20. Allgemeine Sinusfunktion

Jede Grundfunktion, die in dem Kapitel „Funktionen“ behandelt wurde, lässt sich auch als verallgemeinerte Funktion formulieren. Faktoren oder Summanden an verschiedenen Positionen des Funktionsterms haben verschiedene Auswirkungen auf die Funktionsbilder. Bekannt ist das bereits von den Quadratischen Funktionen, ohne, dass man sich dessen wirklich bewußt geworden ist.
Die Ausgangsfunktion einer quadratischen Funktion ist $y = x^2$. An diese Ausgangs-funktion lassen sich verschiedene Veränderungen anbringen.

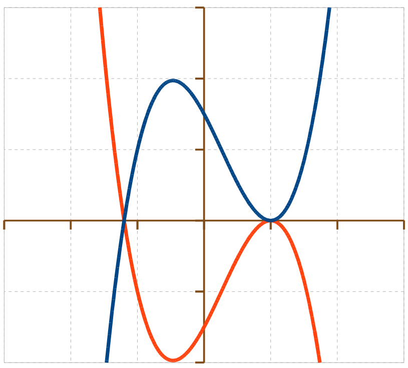
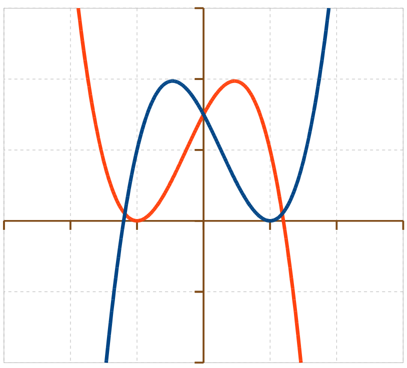
1. $y = ax^2$: Ist eine Streckung/Stauchung der Funktion in y-Richtung, negative Werte von a kehren die Funktion um.
2. $y = x^2 + b$: Ist eine Verschiebung der Funktion in y-Richtung, positive Werte von b verschieben nach oben, negative Werte nach unten.
3. $y = (x - c)^2$: Ist eine Verschiebung der Funktion in x – Richtung, positive Werte von c verschieben nach rechts, negative werte von c verschieben nach links

Eine solche Funktionsverschiebung kann man für alle Funktionen durchführen. Der nächste Abschnitt soll die möglichen Verschiebungen und ihre Auswirkungen auf das Kurvenbild veranschaulichen.

20.1. Allgemeine Verschiebung eines Kurvenbildes

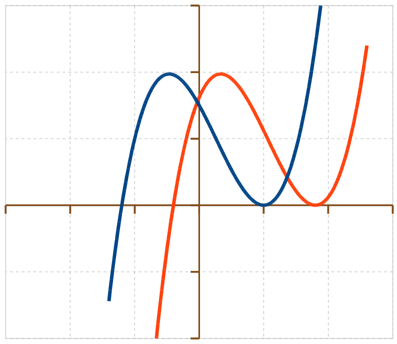
Die blauen Kurvenbilder sind jeweils die Ausgangsfunktion und die roten Kurvenbilder die geänderte Funktion.

Spiegelungen

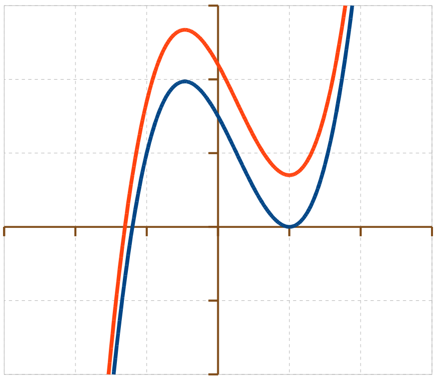
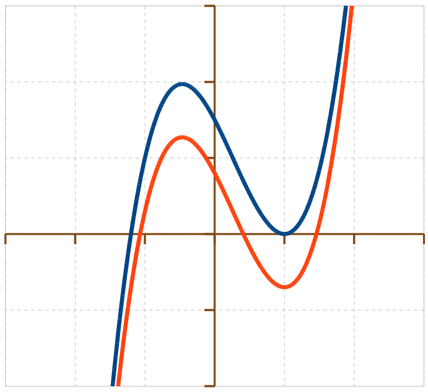
		
