16. Lineare Funktionen

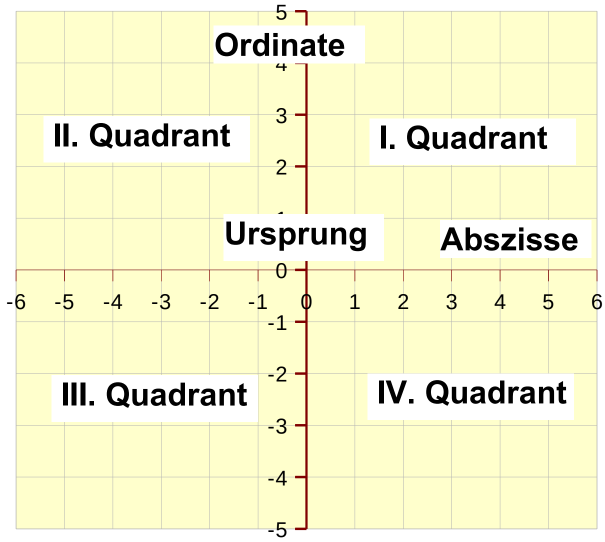
Lineare Funktionen sind die einfachsten der Funktionen und für viele grundlegenden Anwendungen zu verwenden. Da es sich um „Funktionen“ handelt, gibt es eine Abbildungsvorschrift und da es „linear“ sein soll, darf die Variable des Urbildes (x– Wert) nur mit einem Exponenten 1 auftreten. Alle Funktionen lassen sich auch zeichnerisch darstellen, indem man die Abhängigkeit des Bildes y von Urbild x graphisch sichtbar macht. Daraus ist leicht zu erkennen, dass man eine Beziehung zwischen zwei Werten herstellen muss. Diese Beziehungen werden in einem sogenannten „Wertepaar“ oder einem Tupel angegeben. Die Zusammengehörigkeit des Wertepaares kennzeichnet man dadurch, dass es in runde Klammern eingeschlossen wird und die Trennung zwischen den beiden Werten durch ein Trennzeichen, das nicht einheitlich und standardisiert ist. Einzig soll man kein Komma als Trennung verwenden, damit es zu keinen Unklarheiten mit eventuell vorhandenen Dezimalzahlen kommt. Übliche Angaben solcher Wertepaare sind: (3;4) (1|3) (-2/7)
Es geht also darum, zwei Werte eindeutig zeichnerisch darzustellen. Dabei muss auch gesichert sein, dass die beiden Wertepaare (2|4) und (2|–3) unterscheidbar bleiben. Nah der Definition der Funktion kann ein Element des Urbildes auf zwei verschiedene Elemente der Bildmenge abgebildet werden. Aus diesem Grund hat man zwei senkrechte Achsen eingeführt, bei dem die eine Achse die menge aller Urbilder angibt und die andere Achse die Menge aller Bilder. Die Darstellung dieser beiden Achsen bezeichnet man als Koordinatensystem.

16.1. Koordinatensystem und Punkte

Ein solches Koordinatensystem zur Darstellung von Beziehungen hat als erstes René Descartes (1637) eingeführt und wird deshalb auch als Descartisches Koordinatensystem bezeichnet.
Bezeichnungen:

Ursprung (Origo (lat) = Ursprung) = O (0|0) (Kreuzung der Achsen)
Abszisse (abscindere (lat) = abtrennen) = x–Wert
Urbilder, unabhängige Variable
Ordinate (ordinare (lat) = ordnen) = y–Wert
Bilder,abhängige Variable

Die beiden Achsen teilen die die gesamte Zeichenfläche in vier Teile ein. Diese vier Teile bezeichnet man als Quadranten, abgeleitet von der lateinischen Zahl vier – quadro.
Der Ursprung teilt die beiden Achsen in positive und negative Werte, da im Ursprung beiden Achsen der Wert 0 zugewiesen ist. Aus diesem Grund haben die Wertepaare in den einzelnen Quadranten ganz markante Eigenschaften bezüglich ihrer Vorzeichen. Aus den Vorzeichen der Wertepaare kann man bestimmen, in welchem Quadranten die Wertepaare einzutragen sind.



