21. Potenzen

21.1. Potenzdefinition für natürliche Exponenten (N*)

Wie für das mehrfache Addieren einer Zahl abkürzend ein Multiplikationsausdruck geschrieben werden kann: 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 5 * 2 .

> **Die Zahl, die mehrfach addiert** werden soll wird als ein Faktor geschrieben und **die Anzahl, wie oft die Zahl addiert wird**, ist der zweite Faktor: 5 • 2

Eine solche Kurzfassung, wie für das Addieren, kann man auch für das Multiplizieren finden: 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 25

> **Die Zahl, die mehrfach multipliziert** werden soll wird als Basis geschrieben und **die Anzahl, wie oft die Zahl multipliziert wird**, wird als kleiner geschriebene Zahl oberhalb der Basis angehängt: 2^5

Die hoch geschriebene Zahl ersetzt ein weiteres Rechenzeichen. Diese Hochzahl bezeichnet man als Exponent. Damit sind Potenzen für beliebige Basiszahlen und positive ganzzahlige Exponenten definiert. Die Zahl, die mehrfach multipliziert werden soll kann eine beliebige Zahl sein, die Anzahl kann aber immer nur eine natürliche Zahl sein.
Damit sind Potenzen Ausdrücke der Form

$$a^n = b$$

- a bezeichnet man als Basis
- n bezeichnet man als Exponent
- b bezeichnet man als Potenz oder Ergebnis

Damit lassen sich alle Ausdrücke berechnen, bei denen a und n bekannt sind.

21.1.1 Rangfolge der Potenzoperation

Das Multiplizieren als Mehrfachausführung der Addition hat eine höhere Rangfolge als die Addition/Subtraktion. Das drückt sich dadurch aus, dass Multiplikationen vor Additionen ausgeführt werden müssen. Änderungen von dieser Reihenfolge können nur durch Klammern erfolgen. Da das Potenzieren eine Vervielfachung des Multiplizierens ist, hat das Potenzieren eine höhere Rangfolge als das Multiplizieren. Auch das kann durch Klammern geändert werden.
Damit ergibt sich für elementare Rechenoperationen folgende Reihenfolge:

> Klammern →
> Potenzieren →
> Multiplizieren/Dividieren →
> Addieren/Subtrahieren

21.1.2 Potenzen mit negativer Basis

Für Potenzen mit negativer Basis gelten die Regeln der Vorzeichenmultiplikation. Werden negative Zahlen mehrfach multipliziert, dann ist das Ergebnis eine positive Zahl, wenn die Anzahl eine gerade Zahl ist. Das Ergebnis ist eine negative Zahl, wenn die Anzahl eine ungerade Zahl ist.

$(-a)^n = a^n$, wenn n gerade
$(-a)^n = -a^n$, wenn n ungerade

Außerdem gilt bei Potenzen folgende grundsätzlich Vereinbarung:

Steht an einer Zahl oder Variablen keine Potenz, so kann diese immer durch 1 ersetzt werden: $2 = 2^1$ oder $a = a^1$

Eine fehlende Potenz wird also nicht als Exponent 0, sondern als Exponent 1 interpretiert ! Beim Zusammenfassen von Potenzen kann damit immer auf die Übereinkunft zurückgegriffen werden.

21.1.3 Sonderfälle (1^n, 0^n, 0^0, a^1, a^0)

- 1^n : Dieser Ausdruck ist immer 1, da ein mehrfaches multiplizieren immer 1 ist
- 0^n : Dieser Ausdruck ist immer 0, da eine Multiplikation mit 0 immer wieder 0 ergibt.
- 0^0 : Das ist ein unbestimmter Ausdruck. das heißt, dieser Ausdruck kann jeden beliebigen Wert annehmen und muss mit anderen Mitteln untersucht werden, welcher Wert **in diesem Fall** für den Ausdruck der richtige ist. Die dazu notwendigen mathematischen Gesetze sind nicht Bestandteil der Schulausbildung.
- a^1 : Dieser Ausdruck ist immer a, da der Faktor a nur einmal multipliziert wird.
- a^0 : Dieser Ausdruck ist immer 1, obwohl nicht klar ist, was man unter einer 0-fachen Multiplikation einer Zahl verstehen will. Deshalb ist dieser Wert auch als eine Definition zu sehen und nicht als eine Rechenregel. Es ist also festgelegt, dass das Ergebnis immer gleich 1 ist.

