23. Logarithmen

23.1. Definition des Logarithmus

Mit der Definition der Potenz wurde im Kapitel 21 gezeigt, dass man Aufgaben der Form

$$a^n = b$$

berechnen kann, wenn die Werte für a und n bekannt sind. Das heißt man kann Gleichungen der Art $4^3 = x$ berechnen. Im Kapitel 22 wurde gezeigt, dass man auch a berechnen kann, wenn b und n bekannt sind. Man kann die Potenzgleichung „auflösen nach der Basis a“.

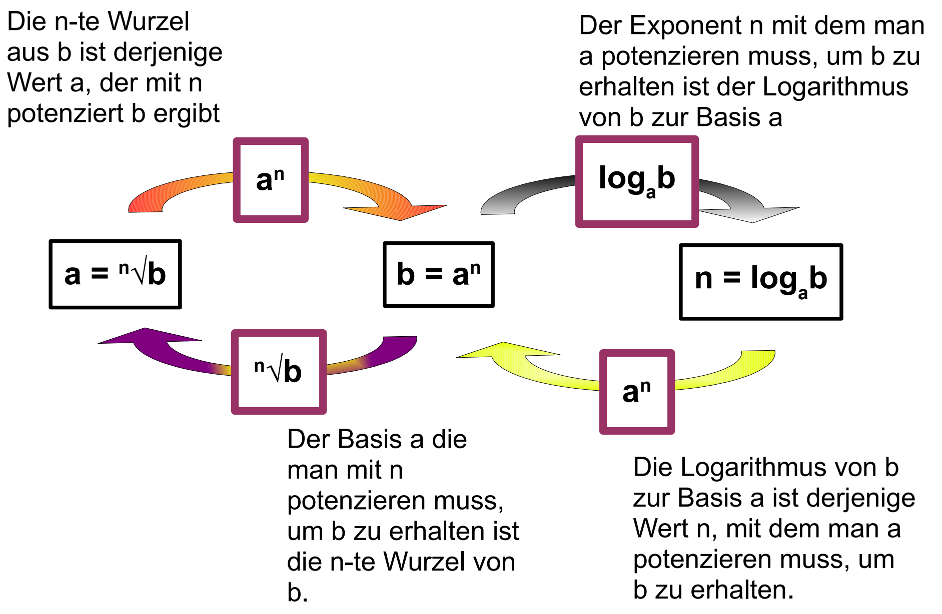
$$a = \sqrt[n]{b}$$

Beschreiben kann man das Ergebnis eines Wurzelausdrucks: Die n-te Wurzel aus einer Zahl b ist diejenige Zahl a, die man mit n potenzieren muss, um b zu erhalten.
Damit stellt sich unmittelbar die Frage: Kann man eine Potenzgleichung auch nach n auflösen? Ist eine Potenzgleichung auch nach dem Exponenten auflösbar ?
Die Auflösung bezeichnet man als Logarithmus:

$$n = \log_a b$$

Der Logarithmus von b zur Basis a ist derjenige Exponent n, mit dem man a potenzieren muss, um b zu erhalten

Der Logarithmus ist also nichts anderes als der Exponent einer Potenz. Die Basis, die man mit diesem Exponenten potenzieren muss steht am Fuß des Logarithmussymbols. Das Ergebnis dieses Potenzierens steht dahinter. Bis auf wenige Ausnahmen ist das Rechnen mit Logarithmen nur mit GTR oder Tabellen möglich.
Damit ist der Logarithmus eine Umkehroperation der Potenzoperation, die den Exponenten berechnet.



23.2. Der Logarithmus als Umkehrung der Exponentialfunktion

Für das Arbeiten mit Logarithmen sollte man die Potenz etwas anders schreiben, und zwar so, dass die Unbekannte x als Exponent und nicht als Basis auftritt. Statt $a^n = b$ oder $x^n = b$ sollte in diesem Fall $a^x = b$ geschrieben werden. Diese Gleichung wird mittels Logarithmus in $x = \log_a b$ nach x aufgelöst, so wie $x^n = b$ mittels Wurzel $x = \sqrt[n]{b}$ nach x aufgelöst wird.
Damit ist der Logarithmus nicht die Umkehrung der Potenzfunktion (dessen Umkehrung ist die Wurzelfunktion) sondern die Umkehrung der Exponentialfunktion.

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

Damit ist der Logarithmus eine Umkehroperation des Exponenzierens.

