22. Wurzeln

22.1. Definition der Wurzel

Mit der Definition der Potenz wurde im vorherigen Kapitel gezeigt, dass man Aufgaben der Form

$$a^n = b$$

berechnen kann, wenn die Werte für a und n bekannt sind. Das heißt man kann Gleichungen der Art $4^3 = x$ berechnen. In diesem Kapitel soll es darum gehen bei dem oben angegebenen Potenzausdruck nicht den Wert b zu berechnen, sondern den Wert a. Damit werden Gleichungen der Art $x^3 = 7$ gelöst. Es sind im Potenzausdruck von den drei notwendigen Größen zwei andere bekannt, als bei der Potenzrechnung. Interpretieren kann man diese Gleichungen als: Gesucht ist diejenige Zahl a, die man mit n potenzieren muss um b zu erhalten. Die Frage nach der Lösbarkeit dieser Gleichung ist die Frage nach der Möglichkeit den Potenzausdruck so umzustellen, dass auf einer Seite der Gleichung das a allein steht. Diese 1. Umstellung des Potenzausdrucks bezeichnet man als Wurzel und schreibt ihn folgendermaßen:

$$a = \sqrt[n]{b}$$

Damit ist die Wurzel eine Umkehroperation der Potenzoperation.

- a bezeichnet man als Wurzel
- n bezeichnet man als Wurzelexponent
- b bezeichnet man als Radikand

Auf grund der engen Verbindung zwischen Potenzen und Wurzeln, wie sie im vergangenen Kapitel erläutert wurden, ist es möglich für Wurzelausdrücke analoge Formeln zu definieren, wie sie für Potenzen möglich sind.

22.1.1 Die Wurzel als Umkehrung des Potenzierens

Man benötigt also die Wurzeln um einen Potenzausdruck nach der Basis aufzulösen. Damit ist die Wurzel die Umkehrung des Potenzieren. Aus der Gleichung $x^n = y$ wird der Ausdruck $x = \sqrt[n]{y}$. Dabei ist zu beachten, dass der Exponent jeweils eine fest definiert Zahl ist und keine Variable. das bedeutet auch, dass jede Potenzfunktion ihre eigene Umkehrfunktion hat. Die Verbindung zwischen beiden ist durch den gleichen Exponenten gegeben. Die Funktion $y = x^2$ hat als Umkehrfunktion $y = \sqrt{x}$, da der Wurzelexponent 2 als einziger weggelassen werden darf, bzw. steht eine Wurzel ohne Wurzelexponent, so ist immer 2 gemeint. Für die Funktion $y = x^3$ ist die Umkehrfunktion $y = \sqrt[3]{x}$ und für $y = x^{12}$ ist es $y = \sqrt[12]{x}$.
Dabei ist noch zu beachten, dass ein Wurzelexponent 0 nicht zugelassen ist, da jede Potenz $a^0 = 1$ ist, kann man der Umkehrung $\sqrt[0]{1}$ kein eindeutiges a zuweisen. Damit ist eine solche Gleichung nicht lösbar.

Aber bereits bei der Umkehrung der Funktion $y = x^2$ gibt es ein paar Probleme. Für $x = -1$ und $x = 1$ erhält man den gleichen y – Wert. Welcher Wert ist dann als das Ergebnis von $\sqrt{4}$ anzugeben ? Der Wert $x = +2$ oder $x = -2$. Deshalb gibt es eine eindeutige Festlegung, was man unter dem Wert einer Wurzel zu verstehen hat.

Definition: Der Wert der Wurzel $\sqrt[n]{b}$ ist diejenige nicht negative Zahl a, für die gilt : $a^n = b$

Damit ist das Ergebnis der Wurzel immer eine positive Zahl oder Null. Von dieser Festlegung ist die Lösung einer quadratischen Gleichung zu unterscheiden. Eine quadratische Gleichung besitzt zwei Lösungen.

