich aus dem Aufpunkt der Schnittgerade $(-1/1/4)$ und dem hier berechneten zweiten Punkt P_2' .

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2/3 \\ 10/3 \\ -14/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -7/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren können in ihrer Länge verändert werden, so dass als Richtungsvektor der Vektor $(-1 \mid -7 \mid 2)$ möglich ist. damit entsteht endgültig als gespiegelte Ebene:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$