Definition: $a^0 = 1$

Für diese Definition gibt es eine plausible Erklärung. Betrachtet man eine Potenz, z.B den Ausdruck 2^3 . Für die nächste niedrigere Potenz 2^2 muss man den Ausdruck durch die Basis teilen, also $2^2 = 2^3 / 2$. Für die nächst niedrigere Potenz 2^1 muss man wieder den Ausdruck von 2^2 durch die Basis teilen. $2^1 = 2^2 / 2$. Also macht es als Fortsetzung dieser Reihe Sinn zu definieren, dass 2^0 sich ergibt, indem man 2^1 durch die Basis 2 dividiert, also $2^0 = 2^1 / 2 = 1$. Diese Rechnung kann für jede Basis durchgeführt werden und führt immer wieder zum gleichen Ergebnis.

21.2. Potenzgesetze für Potenzen mit gleicher Basis

21.2.1 Addition und Subtraktion

In diesem Abschnitt sollen Ausdrücke der Form $2^4 + 2^6$ untersucht werden. Zu diesem Ausdruck kann man zwei Schlußfolgerungen angeben:

- Die Summe von Potenzen kann man als Summe nicht zusammenfassen.
- Die Summe von Potenzen kann nur wir ein Termausdruck behandelt werden. Speziell heißt das, man kann gleiche Faktoren ausklammern. Gleiche Faktoren bei einer Summe von Potenzen mit gleicher Basis ist immer die niedrigste auftretende Potenz: $2^4 + 2^6 = 2^4 (1 + 2^2)$

Zu dem Ausklammern soll folgende Überlegung angestellt werden. Der erste Ausdruck $2^4 = 2\cdot2\cdot2\cdot2$ und $2^6 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$. Setzt man die angegebene Summe aus diesen ausmultiplizierten Ausdrücken zusammen:

$$2^4 + 2^6 = 2\cdot2\cdot2\cdot2 + 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$$

In diesem Ausdruck tritt bei jedem Summanden der Faktor 2 mindestens 4 mal auf. Deshalb läßt sich aus jedem Summanden der Faktor 2 4-mal ausklammern. Dabei bleibt beim ersten Summanden nur eine 1 stehen und beim zweiten Summanden der Faktor 2 noch 2-mal. Damit läßt sich die Summe weiter zusammenfassen:

$$2^4 + 2^6 = 2\cdot2\cdot2\cdot2 + 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot (1 + 2\cdot2) = 2^4 (1 + 2^2)$$

Diese Umformungsmöglichkeit ist also nicht der Potenzschreibweise geschuldet, sondern den Rechenregeln für Terme. Deshalb wird allgemein formuliert:

> Für die Summen oder Differenzen von Potenzen gibt es keine besonderen Potenzregeln. Summen oder Differenzen von Potenzen lassen sich nicht zusammenfassen !

21.2.2 Multiplikation

Als nächstes soll die Multiplikation von Potenzen untersucht werden. Dazu soll die folgende Aufgabe berechnet werden: $2^4 \cdot 2^3 = 2\cdot2\cdot2\cdot2 \cdot 2\cdot2\cdot2 = 27$
Bei der Multiplikation von zwei Potenzen entstehen genau so viele Basiszahlen, wie die Summe der beiden Exponenten angibt.