1. Die Wurzel aus 4 ist 2, denn $\sqrt{4} = 2$, da $2^2 = 4$
2. Die quadratische Gleichung $x^2 = 4$ besitzt zwei Lösungen, $+\sqrt{4}$ und $-\sqrt{4}$. Die Wurzel liefert wieder den eindeutigen Wert 2, so dass die Gleichung die zwei Lösungen +2 und –2 besitzt.

Es ist also immer zu unterscheiden, ist aus einer Zahl die Wurzel zu berechnen, oder ist eine quadratische Gleichung zu lösen.
Eine ähnliche Problematik tritt auf bei negativen Zahlen unter der Wurzel. Ist der Wurzelexponent eine gerade Zahl, dann gibt es für negative Zahlen kein Ergebnis. Die Wurzel ist nicht zu berechnen.Bei ungeraden Exponenten ist die Sache etwas anders. Wenn man die Zahl –2 in die dritte Potenz erhebt, erhält man wieder eine negative Zahl, nämlich –8, wie soll man also den Ausdruck $\sqrt[3]{-8}$ behandeln. Gibt es da kein Ergebnis, obwohl die Umkehrung mit Potenzieren möglich ist, oder weicht man die Wurzeldefinition auf. Man hat sich dafür entschieden für solche Wurzeln eine Festlegung oder Definition zu treffen, die der Wurzeldefinition als positiven Ergebnis nicht widerspricht aber auch negative Wert bei ungeraden Wurzeln zulässt.

Definition: Der Wert der Wurzel $\sqrt[n]{b}$ für negative Werte b und ungerade Wurzelexponenten n ist definiert als $\mathbf{-\sqrt{|b|}}$

Damit ist gesichert, dass Wurzeln nur aus positiven Zahlen berechnet werden, weil |b| für negatives b positiv ist, und es ist auch gesichert, dass das Ergebnis das notwendige negative Vorzeichen besitzt.

22.2. Wurzelgesetze mit gleichem Wurzelexponenten

22.2.1 Multiplizieren zweier Wurzeln

Zwei Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten werden multipliziert, indem man die Wurzel aus dem Produkt des Radikanden zieht, wobei der Wurzelexponent beibehalten wird:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Man braucht diesen Satz auch in umgekehrter Richtung.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Lässt sich der Radikand einer Wurzel als Produkt schreiben, kann man die Wurzel ziehen, indem man für jeden Faktor einzeln die Wurzel zieht, bei Beibehaltung des gleichen Wurzelexponenten. Dieses Vorgehen bezeichnet man als „teilweises Wurzelziehen“. Dabei ist wichtig, dass die Zerlegung in Faktoren und nicht in Summanden erfolgt.
Anwendung findet diese Art der Umrechnung etwa bei folgendem Beispiel:

$$\sqrt[2]{48} = \sqrt[2]{16 \cdot 3} = \sqrt[2]{16} \cdot \sqrt[2]{3} = 4 \cdot \sqrt[2]{3}$$

Damit lassen sich einerseits die Zahlen in den Wurzeln vom Wert her verkleinern, andererseits kann es dadurch möglich werden verschiedenen Wurzelausdrücke zusammenzufassen.

$$\sqrt[2]{48} + \sqrt[2]{75} = \sqrt[2]{16 \cdot 3} + \sqrt[2]{25 \cdot 3} = \sqrt[2]{16} \cdot \sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{25} \cdot \sqrt[2]{3} = 4 \cdot \sqrt[2]{3} + 5 \cdot \sqrt[2]{3} = 9 \cdot \sqrt[2]{3}$$

Dabei ist zu beachten, dass die beiden Wurzeln auf der linken Seite sich nicht zusammenfassen lassen. Für die Addition zweier Wurzeln gibt es keine Formeln. Nach dem Umschreiben der Wurzeln lassen sich sich zusammenfassen, aber nicht auf der Grundlage von Wurzelgesetzen, sondern auf der Grundlage von Termausdrücken oder Ausklammern. Beide Summanden besitzen den gleichen „Buchstaben“ $\sqrt[2]{3}$, so dass sich die Ausdrücke Zusammenfassen lassen, indem man ihrer Koeffizienten addiert (Termrechnung) oder man sagt: beide Ausdrücken besitzen den gleichen Faktor $\sqrt[2]{3}$, der sich damit ausklammern lässt $\sqrt[2]{3}\,(4 + 5)$. Beide Begründungen sind möglich, aber keine Wurzelregeln !