- a bezeichnet man als Basis
- x bezeichnet man als Logarithmus
- b bezeichnet man als Numerus

In dem Dokument zu Funktionen wird ausführlich zu den Zusammenhängen von Funktion und Umkehrfunktion geschrieben. Im Gegensatz zu Wurzelfunktionen gibt es hier keine Probleme mit der Monotonie. Exponentilafunktionen haben nur ein Monotonieverhalten, deshalb ist die Bildung der Umkehrfunktion immer möglich.

Der Logarithmus ist immer eine positive Zahl, da man negative Exponenten über die Potenzgesetze immer zu positiven Exponenten umformen kann. Auf der Basis der Potenzgesetze existieren auch Logarithmengesetze, ebenso, wie die Wurzelgesetze auf Potenzgesetze zurückzuführen sind.

23.3. Logarithmengesetze

Im Gegensatz zu Potenzen und Wurzeln gibt es Logarithmengesetze nur für Ausdrücke mit gleicher Basis a, aber sie gelten für jede Basis a.

23.3.1 Logarithmus eines Produktes

Aus den Potenzgesetzen ist bekannt: Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten **addiert**. Da der Logarithmus genau diese Exponenten darstellt kann man dieses Potenzgesetz wie folgt für Logarithmen umschreiben.

$$\boxed{\log_a(m \cdot n) = \log_a(m) + \log_a(n)}$$

Auf der linken Seite steht der Exponent eines Produktes und auf der rechten Seite die Summe von zwei Exponenten.

Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

Natürlich ist diese Regel nicht auf zwei Faktoren beschränkt, sondern kann auf beliebig viele Faktoren angewandt werden.

$$\log_7(15)=\log_7(3)+\log_7(5)$$

Bei diesem Wurzelgesetz ist auch die Benutzung in umgekehrter Richtung wichtig um verschiedene Logarithmen zusammenzufassen.

$$\log_5(4)+\log_5(7)=\log_5(28)$$

Um z.B. einen Logarithmusausdruck in eine Potenz umzuschreiben ist es notwendig, dass die Gleichung nur noch einen Logarithmusausdruck hat.

23.3.2 Logarithmus eines Quotienten

Bei den Potenzgesetzen gilt: Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten **subtrahiert**.

$$\boxed{\log_{\mathbf{a}}\left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}\right)=\log_{\mathbf{a}}(\mathbf{m})-\log_{\mathbf{a}}(\mathbf{n})}$$

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen des Dividenden minus dem des Divisor.

Im Gegensatz zum Produkt ist hier natürlich auf die Reihenfolge zu achten, welcher Wert ist von welchem abzuziehen.

$$\log_7\left(\frac{17}{8}\right)=\log_7(17)-\log_7(8)$$

Diese ersten beiden Logarithmengesetze bieten schon ein breites Anwendungsspektrum. Insbesondere für das Zusammenfassen verschiedener Logarithjmenausdrücke:

$$\log_5(4)+\log_5(7)-\log_5(3)-\log_5(11)=\log_5\left(\frac{4\cdot 7}{3\cdot 11}\right)=\log_5\left(\frac{28}{33}\right)$$

Vorausgesetzt, die Logarithmenausdrücke haben alle die gleiche Basis, dann sind alle Logarithmenwerte, die mit einem plus versehen sind in den Zähler des Bruches zu schreiben, und alle, die mit einem minus versehen sind in den Nenner.

$$\log_5(12)-\log_5(6)+\log_5(15)-\log_5(3)=\log_5\left(\frac{12\cdot 15}{6\cdot 3}\right)=\log_5 10$$

Aus diesem Logarithmengesetz folgt unmittelbar die Umrechnung eines reziproken Wertes:

$$\boxed{\log_{\mathbf{a}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)=-\log_{\mathbf{a}}(\mathbf{n})}$$

Der Grund liegt darin, dass $\log_a 1 = 0$ für alle a.

23.3.3 Logarithmus einer Potenz

Bei den Potenzgesetzen gilt: Eine Potenz wird potenziert, indem die Exponenten **multipliziert** werden. Der Logarithmus selbst ist aber auch ein Exponent.

$$\boxed{\log_a \mathbf{m}^\mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \log_a \mathbf{m}}$$

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt des Exponenten mit dem Logarithmus der Zahl ohne Potenz..

Das ermöglicht nicht nur, dass man den Logarithmus einer Potenz einfacher berechnen kann, sondern es ermöglicht auch zum Ziel des Zusammenfassens einen Faktor, der vor dem Logarithmus steht in den Logarithmus reinzuziehen.

$$\log_7(17^5) = 5 \cdot \log_7(17)$$

Die umgeschriebene Form lässt sicher den Logarithmus von 17^5 besser berechnen.

$$\log_5(4) - 2 \cdot \log_5(6) + 4 \cdot \log_5(15) = \log_5\left(\frac{4 \cdot 15^4}{6^2}\right)$$

Hier wurde das Logarithmengesetz wieder benutzt, um mehrere Logarithmen zu einem Ausdruck zusammenzufassen.