> *1. Potenzgesetz* $\mathbf{a^m \bullet a^n = a^{n+m}}$
>
> Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man
> **die Exponenten addiert und die Basis beibehält.**
> Treten Vorzahlen auf, so werden sie wie bei Termen multipliziert

Damit werden bei Ausdrücken, die Potenzen mit verschiedenen Basen haben nur die zusammengefasst, die zur gleichen Basis gehören. Eine Zusammenfassung mit Potenzen anderer Basen kann nicht erfolgen.

Beispiele:

$3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^2$	3^{11}	
$d^3 \cdot d^5 \cdot d^4$	d^{12}	
$x^3 \cdot x^2 \cdot x$	x^6	
$k^3 \cdot k^5 \cdot m^2 \cdot m^7$	$k^8\,m^9$	getrennt nach k und m zusammenfassen
$x^5 \cdot y^3 \cdot x^2 \cdot y$	$x^7\,y^4$	
$a^2 \cdot b \cdot b^3 \cdot a$	$a^3\,b^4$	b ist b^1 und a ist a^1
$x^2 \cdot y^n$	x^{2+n}	
$b^m \cdot b^3$	b^{m+3}	
$y^a \cdot y$	y^{a+1}	
$a^5 \cdot a^{2x}$	a^{2x+5}	
$z^{2m} \cdot z^m$	z^{3m}	
$a^5 \cdot a^{x-7}$	a^{x-2}	
$y^{2m} \cdot y^{m-1}$	y^{3m-1}	
$x^{p-4} \cdot x^{p+2}$	x^{2p-2}	

21.2.3 Division

Für die Regel der Division soll der folgende Ausdruck untersucht werden: $\frac{2^7}{2^4}$

Zunächst werden die Potenzen im Zähler und Nenner ausmultipliziert, so dass

folgender Ausdruck entsteht: $\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2\cdot2}$

Nach den Regeln der Bruchrechnung lassen sich gleiche Faktoren in einem Bruch kürzen, so dass im Zähler und Nenner der Faktor 2 viermal gekürzt werden kann. Damit bleiben im Zähler dreimal der Faktor 2 übrig. Das Ergebnis der Division entsteht also, indem man den Exponenten des Zählers und den Exponenten des Nenners subtrahiert.

2. Potenzgesetz $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man
die Exponenten addiert und die Basis beibehält.
Treten Vorzahlen auf, so werden sie wie bei Termen multipliziert

$3^5 : 3^2$	3^3
$d^5 : d^4$	d^1
$x^3 : x$	x^2

$(k^5 \cdot m^7) : (m^2 \cdot k^3)$	$k^2 m^5$	getrennt nach k und m zusammenfassen
$(x^5 \cdot y^3) : (x^2 \cdot y)$	$x^3 y^2$	
$(a^2 \cdot b^3) : (b \cdot a)$	$a b^2$	b ist b^1 und a ist a^1
$x^2 : x^n$	x^{2-n}	

21.2.4 Potenzieren

Nachdem festgestellt wurde, dass man Potenzen, die Multipliziert werden, über die Bearbeitung der Exponenten zusammenfassen kann, stellt sich die Frage, was passiert denn, wenn man Potenzen wieder potenziert. Das Potenzieren ist ja eine Wiederholung der Multiplikation, also kann man auch Potenzen mehrfach miteinander multiplizieren. Dazu soll der folgende Ausdruck betrachtet werden:

$$2^3\ 2^3\ 2^3\ 2^3 = (2^3)^4 = \overset{1x}{2\cdot2\cdot2} \cdot \overset{2x}{2\cdot2\cdot2} \cdot \overset{3x}{2\cdot2\cdot2} \cdot \overset{4x}{2\cdot2\cdot2} = 2^{12}$$

Es entsteht 12 mal der Faktor 2. Die Anzahl 12 entsteht aus dem Produkt der beiden Potenzen 3 und 4.