positiver x – Wert und positiver y – Wert : der Punkt liegt im I. Quadranten
negativer x – Wert und positiver y – Wert : der Punkt liegt im II. Quadranten
negativer x – Wert und negativer y – Wert : der Punkt liegt im III. Quadranten
positiver x – Wert und negativer y – Wert : der Punkt liegt im VI. Quadranten

E (+x / +y)	I. Quadrant	z.B.	E (1 / 15)
F (–x / +y)	II. Quadrant	z.B.	F (–5 / 10)
G (–x / –y)	III. Quadrant	z.B.	G (–3 / –8)
H (+x / –y)	IV. Quadrant	z.B.	H (6 / –2)

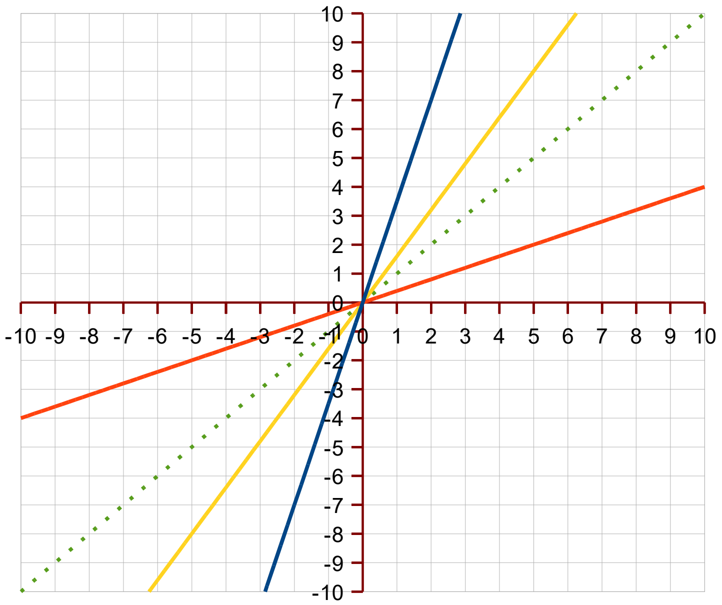
Grundsätzlich ist die erste Zahl immer der x – Wert und die zweite Zahl immer der y – Wert. Diese Festlegungen gelten für alle Darstellungen in einem Koordinatensystem im gesamten Bereich der Mathematik. In besonderen Anwendungsfällen können die x– und die y – Achse noch mit einer Maßeinheit versehen werden, um darzustellen, dass die Werte dieser Achse die angegebene inhaltliche Bedeutung besitzen.

16.2. Ursprungsgeraden – direkte Proportionalität

Die einfachsten linearen Funktionen sind Ursprungsgeraden. Das sind solche Geraden, die durch den Ursprung des Koordinatensystems verlaufen. Diese Geraden haben damit immer die Eigenschaft: dem Wert 0 aus der Urbildmenge wird der Wert 0 aus der Bildmenge zugewiesen. Solche Funktionen findet man bei Berechnungen zur **direkten Proportionalität**. Gleichgültig, welche Proportionalität vorliegt kann einem *Nichts* nur ein *Nichts* zugewiesen werden. Die Funktionsgleichung solcher Funktionen lautet:

$$\boxed{y = m\,x}$$

Die Kurvenbilder solcher Funktionen sind Geraden, die durch den Ursprung des Koordinatensystems verlaufen.



© Dipl.-Math. Armin Richter

Das m in der Funktionsgleichung kennzeichnet die Abbildungsvorschrift: Jedem Element aus der Urbildmenge ist das m-fache als Element der Bildmenge zuzuordnen. Diesen Wert m kann man auch noch anders interpretieren: Das Verhältnis (der Quotient) zwischen dem Bildelement und dem Urbildelement ist für alle Wertepaare gleich. Es handelt sich also um einen konstanten Quotienten für alle Wertepaare. Damit reicht es aus, ein komplettes Wertepaar zu kennen, um die Abbildungsvorschrift zu beschreiben, soll heißen: den Wert von m zu bestimmen.
Wenn also bekannt ist, dass einem Urbild x = 3 ein Bild y = 9 zugeordnet ist, dann kann man auch bestimmen welches Bild dem Urbild x = 5 zugeordnet ist. Aus der ersten, bekannten Beziehung erhält man m = y / x = 9 / 3 = 3. Da diese Abbildungsvorschrift für alle Urbilder gelten muss, ergibt sich für das Bild von x = 5: y = 3 * 5 = 15.