Damit sind von den Potenzgesetzen alle mit gleicher Basis in Logarithmengesetze umgesetzt. Es gibt keine weiteren, deshalb gibt es auch keine weiteren Logarithmen-gesetze.
Aus diser Regelung für Potenzen lässt sich sehr leicht der Umgang mit Wurzel bei Logarithmen ableiten. Deshalb wird die folgende Formel nicht als eingeständiges Logarithmengesetz geführt:

$$\boxed{\log_a (\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{m}})^\mathbf{k} = \log_a \mathbf{m}^{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}} \cdot \log_a \mathbf{m}}$$

Der Wurzelausdruck wird in eine Potenz mit gebrochen rationalen Exponenten umgeschrieben und das Logarithmengesetz für Potenzen angewandt.

23.4. Besondere Logarithmenwerte

Ebenso, wie bei den Potenzen gibt es auch bei den Logarithmen Werte, die fest stehen und die man irgendwann mal aus dem Kopf kennen sollte.

Potenzregel	Logarithmenregel
$a^0 = 1$	$\boxed{\log_a \mathbf{1} = \mathbf{0}}$

$a^1 = a$ $\qquad$ $\boxed{\log_a \mathbf{a} = \mathbf{1}}$

a^x immer positiv $\qquad$ Logarithmus für negative Werte nicht definiert

a^x wird niemals 0 $\qquad$ $\boxed{\log_a \mathbf{0} \quad \textbf{nicht definiert}}$

23.5. Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

Sehr häufig gebraucht werden die folgenden Beziehungen, die von der Eigenschaft Funktion und Umkehrfunktion Gebrauch machen. Diese Regeln gehören nicht zu den Logarithmengesetzen, da ihre Grundlage der Funktionsaspekt ist:

$$\boxed{\mathbf{a}^{\log_a \mathbf{b}} = \mathbf{b}}$$

und

$$\boxed{\log_a \mathbf{a}^{\mathbf{b}} = \mathbf{b}}$$

In beiden Fällen wird die Umkehrfunktion auf die Ausgangsfunktion angewandt. Im ersten Fall wird die Exponentialfunktion auf die Logarithmusfunktion angewandt, im zweiten Fall die Logarithmusfunktion auf die Exponentialfunktion. das Ergebnis ist in allen diesen Fällen gleich:

> Wird auf eine Funktion die Umkehrfunktion angewandt, dann ist das Ergebnis immer das Argument der Ausgangsfunktion.

In diesen Fällen ist es b. Bei der quadratischen Funktion und der Wurzelfunktion wird es meistens unbewußt benutzt, ist aber in Wirklichkeit nichts anderes:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad \text{und} \quad \left(\sqrt{a^2}\right) = a$$

Es wird die Quadratfunktion auf die Quadratwurzelfunktion angewandt, oder die Quadratwurzelfunktion auf die Quadratfunktion. Die Begründung, warum diese Beziehung gilt ist genau die gleiche.

Zur Sprechweise: Man sollte nicht sagen „Funktion und Umkehrfunktion kürzen sich weg“ . Kürzen ist ein Sprachgebrauch aus der Bruchrechnung. Korrekter ist die Formulierung „Funktion und Gegenfunktion heben sich auf“ . Diese Formulierung entspricht der Abbildungseigenschaft, der eine Funktion unterliegt. Es werden zwei Abbildungen aufeinander angewandt und das Ergebnis ist wieder der Ausgangswert.

Aus dieser Formel von Funktion uns Umkehrfunktion wird eine weitere sehr wichtige Logarithmenregel abgeleitet. das sogenannte „Basistransformationsgesetz“ oder die „Kettenregel“. Hier geht es darum, wie man die Logarithmen von einer Basis auf Logarithmen zu einer andren Basis transformieren kann.