3. Potenzgesetz **$(a^m)^n = a^{n \cdot m}$**

Potenzen mit gleicher Basis werden potenziert, indem man
die Exponenten multipliziert und die Basis beibehält.
Treten Vorzahlen auf, so werden sie wie bei Termen multipliziert

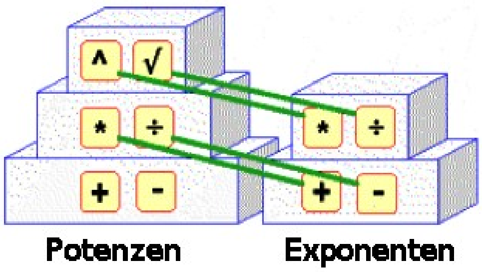
$(10^5)^3$	10^{15}
$(2^5)^2$	2^{10}
$(7a^5)^2$	$49a^{10}$
$(5a^{2x})^3$	$125\ a^{6x}$
$(17a^{12})^0$	1
$(3b^{5+x})^3$	$27b^{15+3x}$
$3a \cdot (5a^{2x})^3$	$375\ a^{6x+1}$

Bei der letzten Aufgabe ist zu berücksichtigen, dass der Faktor 3a nicht mit potenziert wird. Damit entsteht aus der Potenz nur der Ausdruck $5^3\ a^{3\cdot2\cdot x}$ und durch Zusammenfassung der Zahlen 3 und $5^3 = 125$ der Wert 375, sowie durch Zusammenfassung von a und $a^{3\cdot2\cdot x}$ der Wert $a^{6\cdot x+1}$.
Aus den drei verschiedenen Möglichkeiten Potenzen über Multiplikation oder Division zusammenzufassen haben sich folgende Regeln ergeben:

- Potenzen werden multipliziert, indem die Exponenten addiert werden
- Potenzen werden dividiert, indem die Exponenten subtrahiert werden
- Potenzen werden potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden

Die Operation, die mit der Basis durchgeführt werden soll, wird auf den Exponenten übertragen, dabei ist aber die durchzuführende Operation eine Rangstufe niedriger. Aus

Multiplikation wird Addition, aus Division wird Subtraktion und aus Potenzieren wird Multiplizieren. Schon daran kann man erkennen, dass eine Addition von Potenzen wohl nicht möglich ist, da Addition schon die niedrigste Rangstufe ist und damit keine Operation in einer niedrigeren Rangstufe möglich ist. Das ist natürlich kein mathematischer Beweis, sondern nur ein formaler Analogieschluss. Für das berechnen von Potenzen mit gleicher Basis kann man sich also grundsätzlich folgendes Schema einprägen:



Wie sich das Berechnen von Wurzeln von Potenzen darstellt, wird in einem späteren Kapitel erklärt.

21.3. Potenzgesetze für Potenzen mit unterschiedlicher Basis

Nach den Untersuchungen von Potenzen mit gleicher Basis stellt sich die Frage nach Formeln, wenn die Potenzen verschiedene Basis haben. Es geht also um die Bearbeitung von Ausdrücken der Form a^n und b^m. Lassen sich solche Potenzen auch in irgend einer Weise zusammenfassen.

21.3.1 Addition und Subtraktion

Dazu soll als erstes wieder die Summe zweier solcher Ausdrücke betrachtet werden. Als einführendes Beispiel soll der Ausdruck $2^3 + 3^5$ untersucht werden. Löst man in diesem Ausdruck die Potenzen auf, so ergibt sich ein Ausdruck der Form 2•2•2 + 3•3•3•3•3. Nach den bekannten Rechengesetzen über Ausmultiplizieren, Ausklammern, Termoperationen und anderen lassen sich keine Regeln finden, nach denen ein solcher Ausdruck zusammengefasst werden kann. Man kann nur die Produkte einzeln berechnen und danach addierten. Eine besondere Schreibwiese unter Benutzung der Potenzen ist nicht möglich:

$a^n + b^m$ keine Zusammenfassung

Als nächstes sollen Ausdrücke der Form $(a + b)^3$ betrachtet werden. Das Ergebnis eines solchen Ausdrucks ist nicht die Summe der einzelnen Potenzen:

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n$$

Ausdrücke der Form $(a + b)^n$ kann man nur mit den Gesetzen der Binomische Formeln behandeln, wie sie von den Ausdrücken $(a+b)^2$ bekannt sind. Eine solche Binomische Formel existiert für jede positive ganze Zahl n, die als Exponent möglich ist. Für Exponenten bis 6 haben die Ausdrücke der Binomischen Formeln folgendes Aussehen:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4a b^3 + b^4$
$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5a b^4 \pm b^5$
$(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$

21.3.2 Multiplikation

Als nächstes sollen Ausdrücke der Form $a^n \cdot b^m$ betrachtet werden und dazu das Beispiel $2^3 \cdot 3^5$ untersucht werden. Die ausmultiplizierte Form dieses Ausdruck sieht danach so aus: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Dieser Ausdruck lässt sich in dieser allgemeinen Form nicht zusammenfassen. Nun hat man nach einer Lösung gesucht, was sich denn zusammenfassen läßt. Dabei hat man sich an das Ausklammern eines Faktors aus einer Summe erinnert. 15 + 20 = 5 (3 + 4) . das bedeutet, dass der ausgeklammerte Faktor auf die beiden Summanden anzuwenden ist. Deshalb hat man vereinbart, dass man auch eine **gleiche** Potenz in dieser Weise als Exponent „ausklammern“ kann. Das heißt, es kann nur dass als eine Potenz zusammengefasst werden, was den gleichen Exponenten hat. Im obigen Beispiel ist also den beiden Basen 2 und 3 nur eine Anzahl von drei Faktoren gemeinsam, da die Potenz von 2 nur über 3 Faktoren verfügt. Deshalb kann man nur drei Faktoren der Zahlen 2 und 3 zusammenfassen, die restlichen Faktoren der Zahl 3 müssen gesondert geschrieben werden:
$2^3 \cdot 3^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3)^3 \cdot 3^2$
Dabei wird vereinbart, dass der Exponent auf alle Faktoren in der Klammer anzuwenden ist, wie ein „ausgeklammerter“ Exponent. Das heißt aber für das Zusammenfassen von Potenzen unterschiedlicher Basen, dass ein solches Zusammenfassen nur möglich ist, wenn die Basen den gleichen Exponenten haben. Alle zusätzlichen Faktoren müssen als gesonderte Faktoren stehen bleiben. Deshalb beschränkt man sich bei den Regeln für Potenzen mit unterschiedlichen Basen auf Ausdrücke, die den gleichen Exponenten besitzen.

4. Potenzgesetz $\quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Potenzen mit unterschiedlicher Basis und gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man
die Basis multipliziert und den Exponenten beibehält.

$5^3 \cdot 2^3$	$(5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$
$0{,}5^3 \cdot 4^3$	$(0{,}5 \cdot 4)^3 = 2^3 = 8$
$0{,}5^5 \cdot 10^5 \; 0{,}2^5$	$(0{,}5 \cdot 10 \cdot 0{,}2)^5 = 1^5 = 1$
$5^x \cdot 2^x$	$(5 \cdot 2)^x = 10^x$
$5^a \cdot 12^a$	$(5 \cdot 12)^a = 60^a$
$x^a \cdot y^a$	$(x \cdot y)^a$
$(x+y)^2 \cdot 5^2$	$(5 \cdot (x+y))^2 = (5x+5y)^2$

21.3.3 Division

Auch bei der Division lassen sich nur Potenzen mit unterschiedlichen Basen zusammenfassen, die den gleichen Exponenten haben. Auch hier klammert man den Exponenten wieder aus, behält aber die Division bei.