Dem Urbild x = 5 ist gemäß der gleichen Abbildungsvorschrift y = 15 zuzuweisen.

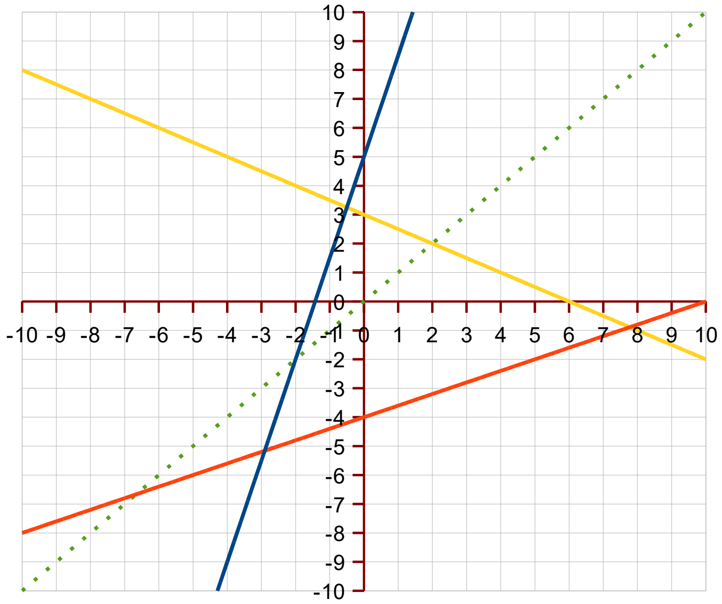
16.3. Allgemeine Geraden

Allgemeine Geraden unterscheiden sich von proportionalen Geraden dadurch, dass zur Abbildungsvorschrift noch ein konstanter, von x unabhängiger Wert, hinzuaddiert werden darf.

$$\boxed{\mathbf{y = m\,x + b}}$$

Der Wert von b wird unabhängig von der Multiplikation mit m zu allen entstandenen Zwischenergebnissen addiert. Die Zahl b gehört mit zu Abbildungsvorschrift: Jedem Element aus der Urbildmenge ist das m-fache des Wertes und die Summe mit einer feste Zahl als Element der Bildmenge zuzuordnen.

Die Kurvenbilder solcher Funktionen sind Geraden, die nicht mehr durch den Ursprung verlaufen. Aber man kann noch allgemein sagen: Dem Urbildelement x = 0 wird immer das Bildelement y = b zugewiesen.



Bei proportionalen Funktionen hat sich gezeigt, dass ein Wertepaar ausreicht, um die Abbildungsvorschrift eindeutig zu bestimmen. Wie verhält es sich damit bei allgemeinen linearen Funktionen. In diesen Fällen reicht ein Wertepaar nicht mehr aus. Man kann sich das an folgendem Beispiel klar machen:

weise dem Urbildelement $x = 3$ das Bildelement $y = 10$ zu.

eine mögliche Abbildungsvorschrift ist: $y = 3x + 1$, was zu den Werten $m = 3$ und $b = 1$ führt. Aber es gibt auch eine Abbildungsvorschrift $y = 4x - 2$, was zu den Werten $m = 4$ und $b = -2$ führt. Damit ist die Abbildungsvorschrift nicht mehr eindeutig und deshalb als solche nicht brauchbar. Um bei einer allgemeinen linearen Abbildung eine eindeutige Abbildungsvorschrift zu erreichen, benötigt man zwei fest vorgegebene Zuordungen zwischen Urbild und Bild. Folgende Aussage würde zu einer eindeutigen Abbildungsvorschrift führen:

Bestimme die Abbildungsvorschrift, die dem
Urbildelement $x = 3$ das Bildelement $y = 10$ zuweist
und gleichzeitig dem
Urbildelement $x = 5$ das Bildelement $y = 17$ zuweist.