Spiegelung an der x–Achse	Spiegelung an der y–Achse	Spiegelung am Nullpunkt
f(x) => – f(x)	**f(x) => f(–x)**	**f(x) => – f(–x)**

Bitte beachten, dass die dritte Kurven tatsächlich durch Spiegelung am Ursprung entstanden ist und nicht durch Verschiebung in x– und y– Richtung. Eine Spiegelung am Ursprung ist eine gleichzeitige Spiegelung an der y–Achse und an der x–Achse.

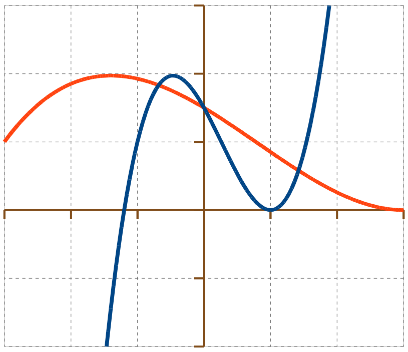
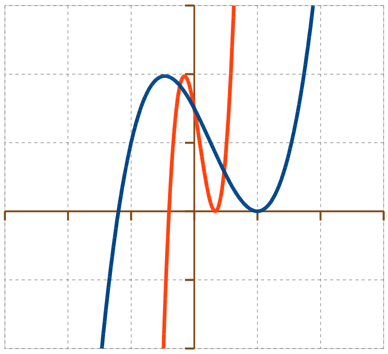
Verschiebung in x – Richtung

	
Verschiebung in negative x – Richtung	Verschiebung in positive x – Richtung
f(x) => f (x + c)	**f(x) => f (x – c)**

Verschiebung in y – Richtung

	
Verschiebung in positive y – Richtung	Verschiebung in negative y – Richtung
f(x) => f(x) + d	**f(x) => f (x) – d**

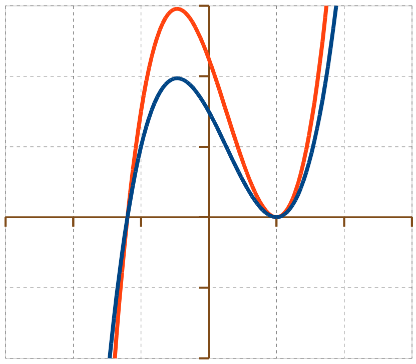
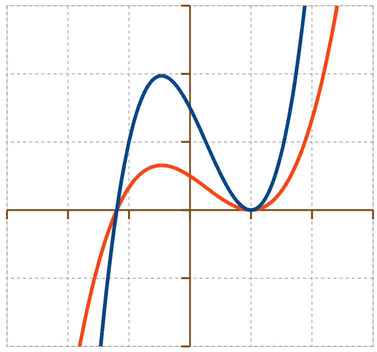
Streckung / Stauchung in x – Richtung

	
Streckung um den Faktor a	Stauchung um den Faktor a
f(x) => f (x / b)	**f(x) => f (b · x)**

Streckung entsteht durch Multiplikation mit einem Faktor kleiner als 1,
Stauchung entsteht durch Multiplikation mit einem Faktor größer als 1
Ist a negativ, kommt eine Spiegelung an der y – Achse dazu.

© Dipl.-Math. Armin Richter

Streckung / Stauchung in y – Richtung

	
Streckung um den Faktor a	Stauchung um den Faktor a
f(x) => a · f (x)	**f(x) => f(x) / a**

Streckung entsteht durch Multiplikation mit einem Faktor größer als 1,
Stauchung entsteht durch Multiplikation mit einem Faktor kleiner als 1
Ist a negativ, kommt eine Spiegelung an der x – Achse dazu.

Die hier aufgeführten Möglichkeiten lassen sich alle zusammenführen in einem Funktionsausdruck:

$$\boxed{\mathbf{a \cdot f\,(b \cdot (x - c)) + d}}$$

Dabei entstehen Streckung und Stauchung durch **Faktoren** a und b, die entweder größer oder kleiner 1 sind, und Verschiebungen durch **Summanden**, die entweder größer oder kleiner 0 sind.
Achsenspiegelungen entstehen dadurch, dass die **Faktoren** a oder b **negativ** sind.