5. Potenzgesetz

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Potenzen mit unterschiedlicher Basis und gleichem Exponenten werden dividiert, indem man
die Basen dividiert und den Exponenten beibehält.
Treten Vorzahlen auf, so werden sie wie bei Termen multipliziert

21.4. Potenzdefinition und Potenzgesetze für ganze Exponenten (Z)

Auf Grund der Definition einer Potenz als Mehrfachausführung einer Multiplikation würden Potenzen mit negativen Exponenten keinen Sinn machen. Was soll bedeuten einen Multiplikation –5 mal auszuführen. Für solche mitunter notwendigen Erweiterungen gibt es in der Mathematik ein wichtiges Prinzip: Die Erweiterungen müssen so durchgeführt werden, dass die bisher bekannten Regeln und Gesetze für die bisher bekannten Zahlen oder Ausdrücke als Spezialfall auch nach der Erweiterung noch gelten müssen. In diesem Fall heißt dass, wenn man eine Erweiterung der Potenzen für negative Zahlen durchführt, dann dürfen die Regeln für positive Exponenten nicht verletzt werden.

21.4.1 Die 1.Erweiterung der Potenzdefinition

Um eine sinnvolle Definition für Potenzen mit negativem Exponenten zu finden wird wieder die Entwicklung der Potenzausdrücke betrachtet, die bereits in einem vorherigen Abschnitt zur Definition der der Potenz a^0 benutzt wurde. Dazu soll wird wieder die Potenz 2^3 betrachtet werden. In einem vorherigen Kapitel wurde bereits ausgeführt, dass für die nächste niedrigere Potenz 2^2 der Ausdruck durch die Basis geteilt werden muss, also $2^2 = 2^3 / 2$. Für die nächst niedrigere Potenz 2^1 muss man wieder den Ausdruck von 2^2 durch die Basis teilen. $2^1 = 2^2 / 2$. Nach dieser Regel wurde geschlossen, dass der Wert für $2^0 = 1$ sein muss. Damit wurden Potenzen für den Exponenten 0 definiert. Jetzt kann man natürlich diese Überlegung fortsetzen. Wie gelangt man von dem Exponenten 0 zu dem Exponenten –1. Die Fortsetzung muss so erfolgen, dass die bisherigen regeln nicht verletzt werden und dann immer noch gelten. das heißt in diesem Fall, es ist der Wert der Potenz von $2^0 = 1$ durch die Basis zu dividieren. Das Ergebnis dieser Division ist ½ , da 1 : 2 = ½ ist. Damit hätte man auf diesem Weg den Wert für die Potenz $2^{-1} = ½$ gefunden. Setzt man den Weg fort und dividiert ½ durch 2 erhält man den Wert ¼ , also $2^{-2} = ¼$. Gleichzeitig gilt, wenn man 2^{-2} mit 2 multipliziert erhält man wieder 2^{-1}, was auch für positive Exponenten gilt, damit kein Widerspruch zu den bísherigen Regeln auftritt. Gleichzeitig stellt man fest, dass beim Weiteren Dividieren im Zähler immer eine „1“ stehen bleibt, aber in Nenner die positiven Potenzen von 2 auftreten. Deshalb definiert man für negative Potenzen folgenden Wert als Ergebnis einer solchen Potenz:

1. Erweiterung der Potenzdefinition $\mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

Diese Definition ist eine sinnvolle Fortsetzung der Potenzen für negative Exponenten und es ist damit zu erwarten, dass alle bisherigen Regeln für Potenzen auch weiterhin gelten.
Man könnte diese Definition auch als Spezialfall für eine Division von zwei Potenzen mit gleicher Basis ansehen. Das für diesen Fall gültige 2. Potenzgesetz besagt, dass der Exponent der Potenz im Nenner von von der im Zähler zu subtrahieren ist. das würde für den obigen Ausdruck zu folgenden Umformungen führen:

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

Damit ist die erweiterte Definition auch eine widerspruchsfreie Fortsetzung der Quotientenregel. Deshalb soll hier ohne Beweis nur festgestellt werden, dass alle Potenzgesetze in der gleichen Weise auch für negative Exponenten gelten.