22.2.2 Dividieren zweier Wurzeln

Genauso, wie beim Multiplizieren zweier Wurzeln kann man auch beim Dividieren zwei Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten zusammenfassen.

> Zwei Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten werden dividiert, indem man die Wurzel aus dem Quotient des Radikanden zieht, wobei der Wurzelexponent beibehalten wird:

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$$

Der Quotient, der von den zwei Wurzeln gebildet wird, kann unter eine Wurzel geschrieben werden. Damit ist es eventuell möglich, die Werte zu kürzen und damit den Wurzelausdruck zu vereinfachen.

$$\frac{\sqrt[2]{48}}{\sqrt[2]{75}} = \frac{\sqrt[2]{16 \cdot 3}}{\sqrt[2]{75 \cdot 3}} = \sqrt[2]{\frac{16 \cdot 3}{25 \cdot 3}} = \sqrt[2]{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt[2]{16}}{\sqrt[2]{25}} = \frac{4}{5}$$

Bei diesem Beispiel wurde das Wurzelgesetz auch in der Richtung von rechts nach links benutzt, um im Zähler und Nenner jeweils die Wurzeln einzeln ziehen zu können.

Die beiden bisher angegebenen Formeln entsprechen genau den beiden Potenzgesetzen, die für unterschiedliche Basis und gleichem Exponent gelten. Bleiben noch die Die Formeln für gleiche Basis und unterschiedlichem Exponenten. Da existierten bei den Potenzgesetzen drei verschiedene:

- Wenn Potenzen mit gleicher Basis Multipliziert werden – bleibt die Basis erhalten und die Exponenten werden addiert
- Wenn Potenzen mit gleicher Basis dividiert werden – bleibt die Basis erhalten und die Exponenten werden subtrahiert.
- Wenn Potenzen mit gleicher Basis potenziert werden – bleibt die Basis erhalten und die Exponenten werden multipliziert.

22.2.3 Die Wurzel aus einer Wurzel (Verschachtelte Wurzelausdrücke)

Als erstes sollen hier verschachtelte Wurzelausdrücke behandelt werden. Sie entsprechen dem dritten Fall bei den Potenzgesetzen, dem Potenzieren einer Potenz.

Die Wurzel aus einer anderen Wurzel wird berechnet, indem man die beiden Wurzelexponenten multipliziert und den Radikanden beibehält.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

Als Nebenergebnis dieses Wurzelgesetzen erhält man die Aussage: Verschachtelte Wurzel können in ihrer Reihenfolgen vertauscht werden. Da das Produkt der Wurzelexponenten in beiden Fällen das Gleiche ist.

22.2.4 Die Potenz einer Wurzel

Es lassen sich nicht nur zwei Wurzeln verschachteln, sondern es lässt sich eine Wurzel auch Potenzieren. Analog lässt sich aus einer Potenz eine Wurzel ziehen, auch, wenn Potenz und Wurzelexponent nicht den gleichen Wert haben. Bei gleichem Wert entsteht als Ergebnis einfach der Radikand. das war gleichzeitig auch die Definition, was unter einer Wurzel zu verstehen ist.

Die Potenz einer Wurzel wird berechnet, indem man den Radikanden zur Potenz erhebt und dann aus dem Ergebnis die Wurzel zieht.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{\left(a^m\right)}$$

Etwas lasch formuliert heißt dieses Gesetz: Man kann den Exponenten unter die Wurzel ziehen. Damit existiert nicht nur einen Regel, wie man mit der Potenz einer Wurzel verfährt, sondern auch eine Regel, wie man mit der Wurzel einer Potenz verfährt.
Für das Verständnis weiterer Wurzelgesetze ist ein grundlegender Zusammenhang zwischen einem Exponenten einer Potenz und einem Wurzelexponenten von entscheidender Bedeutung.