Für die Schulausbildung besonders wichtig sind die Auswirkungen solcher Funktionsänderungen auf die trigonometrischen Funktionen. Deshalb werden in den nächsten Kapiteln nur solche Funktionen untersucht.

$$\boxed{f(x) = a \sin(b\,(x - c)) + d \;\;; \quad b > 0}$$

Nicht in allen Schulzweigen wird die Funktion in dieser Allgemeinheit behandelt. In einigen Schulen wird die Verschiebung in Richtung x-Achse (Summand c) nicht betrachtet und der Wert für c immer gleich 0 gesetzt. Die Betreffenden können dann diesen Abschnitt überspringen.

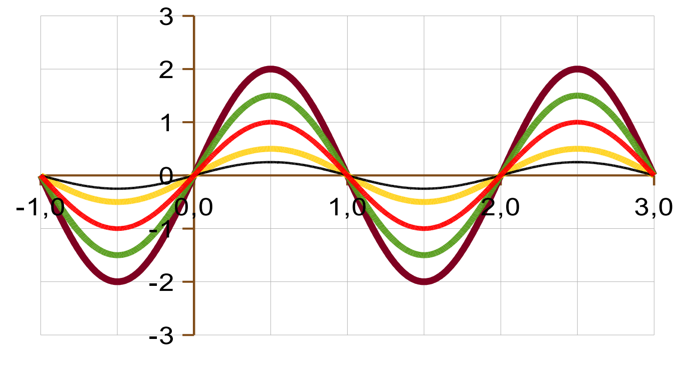
20.2. Verschiebung der sin – Funktion

20.2.1 Der Einfluss des Parameters **a**

Der Graf der Funktion $f_a(x)$ = a sin (x) entsteht aus der Grundfunktion sin(x) durch Strecken oder Stauchen in Richtung y-Achse um den Faktor a.
Ein negativer Wert von a spiegelt die Funktion an der x – Achse.

Verändert
- Amplitude

Unverändert:
- Symmetrie
- Periode
- Nullstellen



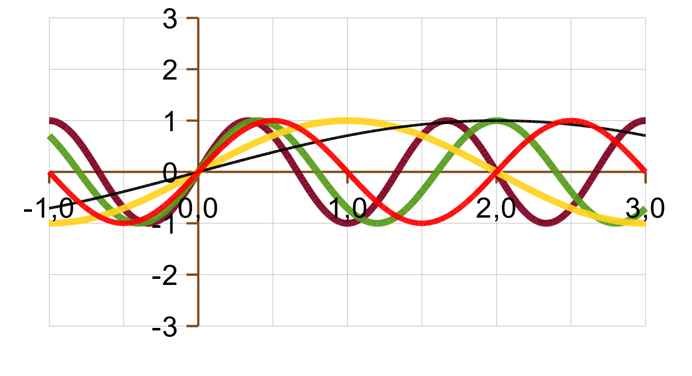
20.2.2 Der Einfluss des Parameters **b**

Der Graf der Funktion $f_b(x)$ = sin (bx) entsteht aus der Grundfunktion sin(x) durch Strecken oder Stauchen in Richtung x-Achse.
Der Wert von b gibt die Anzahl von Schwingungen in einem Intervall wieder und wird als **Periode** oder **Frequenz** bezeichnet

Für 0 < b < 1 ergibt sich eine Streckung in x -Richtung die Periode wird größer
b > 1 ergibt sich eine Stauchung in x-Richtung die Periode wird kleiner
b < 0 kann wegen sin (–x) = – sin(x) auf den Fall b > 0 und a < 0 zurückgeführt werden.