Die Definition von Potenzen mit negativem Exponenten führt nicht nur eine Umformung der Exponenten des Nenners durch Vorzeichenwechsel als Exponent des Zählers durch, sondern ermöglicht auch einen Exponent des Zählers als negativen Exponenten in den Nenner zu schreiben.

$$\mathbf{a^n = \frac{1}{a^{-n}}}$$

Diese Umwandlung benötigt man manchmal, wenn man die zusammengefassten Potenzausdrücke so formulieren soll, dass keine negativen Exponenten auftreten.

$$\frac{2^4}{2^3 \cdot 2^5} = 2^{-3} \cdot 2^4 \cdot 2^{-5} = \quad = 2^{-4} \quad = \frac{1}{2^4}$$

$$\frac{1}{2^3 \cdot 10^3 \cdot 12^3} = 2^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 12^{-3} = \quad = 240^{-3} \quad = \frac{1}{240^3}$$

$$\frac{6^{7x}}{6^{4x} \cdot 6^{6x}} = 6^{-4x} \cdot 6^{-6x} \cdot 6^{7x} = \quad = 6^{-3x} \quad = \frac{1}{6^{3x}} = \frac{1}{\left(6^3\right)^x}$$

$$\frac{12^{a-1}}{12^a \cdot 12^{2a}} = 12^{-a} \cdot 12^{-2a} \cdot 12^{a-1} = \quad = 12^{-2a-1} \quad = \frac{1}{12^{2a+1}}$$

$$\frac{a^5}{a^3 \cdot a^4} = a^{-3} \cdot a^{-4} \cdot a^5 = \quad = a^{-2} \quad = \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{2x^6}{2x^2 \cdot 2x^7} = 2x^{-2} \cdot 2x^6 \cdot 2x^{-7} = \quad = 2^3 x^{-3} \quad = \frac{2^3}{x^3} = \left(\frac{2}{x}\right)^3$$

$$\frac{(2x)^2 \cdot (2x)^7}{(2x)^6} = (2x)^2 \cdot (2x)^{-6} \cdot (2x)^7 = \quad = (2x)^3 \quad = 8x^3$$

$$\frac{n^{7x}}{n^{4x} \cdot n^{8x}} = n^{-4x} \cdot n^{-8x} \cdot n^{7x} = \qquad = n^{-5x} \qquad = \frac{1}{n^{5x}}$$

21.4.2 Die Potenz 0^0

Die Potenz 0^0 ist als Zahlenwert nicht berechenbar, tritt aber im Zusammenhang mit Funktionen auf. Für Funktionen gibt es spezielle Methoden, mit denen solche Ausdrücke zu bearbeiten sind. Diese Methoden basieren auf der Differenzialrechnung und sind auch für Gymnasien nicht Bestandteil des Schulstoffes. Deshalb wird auf diese Ausdrücke hier nicht eingegangen.

21.5. Potenzdefinition und Potenzgesetze für Bruchzahlen im Exponenten (Q)

Auch die Definition von Potenzen, deren Exponent ein Bruch ist, ist anschaulich nicht zu definieren. Was ist die Multiplikation von 2 wenn man sie 4/5 mal multipliziert. Auch für diese Berechnung ist eine sinnvolle Erweiterung des Potenzbegriffes vorzunehmen, so dass alle bisherigen Fälle immer immer noch so gelten, wie bisher angegeben.

Dazu soll der Ausdruck $a^{\frac{1}{n}}$ betrachtet werden, der im Exponenten einen Bruch hat.