22.3. Jede Wurzel ist auch eine Potenz

Dazu soll noch einmal die Definition einer Wurzel betrachtet werden.

Die n – te Wurzel einer Zahl a ist diejenige Zahl, die man in die n – te Potenz erheben muss, damit a als Ergebnis rauskommt.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Das versteht man unter dem Wert einer Wurzel. Wenn sich die Wurzel aus als Exponent schreiben lassen soll, muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\left(a^k\right)^n = a$$

Lässt sich eine Zahl k so finden, dass nach den Regeln der Potenzgesetze diese Aufgabe lösbar ist, dann kann man die Wurzel auch als Potenz schreiben. Der Exponent auf der rechten Seite für das a ist gleich 1. Damit muss folgende Gleichung gelöst werden: $k \cdot n = 1$

Bei gegebenem n ergibt sich als Lösung k = 1 / n. Damit kann man einen Wurzelexponenten auch als Potenz schreiben.

Die n – te Wurzel einer Zahl a kann man als Potenz schreiben, indem man als Exponenten den Kehrwert des Wurzelexponenten benutzt.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Dieser Zusammenhang ist so fundamental, dass man in der praktischen Arbeit nie mit Wurzel rechnet, sondern jede Wurzel vor weiterer Berechnung in eine Potenz überführt. „Es gibt keine Wurzel, nur Potenzen mit gebrochen rationalem Exponenten“.
Dadurch kann alles über Potenzgesetze abgewickelt werden. Bei eventuell notwendiger Addition oder Subtraktion von Exponenten gelten die Gesetze der Bruchrechnung: Addieren und Subtrahieren ist nur mit gleichem Nenner möglich, eventuell Hauptnenner bilden.

22.4. Wurzelgesetze mit unterschiedlichem Wurzelexponenten

22.4.1 Produkt zweier Wurzeln mit unterschiedlichem Wurzelexponenten

Wurzeln mit gleichem Radikanden und unterschiedlichen Wurzelexponenten werden in Potenzen mit Brüchen umgeschrieben und als Potenzen zusammengefasst. Nachträglich kann der Ausdruck wieder als Wurzel geschrieben werden.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{n}}\cdot a^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{m+n}{n\cdot m}}=\sqrt[n\cdot m]{a^{m+n}}$$

22.4.2 Quotient zweier Wurzel mit unterschiedlichem Wurzelexponenten

In diesem Fall verfährt man analog der Vorgehensweise für das Produkt:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}}=a^{\frac{1}{n}}\cdot a^{-\frac{1}{m}}=a^{\frac{m-n}{n\cdot m}}=\sqrt[n\cdot m]{a^{m-n}}$$

Da diese Regel direkt aus den Potenzgesetzen hergeleitet werden, werden sie oftmals nicht unter den Wurzelgesetzen geführt.

Diese beiden Wurzelgesetze können manchmal ganz nützliche Hilfen sein, wenn man unterschiedliche Wurzeln mit gleichem Radikanden zu bearbeiten hat.

$$\sqrt[2]{5}\cdot\sqrt[3]{5}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{3+2}{2\cdot 3}}=2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{5^5}$$

Damit lassen sich auch Wurzeln mit unterschiedlichem Wurzelexponenten und gleichem Radikanden zusammenfassen.

22.4.3 Erweitern des Wurzelexponenten

Eine relativ wenig bekannte Formel lässt sich aus der Exponentschreibweise eines Wurzelausdrucks ableiten. da ein Wurzelexponent in Potenzschreibweise einen Bruch darstellt, kann man auch die Regeln für Bruchrechnen darauf anwenden. Brüche lassen sich sowohl kürzen, als auch erweitern. Hier soll das Erweitern von Brüchen dazu benutzt werden zwei Wurzen zusammenzufassen, die sich auf den ersten Blick nicht zusammenfassen lassen.