Verändert
- Periode
- Nullstellen

Unverändert:
- Symmetrie
- Amplitude



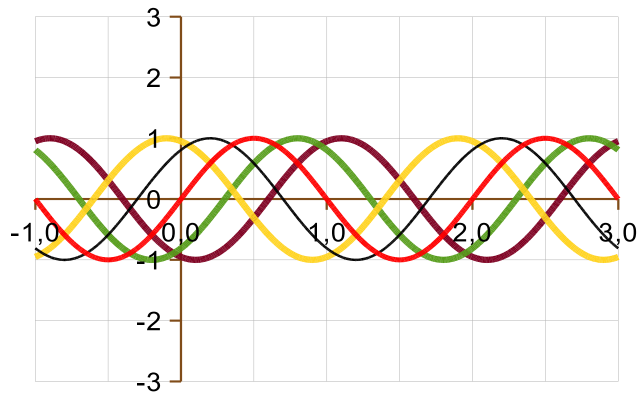
20.2.3 Der Einfluss des Parameters **c**

Der Graf der Funktion $f_c(x) = \sin(x - c)$ entsteht aus der Grundfunktion sin(x) durch Verschieben der Funktion in Richtung x-Achse.

Für $c > 0$ ergibt sich eine Verschiebung in positive x-Richtung
$c < 0$ ergibt sich eine Verschiebung in negative x-Richtung

Verändert
- Symmetrie
- Nullstellen

Unverändert:
- Periode
- Amplitude



Man kann den Wert von c als den neuen „Startpunkt“ der Sinusfunktion ansehen. Der Wert von c ist die Stelle, an der die Sinusfunktion die x – Achse schneidet, die die Mittellinie der Funktion darstellt. Gibt es eine Verschiebung in y – Richtung ($d \neq 0$), dann ist es der Schnittpunkt mit der verschobenen Mittellinie.

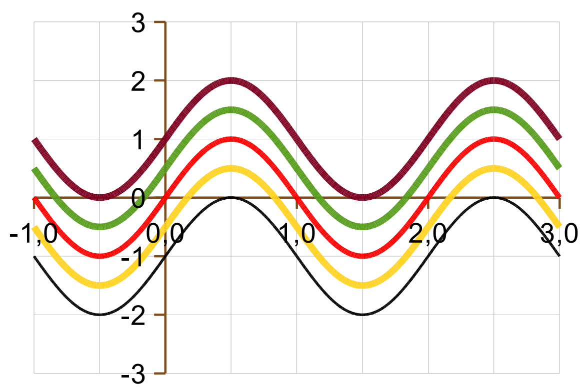
20.2.4 Der Einfluss des Parameters **d**

Der Graf der Funktion $f_d(x) = \sin(x) + d$ entsteht aus der Grundfunktion sin(x) durch Verschieben der Funktion in Richtung y-Achse.
Für $d > 0$ ergibt sich eine Verschiebung in positive y-Richtung
$d < 0$ ergibt sich eine Verschiebung in negative y-Richtung

Verändert
- Symmetrie
- Nullstellen

Diese Werte bleiben unverändert, wenn man sie nicht auf die x-Achse selbst, sondern auf die verschobene x-Achse: y = d bezieht.

Unverändert:
- Periode
- Amplitude



20.3. Funktionsgleichung bekannt

20.3.1 Kurvenbild erstellen

Als erstes soll aus einer Funktionsgleichung das Kurvenbild erstellt werden.

$$f(x)=2{,}5\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot x+\frac{\pi}{2}\right)+1.5$$

In dieser Funktionsgleichung steckt schon das erste Problem. Es geht um den Wert von b und c. Damit das Kurvenbild gezeichnet werden kann muss der Faktor b innerhalb der sin-Funktion ausgeklammert werden. Die notwendige Struktur **muss** b(x–c) sein, in diesem Fall ist sie aber bx – c . In dieser Konstellation ist c nicht der Schnittpunkt mit der verschobenen x – Achse, sondern für das Kurvenbild nicht interpretierbar. Auf die Interpretation des Wertes b hat es keinen Einfluss. Damit muss der Ausdruck innerhalb der sin – Klammer umgeschrieben werden, so dass das b als Faktor für x und für c gilt:

$$f(x)=2{,}5\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot(x+\pi)\right)+1.5$$