23.6. Basistransformationsgesetz

Ausgangspunkt dieser Herleitung ist oben angegebene Beziehung

$$\mathbf{a}^{\log_{\mathbf{a}} \mathbf{b}} = \mathbf{b}$$

Diese geasamte Gleichung soll jetzt beidseitig logarithmiert werden zu einer beliebigen Basis c:

$$\log_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}^{\log_{\mathbf{a}} \mathbf{b}}) = \log_{\mathbf{c}} \mathbf{b}$$

Nach der Potenzregel lässt sich der Exponent von a vor den Logarithmus ziehen:

$$\log_{\mathbf{a}} \mathbf{b} \cdot \log_{\mathbf{c}} \mathbf{a} = \log_{\mathbf{c}} \mathbf{b}$$

In diesem Ausdruck tritt ein Logarithmenausdruck zur Basis a auf und zwei Logarithmenausdrücke zur Basis c. Die Gleichung soll aufgelöst werden nach dem einen Logarithmenausdruck zur Basis a.

$$\boxed{\log_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\log_{\mathbf{c}} \mathbf{b}}{\log_{\mathbf{c}} \mathbf{a}}}$$

Was bringt diese Formel ? Wenn man einen Logarithmenausdruck berechnen soll, den der GTR nicht berechnen kann, z. B $\log_7(15)$ dann kann man über diese Formel den gesuchten Wert über die Logarithmen zu einer anderen Basis berechnen. Dazu benutzt man dann eine Basis, die im GTR implementiert ist, z.B den Logarithmus zur Basis 10. Auf den GTR meist mit einer Taste „log" direkt angegeben oder über die Zweitbelegung aufrufbar.

$$\log_7 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 7} = \frac{1{,}176091}{0{,}845098} = 1{,}3916625$$

Da auf GTR meist Funktionstasten y^x vorhanden sind, kann das Ergebnis direkt geprüft werden.

$$7^{1{,}3916625} = 15$$

Man sollte bei solchen Berechnungen nicht mit Kommastellen sparen. Vier Stellen nach dem Komma sind das mindeste. Besser sind sechs Stellen, oder man rechnet das Ergebnis in einer Eingabe durch, ohne sich Zwischenergebnisse rauszuschreiben. Rundungsfehler können zu erheblichen Abweichungen führen.

23.7. Kehrwert eines Logarithmus

Diesmal soll von dem Basistransformationsgesetz ausgegangen werden.

$$\log_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\log_{\mathbf{c}} \mathbf{b}}{\log_{\mathbf{c}} \mathbf{a}}$$

Wie ändert sich die Formel, wenn man statt eines beliebigen Wertes c den Wert b als neue Basis benutzt:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a}$$

Aus dem vorherigen Abschnitt über feste Logarithmenwerte ist bekannt, dass der Zähler auf der rechten Seite gleich 1 ist, da der Logarithmus zur eigenen Basis berechnet wird. Damit ergibt sich aus der Transformationsformel:

$$\boxed{\log_a \mathbf{b} = \frac{\mathbf{1}}{\log_b \mathbf{a}}}$$

In dieser Formel ist Numerus und Basis vertauscht. es lassen sich bei Logarithmen also folgende Umrechnungen durchführen:

$$\log_5 17 = \frac{1}{\log_{17} 5}$$

Wenn man Numerus und Basis vertauscht, muss man den Kehrwert bilden und erhält den gleichen Wert.
Außerdem gilt noch folgende Beziehung, die aber weniger gebraucht wird.

$$\boxed{\log_a \mathbf{b} = \log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}}\right)}$$

23.8. Stolperfallen bei Logarithmengesetzen

Genauso, wie es bei den Potenzgesetzen keine Rechenregeln für die Summen und Differenzen gibt, gibt es bei den Logarithmen keine Rechenregeln für Summen und Differenzen

$$\boxed{\log_c (a + b) \neq \log_c (a) \cdot \log_c (b)}$$

Ein „beliebter“ Fehler in Verwechslung zum Logarithmengesetz für ein Produkt:
Der Logarithmus **eines Produktes** => ist die **Summe der Logarithmen**
Der Logarithmus **einer Summe** => kann nicht weiter umgeformt werden

Es gilt auch hier, wie bei dem Potenzgesetz: Die Rechenoperationen im Logarithmus sind eine Stufe niedriger, als im Numerus. Aus einem Produkt wird eine Summe, aus einer Potenz wird ein Produkt. Für eine Summe gibt es keine niedrigere Rechen-operation !

Es gibt auch keine direkte Möglichkeit Logarithmen verschiedene Basen zusammenzufassen

$$\boxed{\log_c a + \log_b a}$$

Man könnte hier mit dem Basistransformationsgesetz oder den Reziproken des Logarithmus einige Umformungen durchführen, die machen aber den Ausdruck nicht unbedingt besser berechenbar. Es entstehen dann Hauptnennerbildungen mit Logarithmen als Nenner, die keine einfacheren Ausdrücke darstellen.