Wie man daraus die Abbildungsvorschrift ermittelt wird in einem späteren Abschnitt beschrieben.

Aus den bisherigen ergibt sich die Frage, welche Auswirkungen auf das Kurvenbild der Geraden haben die Wert m und b und gibt es weitere Werte, die das Bild einer Geraden charakterisieren. Dabei geht es immer darum: Was ist entscheidend, um das Bild einer Geraden eindeutig vom Bild einer anderen Geraden zu unterscheiden.

16.4. Begriffe und charakteristische Werte

Allgemeine lineare Funktionen besitzen in ihrer Abbildungsvorschrift zwei Werte, die die Abbildung beschreiben. Das ist zum einen der Wert m und zum anderen der Wert b. Im folgenden soll die Bedeutung der beiden Wert auf die Darstellung der Funktion untersucht werden.

16.4.1 m – Die Steigung

Dazu soll die Bedeutung des Wertes m bei einer proportionalen Funktion untersucht werden. Die Bedeutung des Wertes für allgemeine lineare Funktionen ist die gleiche, allerdings hat man dabei den Einfluss des Wertes von b ausgeschlossen. Dazu soll als Abbildungsvorschrift folgende Aussage genutzt werden:

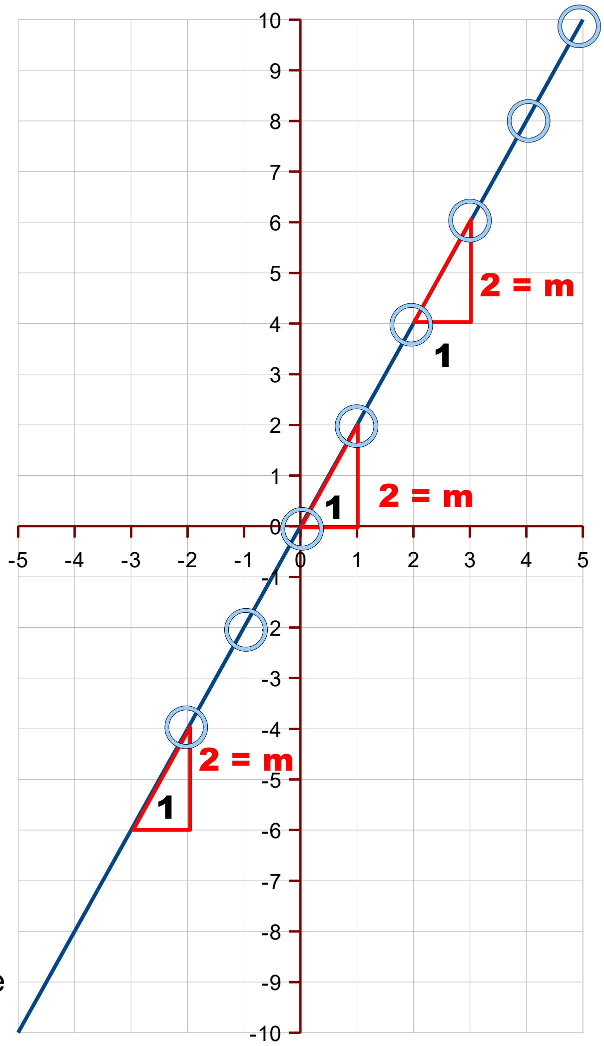
Weise jedem Element aus der Urbildmenge das Element
mit dem doppelten Wert aus der Bildmenge zu.

Aus dieser Zuweisungsvorschrift kann man eine kleine Wertetabelle aufbauen, die die die Vorschrift kennzeichnet:

x	–2	-1	0	1	2	3	4	5
y	–4	–2	0	2	4	6	8	10

Diese Tabelle zeigt, dass jedem Urbild das doppelte seines Wertes als Bild zugewiesen wird. Jetzt soll diese Zuweisung graphisch dargestellt werden.

Die in der Tabelle ermittelten Wertepaare von Urbild- und Bildwerten sind in der rechten Darstellung durch kreise gekennzeichnet. berechnet man für die Abbildung nicht nur ganzzahlige Wert, sondern auch beliebige reelle , dann erhält man die angezeigte Gerade. Die Gerade hat eine markante Eigenschaft:



Gleichgültig, an welcher Stelle der Gerade man sich befindet, wenn man um 1 Einheit in der Urbildmenge nach rechts geht, geht man in der Bildmenge um 2 Einheiten nach oben.