Beginnen sollte man mit den einfach umzusetzenden Werten. Das sind die Werte a und d.
d ist die verschobene x – Achse: Die sin-Funktion schwankt also um den Wert **y = + 1,5**
a ist die Amplitude: Von diesem Mittelwert y = 1,5 aus gesehen ist der größte mögliche Wert der sin-Funktion 1,5 + 2,5 **= 4** und der kleinste mögliche Wert 1,5 – 2,5 **= – 1**
Der Wert für die Amplitude ist sowohl nach oben als auch nach unten zu berechnen. Es ist nicht zulässig, den Amplitudenwert von 2,5 zu halbieren und nur eine Hälfte nach oben und die andere Hälfte nach unten zu rechnen. Die Amplitude der normalen sin-Funktion geht 1 Einheit nach oben und eine Einheit nach unten. Der Faktor vor der normalen sin-Funktion ist 1.

Als nächstes wird der Faktor b betrachtet. Dieser Faktor ist noch nicht die neue Periode, aber aus diesem Faktor wird die Periode berechnet. Wie die notwendige Formel zustande kommt soll an folgender Überlegung hergeleitet werden.

Die Periode der normalen sin – Funktion ist 2π. Das bedeutet für die Funktion
f(x) = f(x+p) allgemeine Formel für eine periodische Funktion
sin(x) = sin(x + 2π)
betrachtet man jetzt den Einfluss eines Faktors b in dieser Funktion
sin(bx) = sin(bx + 2π) = sin (b(x + 2π/b))

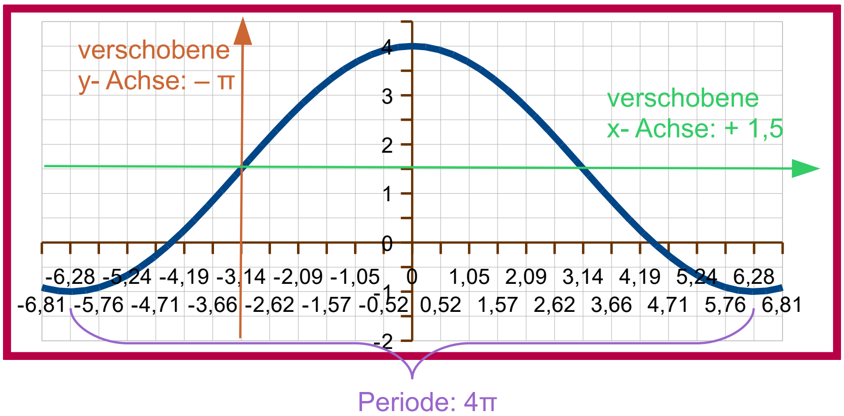
Damit ergibt sich als Periode für die neue Funktion : $\boxed{p=\frac{2\cdot\pi}{b}}$

Diese Funktion ist die entscheidende Formel zur Bestimmung der Periode. Im angegebenen Beispiel ist b = ½ , damit ergibt sich als neue Periode p = 4π.
Nach 4π Längeneinheiten hat diese sin – Funktion eine volle Schwingung erreicht und hat den gleichen Funktionswert, wie bei x= c
Für das Zeichnen der Periode ist es unerheblich, an welchen x-Wert man beginnt. Nach dem Verstreichen einer Periode muss der gleiche y-Wert erreicht sein.

 © Dipl.-Math. Armin Richter

Bleibt noch die Interpretation des Summanden c. Diese sin – Funktion hat ihren Schnittpunkt mit der Mittellinie nicht in x = 0, sondern in x = –π. das positive Vorzeichen bedeutet eine Verschiebung in Richtung negative x – Achse.

Damit kann man aus den Werten das Kurvenbild erstellen:



20.3.2 Berechnen der Nullstellen

Je weiter sin – Funktionen in y -Richtung verschoben sind, desto seltener treten Nullstellen mit der x-Achse auf. Je größer dann aber die Amplituden werden, desto häufiger gibt es wieder Nullstellen. Die Frage ist, wie bestimmt man diese Nullstellen und wie sichert man, dass auch alle verfügbaren Nullstellen erkannt und berechnet werden. Die Beispielfunktion verfügt über Nullstellen und diese sollen auch berechnet werden. Dazu sind einige theoretische Vorbemerkungen aus der Trigonometrie notwendig. Bei der Arbeit mit verallgemeinerten sin – Funktionen sollte grundsätzlich im Bogenmaß gearbeitet werden. Den GTR entsprechend auf RAD umstellen.