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1\cdot k}{n\cdot k}}=\sqrt[n\cdot k]{a^k}$$

Diese zunächst ziemlich sinnlos erscheinende Formel macht aber folgende Berechnung möglich:

$$\sqrt[3]{11}\cdot\sqrt[7]{5}=\sqrt[3\cdot 7]{11^7}\cdot\sqrt[7\cdot 3]{5^3}=\sqrt[21]{11^7\cdot 5^3}$$

Durch geschicktes Erweitern des Wurzelexponenten, so dass bei beiden Wurzel der gleiche Wurzelexponent steht, ermöglicht das Zusammenfassen der beiden Wurzeln zu einer Wurzel. Damit kann Möglicherweise ein weiteres Zusammenfassen ermöglicht werden.
Auch über ein Kürzen des Wurzelexponenten kann man nachdenken. Die Umschreibung in die Potenzdarstellung macht aber die Berechnung einfacher und klarer.

$$\sqrt[3]{11^6}=11^2\left(=11^{\frac{6}{3}}=11^2\right)$$

oder

$$\sqrt[6]{11^2}=11^{\frac{2}{6}}=11^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{11}$$

22.5. Addition und Subtraktion von Wurzeln

Generell gilt:

Addition und Subtraktion von Wurzeln ist nach Wurzelgesetzen nicht möglich.

Addition und Subtraktion von Wurzeln ist nur nach den Vorschriften der Termaddition möglich, dh. es können nur gleiche Wurzel zusammengefasst werden, dabei wird eine Wurzel wie ein Buchstabe behandelt und die Koeffizienten werden nur addiert oder subtrahiert.

$$5\cdot\sqrt[3]{7}+3\cdot\sqrt[3]{7}=8\cdot\sqrt[3]{7}$$

andere Zusammenfassungen sind nicht möglich. Letzten Endes steckt hinter dieser Zusammenfassung nur ein Ausklammern des Wurzelausdrucks:

$$5\cdot\sqrt[3]{7}+3\cdot\sqrt[3]{7}=(5+3)\cdot\sqrt[3]{7}=8\cdot\sqrt[3]{7}$$

Gefahr

$$\boxed{5\cdot\sqrt[3]{7}+3\cdot\sqrt[4]{7}=}$$

muss so stehenbleiben, wie es dasteht. Es gibt keine Möglichkeit der weiteren Zusammenfassung. Selbst eine Erweiterung auf einen gemeinsamen Wurzelexponenten von 12 würde zunächst folgende Änderung bringen:

$$\boxed{5\cdot\sqrt[12]{7^4}+3\cdot\sqrt[12]{7^3}=}$$

Hier sind zwar die beiden Wurzelexponenten gleich, da aber die Wurzelausdrücke nicht gleich sind, können die beiden Wurzel auch nicht ausgeklammert werden. Für Profis wäre hier noch folgende Umformung möglich:

$$\boxed{=\sqrt[12]{7^3}\left(5\cdot\sqrt[12]{7}+3\right)}$$

Aber da wird die Trickkiste schon weit aufgemacht. In wieweit das sinnvoll ist, liegt an der Gesamtaufgabenstellung, zeigt aber, wie vielfältig die Möglichkeiten sind. Dieses Ausklammern folgt wieder den Gesetzen der Termoperation und nicht irgendwelchen Wurzelgesetzen.

22.6. Rationalmachen des Nenners

Ein wichtigere und häufig benutze Problemstellung ist das Rationalmachen des Nenners. Dabei geht es darum Wurzelausdrücke bei Brüchen so umzuformen, dass aus dem Nenner die Wurzeln entfernt werden, indem man den Bruch geschickt erweitert, dass nur noch Wurzeln im Zähler auftreten, aber nicht mehr im Nenner. Der Hintergrund solcher Umformungen ist klar und sinnvoll. Müssen Brüche wegen Addition zusammengefasst werden, dann sind Hauptnenner zu bilden. Treten dann in Nennern Wurzelausdrücke auf, wird die Hauptnennerbildung und die notwendige Erweiterung ziemlich schwierig. Aus diesem Grund sollen Wurzel aus dem Nenner entfernt werden. Wichtig ist dabei sich klar zu werden: Der Wurzelausdruck verschwindet nur im Nenner, dafür handelt man sich einen Wurzelausdruck im Zähler ein.