Aus den bisher geklärten Beziehungen über Potenzen wäre es vorteilhaft, einen Operation zu finden, die diesen Ausdruck in a^0 oder a^1 umwandelt. das sind bekannte, feststehende Werte. Danach wäre es vielleicht möglich den Wert einer Potenz mit einem Bruch im Exponenten zu definieren. Die erste Möglichkeit ist, eine Potenz mit dieser zu multiplizieren, so dass a^0 als Ergebnis entsteht. Bei einer Multiplikation von Potenzen werden die Exponenten addiert, so dass die notwendige Potenz wieder einen Bruch enthalten müsste: $a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{n-1}{n}}$

In diesem Fall ist das Ergebnis zwar a^0, aber bringt keine brauchbare Erklärung, was man unter Potenzen mit Brüchen als Exponenten verstehen soll. das gleiche würde passieren, wenn man einen Quotienten benutzen würde. Für Potenzen mit gleicher Basis gibt es aber noch ein anderes Potenzgesetz, das über das Potenzieren:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Jetzt soll dieses Potenzgesetz benutzt werden. Für den Ausdruck in der Klammer wird die Potenz mit dem Bruch als Exponent gewählt. Dieser Ausdruck soll potenziert werden, so dass durch die Multiplikation der beiden Exponenten ein Wert entsteht, der bekannt ist und von dem rückgerechnet werden kann. Da bietet sich der Exponent n an, das das Produkt mit 1/n dann als Exponent den Wert 1 ergibt:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

Also ist $a^{\frac{1}{n}}$ diejenige Zahl, die man mit n potenzieren muss, um a zu erhalten. Das muss man sich etwas genauer ansehen. Für den Wert n = 2 heißt das, welche Zahl muss man mit 2 potenzieren, um 3 zu erhalten, oder welche Zahl muss man mit 2 potenzieren um 9 zu erhalten usw. Also ist einer Gleichung zu lösen, die der folgenden

entspricht: $x^2 = 3$ oder $x^2 = 9$
Das sind aber bekannte Gleichungen. Jeder erkennt sofort, dass der Wert für x durch Wurzelziehen auf beiden Seiten bestimmt werden kann. $x = \sqrt{3}$ oder $x = \sqrt{9} = 3$
Für das Beispiel ergibt sich die Schlußfolgerung $(\sqrt{3})^2 = 3$ oder $(\sqrt{9})^2 = 9$
Der Ausdruck mit einem Bruch im Exponenten entspricht also genau dem Ausdruck einer Wurzel mit dem Wurzelexponenten n. Daraus resultiert die zweiter Erweiterung des Potenzbegriffs:

2. Erweiterung der Potenzdefinition: $\mathbf{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$

Auf der Grundlage dieser Definition kann der Potenzbegriff auf einen Exponenten mit eine beliebigen rationalen Zahl erweitert werden, was nicht als eigenständige Definition gilt, sondern als Schlußfolgerung aus der eben angegebenen:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Damit sind Potenzen für natürliche Zahlen, negative Zahlen und Brüche definiert. Auch negative Brüche machen mit der Definition keine Probleme, wenn man berücksichtigt, dass es keine negativen Wurzelexponenten geben kann, sehr wohl aber negative Exponenten bei Potenzen.

$$a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$$

oder

$$a^{-\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Damit können alle Wurzelausdrücke in Potenzen umgeschrieben werden. Die Umformung wird auch grundsätzlich bei der Zusammenfassung von Wurzelausdrücken gemacht. Für die Rechenregeln mit dem Exponenten gelten dann die gleichen Regeln, wie für eine Bearbeitung von Brüchen. Außerdem ist das Umschreiben von Wurzeln in Potenzen für die späteren Kapitel „Differenzialrechnung“ und „Integralrechnung“ unabdingbare Voraussetzung. Mit dieser Erweiterung gelten alle Potenzgesetze auch für Potenzen mit gebrochen-rationalen Exponenten.