Der sin hat eine Periode von 2kπ, aber in dieser Periode zwei Nullstellen:
- Die erste bei 0 und Vielfachen von 2kπ und
- die zweite bei π und Vielfachen von 2kπ.

Dem muß jetzt Rechnung getragen werden. Mit Änderung der Periode wird der Abstand zwischen den Nullstellen entweder größer oder kleiner.

Die Umkehrfunktion des sin, der arcsin, existiert nur für die Hauptwerte des sin von $-\pi/2 \leq x \leq +\pi/2$. Damit führen positive Werte nur zu Winkeln im I. Quadranten und negative Werte nur zu Winkeln im IV. Quadranten. Winkel im II. oder III. Quadranten können auch mit einem GTR nicht ermittelt werden. Die Umkehrfunktionen der sin und cos Funktionen sind im Teil „Trigonometrie“ ausführlich besprochen wurden, einschließlich der Konsequenzen, dass die Winkel nur in einem Quadranten zurückgegeben werden können. Auf diese Kenntnisse muss jetzt aufgebaut werden.

Positive sin – Werte
Der GTR liefert den sin eines Winkel α, der im I. Quadranten liegt. Diesem entspricht ein Winkel $180^0 - \alpha$ im II. Quadranten. Damit ist von dem Bogenmaß π das ermittelte Bogenmaß zu subtrahieren. So erhält man den Winkel im II. Quadranten der den gleichen sin-Wert liefert.

Negative sin – Werte
Der GTR liefert den sin eines Winkel α, der im IV. Quadranten liegt. Üblicherweise wird auch im Bogenmaß der Winkel mit einem negativen Vorzeichen angegeben. Um den Winkel im III. Quadranten zu finden nimmt man den gleichen Wert mit positivem Vorzeichen und addiert ihn zu π dazu.

Um alle Nullstellen zu finden ist es ratsam von vornherein mit der Periode der sin Funktion zu rechnen.

Berechnung der Nullstellen im angegebenen Beispiel.
Klar ist erst einmal: y = 0 setzen

$$0=2{,}5\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot(x+\pi)\right)+1.5$$

Gleichung so umstellen, dass auf einer Seite nur noch der Ausdruck der sin – Funktion steht ohne y-Verschiebung und ohne Amplitudenfaktor:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\cdot(x+\pi)\right)=\frac{-1.5}{2{,}5}=-0{,}6$$

Zu dem Wert von -0,6 ist der Winkel im Bogenmaß zu bestimmen. Der GTR liefert mit –0,643 einen Winkel im IV. Quadranten.

1. Winkel im IV. Quadranten
Der Winkel in der Klammer der sin–Funktion muss also einem Wert von –0,643 entsprechen

$\frac{1}{2}(x+\pi) = -0{,}643 + 2k\pi$ Periode der sin-Funktion berücksichtigt
$x+\pi = -1{,}286 + 4k\pi \quad | -\pi$
$\mathbf{x = -4{,}53 + 4k\pi}$

Der zweite Summand stellt die Periode der angegebenen Funktion dar. Der Wert von π ist von beiden Seiten zu subtrahieren, um x zu finden. Dieses π kann aber nicht mit dem Ausdruck der Periode 4kπ zusammengefasst werden, da die Periode grundsätzlich einen Zählfaktor k besitzt. Die Subtraktion muss von dem konstanten Wert erfolgen, der ohne den Faktor k vorhanden ist. natürlich hat π immer den Wert 3,14....

2. Winkel im III. Quadranten
Für den ersten Winkel im IV. Quadranten wurde ein Wert – 0,643 angegeben. Dieser Werrt ist mit positivem Vorzeichen zu **1. Winkel im IV. Quadranten**
Der Winkel in der Klammer der sin–Funktion muss also einem Wert von –0,643 zu π zu addieren: 0,643 + π Der Wert kann ausgerechnet, oder auch erst einmal so stehen bleiben.