22.6.1 Rationalmachen eines Nenners mit Quadratwurzel

Da Quadratwurzeln am häufigsten auftreten, hat man es auch am häufigsten mit einer solchen Aufgabenstellung zu tun. Hier macht man sich zu Nutze, dass das Quadrat einer Quadratwurzel ein Ausdruck ohne Wurzel ist.

$$\boxed{\frac{c}{\sqrt[2]{a}}=\frac{c\cdot\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{a}\cdot\sqrt[2]{a}}=\frac{c\cdot\sqrt[2]{a}}{a}}$$

Im Zähler kann irgendeine beliebige Konstante stehen, oder sogar ein Summenausdruck, dann ist diese Umrechnung immer durchführbar. Grundlegende Voraussetzung ist, dass im Nenner die Wurzel allein auftritt. Damit ist der Wurzelausdruck im Nenner verschwunden und man kann mit dem Ausdruck weiterarbeiten, wie mit einem normalen Bruch.

$$\frac{(3a+4b)}{\sqrt[2]{7}}=\frac{(3a+4b)\cdot\sqrt[2]{7}}{\sqrt[2]{7}\cdot\sqrt[2]{7}}=\frac{(3a+4b)\cdot\sqrt[2]{7}}{7}$$

22.6.2 Rationalmachen des Nenners mit einer höheren Wurzel

Wie muss man einen solchen Ausdruck erweitern, damit bei einer höheren Wurzel der Wurzelausdruck im Nenner verschwindet. Der Wurzelausdruck im Nenner verschwindet, wenn die Summe der beiden Potenzen, die in der Wurzel stehen genau den Wert des Wurzelexponenten ergibt. In Formel ausgedrückt muss generell folgendes gelten:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^k}\cdot\sqrt[n]{a^{(n-k)}}=\sqrt[n]{a^n}=a}$$

Für das Rationalmachen einer beliebigen Wurzel im Nenner bedeutet das:

$$\boxed{\frac{c}{\sqrt[n]{a^k}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{(n-k)}}}{\sqrt[n]{a^k}\cdot\sqrt[n]{a^{(n-k)}}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{(n-k)}}}{a}}$$

Als Anwendung in einem Beispiel:

$$\frac{(3a+4b)}{\sqrt[5]{7^2}}=\frac{(3a+4b)\cdot\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2}\cdot\sqrt[5]{7^3}}=\frac{(3a+4b)\cdot\sqrt[5]{7^3}}{7}$$

22.6.3 Rationalmachen eines Nenners mit einer Summe oder Differenz von Quadratwurzeln

Interessant sind noch aufgaben, bei denen im Nenner eine Summe oder Differenz von zwei Quadratwurzeln steht, oder eine Summe und Differenz, bei der wenigstens ein Ausdruck eine Quadratwurzel ist. Beide Fälle werden gleich behandelt. Die Lösung des Problems heißt: **3. Binomische Formel**. Warum ?
Nur bei der 3. Binomischen Formel treten die Quadrate der einzelnen Ausdrücke auf. Bei der 1. und 2. Binomischen Formel tritt ein Mittelglied 2ab auf, das in diesem Fall bedeuten würde es bleiben die Wurzeln erhalten.

$$\boxed{\frac{\mathbf{c}}{\sqrt{\mathbf{a}}-\sqrt{\mathbf{b}}}=\frac{\mathbf{c}\cdot(\sqrt{\mathbf{a}}+\sqrt{\mathbf{b}})}{(\sqrt{\mathbf{a}}-\sqrt{\mathbf{b}})\cdot(\sqrt{\mathbf{a}}+\sqrt{\mathbf{b}})}=\frac{\mathbf{c}\cdot(\sqrt{\mathbf{a}}+\sqrt{\mathbf{b}})}{\mathbf{a}-\mathbf{b}}}$$

oder, wenn nur eine Wurzel auftritt:

$$\boxed{\frac{\mathbf{c}}{\sqrt{\mathbf{a}}-\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{c}\cdot(\sqrt{\mathbf{a}}+\mathbf{b})}{(\sqrt{\mathbf{a}}-\mathbf{b})\cdot(\sqrt{\mathbf{a}}+\mathbf{b})}=\frac{\mathbf{c}\cdot(\sqrt{\mathbf{a}}+\mathbf{b})}{\mathbf{a}-\mathbf{b}^2}}$$

Tritt im Nenner ein Ausdruck mit einem „+“ Rechenzeichen auf, ist mit dem entsprechenden Ausdruck mit einem „–“ Rechenzeichen zu erweitern.