$\frac{1}{2}(x+\pi) = 0{,}643 + \pi + 2k\pi$ Periode der sin-Funktion berücksichtigt
$x+\pi = 1{,}286 + 2\pi + 4k\pi \quad | -\pi$
$x = 1{,}286 + \pi + 4k\pi$
$\mathbf{x = 4{,}43 + 4k\pi}$

Beide Nullstellen, ohne Periode, sind im dem obigen Kurvenbild zu erkennen.

20.3.3 Berechnen der Extremwerte

Man kann die Berechnung der Extremwerte auch ohne Benutzung der Differenzialrechnung durchführen. Es ist bekannt, dass der sin in einer Periode von 2π einen Hochpunkt bei $\pi/2$ und einen Tiefpunkt bei $3/2\,\pi$ besitzt. Deshalb kann man analog zu den Nullstellen folgende Rechnung durchführen:

Hochpunkte

$\frac{1}{2}(x + \pi) = \pi/2 + 2k\pi$ Periode der sin-Funktion berücksichtigt

$x + \pi = \pi + 4k\pi$

$\mathbf{x = 0 + 4k\pi}$

Der erste Hochpunkt befindet sich an der Stelle x = 0 und dann im Abstand von $4k\pi$.

Tiefpunkte

$\frac{1}{2}(x + \pi) = 3\pi/2 + 2k\pi$ Periode der sin-Funktion berücksichtigt

$x + \pi = 3\pi + 4k\pi$

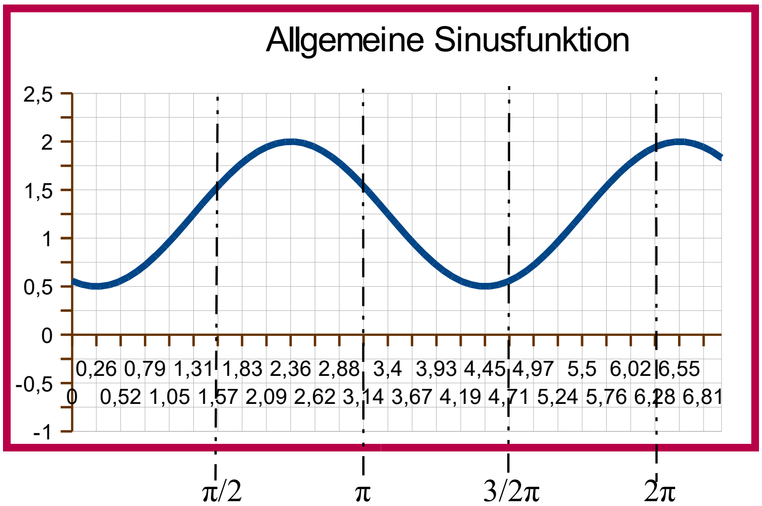
$\mathbf{x = 2\pi + 4k\pi}$

Der erste Tiefpunkt befindet sich an der Stelle $x = 2\pi$ und dann im Abstand von $4k\pi$. beide Extremwerte sind aus dem obigen Kurvenbild zu erkennen.

20.4. Kurvenbild bekannt

20.4.1 Funktionsgleichung erstellen

Als nächstes soll der umgekehrte Weg erläutert werden. Gegeben sei das Kurvenbild einer Funktion

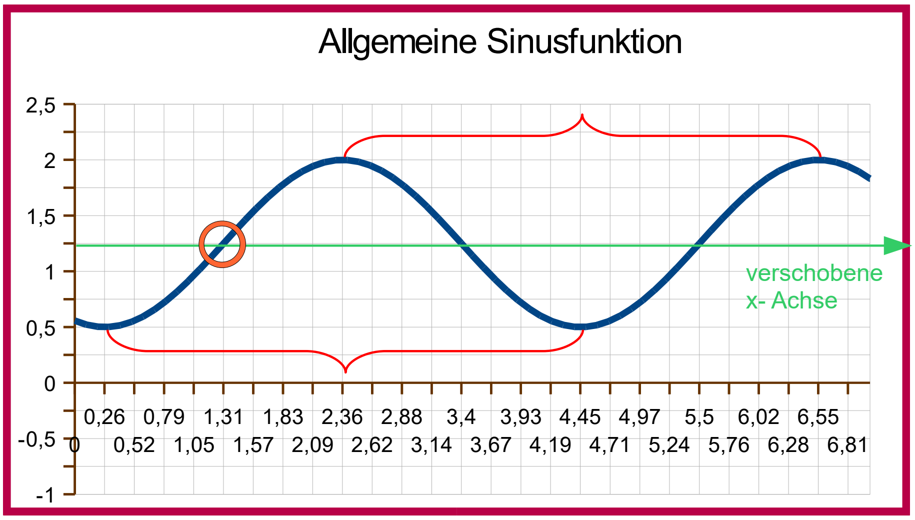


Die angegebenen x-Intervalle entsprechen einem Wert von $\frac{\pi}{12}$

Man sollte den umgekehrten Weg in der gleichen Reihenfolge beschreiten. Als erstes werden die Werte für a und d bestimmt. Die gezeichnete sin-Funktion verläuft in den y-Grenzen von 0,5 und 2. Der Wert für d muss genau die Mittellinie zwischen beiden sein. Den Mittelwert von zwei Werten berechnet am über $m = \frac{1}{2}(r + s)$.

Damit ergibt sich in diesem Fall als Mittelwert: **d = ½ (½ + 2) = $^5/_4$ = 1,25**
Für die Amplituden ergeben sich die Differenzen 2 – 1,25 = 0,75 oder 1,25 – 0,5 = 0,75. was für den Wert a zu **a = 0,75** führt.

Periode
Die Bestimmung der Periode ist auch hier der aufwendigste Teil.



Man sucht sich im Kurvenbild zwei Punkte, die den gleichen Funktionswert besitzen. Aber es muß auch das gleiche Funktionsverhalten sein, entweder steigende Funktion oder fallende Funktion. Am einfachsten geht es immer, wenn man zwei Hochpunkte oder Tiefpunkte findet. Die sind immer eine Periodenlänge auseinander. Bei Schnitt-punkten mit der Mittellinie muss man ebenfalls aufpassen, das man nicht den nächsten, sondern die übernächsten Schnittpunkt nimmt.
Falls ein Funktionsbild keine vollständige Periode zeigt, kann man auch über halbe Perioden gehen. Der Abstand zwischen einem Hochpunkt und einem Tiefpunkt ist immer eine halbe Periode und der Abstand zwischen zwei benachbarten Schnittstellen mit der Mittellinie ist ebenfalls eine halbe Periode.
Im obigen Beispiel ist der Abstand zwischen zwei Hochpunkten und zwei Tiefpunkten angegeben. Jedes Kästchen in x-Richtung bedeutet π/12, so dass sich eine Periode von p = 16 * π/12 = 4/3 π ergibt. Diese Zahl ist aber nicht identisch mit dem Faktor b, der für die Funktionsgleichung gesucht ist. Auch hier muss von der Periode auf den Faktor b umgerechnet werden, indem man die Formel aus dem vorherigen Kapitel nach b umstellt.

$$\boxed{b=\frac{2\cdot\pi}{p}}$$

Setzt man in diese Formel den ausgezählten Wert für p ein, erhält man für die Faktor **b = 3/2 = 1,5**.

Bleibt noch die Verschiebung c der Kurve entlang der x – Achse. Der Punkt, an dem die sin-Kurve die Mittellinie schneidet und einen steigenden Funktionsast besitzt, wie die Standard sin-Funktion im Ursprung, ist im obigen Funktionsbild mit einem roten Kreis gekennzeichnet. Diese Stelle befindet sich bei 5 Kästcheneinheiten, also **c = 5 * π/12** .
Damit sind alle vier Parameter bestimmt und ergeben eine Funktionsgleichung:

$$\boxed{f(x) = 0{,}75 \sin (1{,}5 (x - 5/12\ \pi)) + 1{,}25}$$