Entsprechende Ausdrücke zu bearbeiten die keine Quadratwurzeln sind bedeuten einen erheblichen Rechenaufwand oder sind auch gar nicht realisierbar.
Deshalb soll hier nur noch auf zwei Kombinationsmöglichkeiten aufmerksam gemacht werden, die ein Zusammenwirken der bisher kennengelernten Methoden bedeuten. Solche Ausdrücke sind nicht sehr häufig, aber es ist nützlich solche Methoden zu kennen.

22.6.4 Rationalmachen komplizierterer Ausdrücke mit Quadratwurzeln

Als erstes soll eine Ausdruck betrachtet werden, bei dem im Nenner eine geschachtelte Wurzel mit einer Summe von zwei Wurzel steht.

$$\boxed{\frac{c}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}=}$$

Da hier die Summe von zwei Wurzeln noch einmal durch eine übergeordnete Wurzel zusammengefasst wird, ist erst mit dem Wurzelausdruck zu erweitern, damit im Nenner die äußere Wurzel entfällt.

$$\frac{c}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}=\frac{c\cdot\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}=\frac{c\cdot\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Der jetzt verbleibende Nenner ist noch einmal mit der 3. Binomischen Formel zu erweitern

$$=\frac{c\cdot\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{c\cdot\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(a-b)}$$

Da die Wurzel, die die Summe der beiden Wurzeln im Zähler umfasst, wie eine Klammer wirkt, muss nicht notwendig noch einmal eine Klammer gesetzt werden. Die Klammer mit der Differenz der beiden Wurzeln ist nicht so ohne weiteres in die Wurzel mit hineinzuziehen. Dazu muss die Klammer quadriert werden.

$$c\cdot\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})=c\cdot\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$$

Welche Umformungen noch sinnvoll sind, und welche nicht mehr, ist immer an der konkreten Aufgabenstellung zu prüfen. Grundsätzlich ist es aber nützlich alle Möglichkeiten zu kennen.

Als zweites soll noch ein Ausdruck betrachtet werden, bei dem im Nenner eine Summe von 3 Wurzeln steht.

$$\frac{d}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=$$

Hier wird künstlich eine 3. Binomische Formel erzeugt. Das soll heißen, es werden zwei Wurzeln als ein Ausdruck angesehen und eine Wurzel als ein anderer Ausdruck. Die Methode soll hier an einem konkreten Beispiel gezeigt werden, da in der allgemeinen Form die Möglichkeiten der Zusammenfassung nicht dargestellt werden können.

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$$

Es wird eine 3. Binomische Formel gebildet, bei der die Summe der ersten beiden Wurzeln als ein Ausdruck aufgefasst werden und die dritte Wurzel als der zweite.

$$\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})-\sqrt{2}}{[(\sqrt{5}+\sqrt{3})+\sqrt{2}]\cdot[(\sqrt{5}+\sqrt{3})-\sqrt{2}]}=$$

Der Nenner lässt sich jetzt nach einer 3. Binomischen Formel berechnen:

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-2=$$
$$(5+2\cdot\sqrt{15}+3)-2=$$
$$6+2\sqrt{15}$$

Mit diesem zusammengefassten Nenner noch einmal die 3. Binomische Formel anwenden:

$$\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(6-2\sqrt{15})}{(6+2\sqrt{15})\cdot(6-2\sqrt{15})}=$$
$$\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(6-2\sqrt{15})}{6^2-(2\cdot\sqrt{15})^2}=$$
$$\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(6-2\sqrt{15})}{24}$$

Damit ist zumindest ein Nenner erreicht, der keine Wurzel enthält.