Die Anzahl der Einheiten, die nach oben gegangen werden muss wird von der Abbildungsvorschrift bestimmt. In diesem Fall hieß die Abbildungsvorschrift „... weise das Doppelte zu...“ mit der Konsequenz, dass für einen Schritt in der Urbildmenge der doppelte Schritt in der Bildmenge vollzogen werden muss. Deshalb bezeichnet man m als den Anstieg oder die Steigung der Geraden.

Je höher der Wert von m ausfällt, desto steiler verläuft die Gerade und je kleiner der Wert ist, desto flacher verläuft die Gerade. Für negative Werte von m erhält man ein fallende Gerade und man spricht von einer negativen Steigung.

Der Parameter m bestimmt

- über sein Vorzeichen, ob die Gerade (im Koordinatensystem von links nach rechts betrachtet) steigt oder fällt und
- über seinen Betrag, ob die Gerade stärker oder schwächer steigt oder fällt.

Aus diesem Grund bezeichnet man den Parameter m als den Steigungsfaktor der Gerade.
In Formeln ausgedrückt heißt das:

- **m > 0** : Die Gerade **steigt**
- **m < 0** : Die Gerade **fällt**
- **| m | < 1** : Die Gerade **steigt oder fällt schwächer** als die Winkelhalbierende
- | m | = 1 : Die Gerade steigt oder fällt genau so wie die Winkelhalbierende
- **| m | > 1** : Die Gerade **steigt oder fällt stärker** als die Winkelhalbierende

16.4.2 b – Der Achsenabschnitt

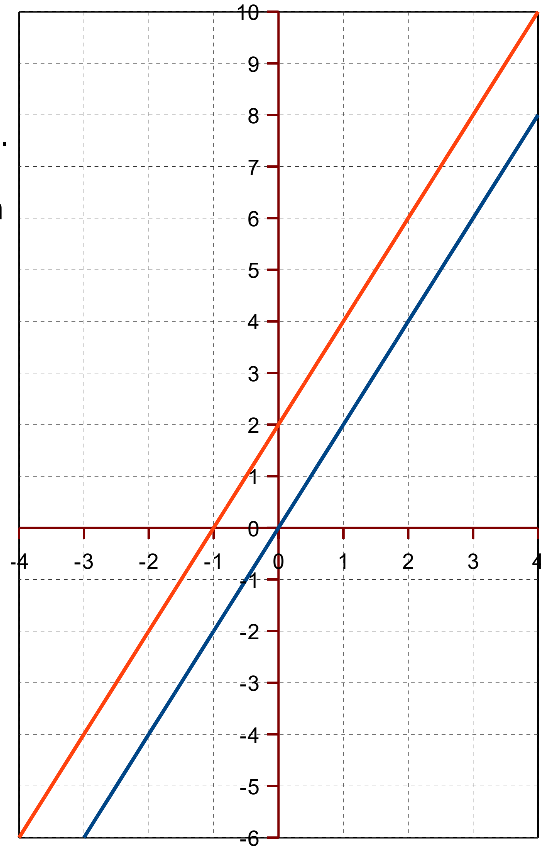
Der Wert von b bestimmt, auf welchen Bildpunkt y der Wert x = 0 des Urbildes abgebildet werden soll. Damit ergibt sich zu dem vorhergehenden eine konstante Verschiebung um b Einheiten auf der y–Achse.
Dazu soll die Abbildungsvorschrift um folgende Aussage ergänzt werden:

Weise jedem Element aus der Urbildmenge das Element
mit dem doppelten Wert aus der Bildmenge plus 2 zu.

Aus dieser Zuweisungsvorschrift kann man wieder eine Wertetabelle aufbauen, die die die Vorschrift kennzeichnet:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–4	–2	0	2	4	6	8	10

Diese Tabelle zeigt, dass jedem Urbild das doppelte seines Wertes als Bild zugewiesen wird. Jetzt soll diese Zuweisung graphisch dargestellt werden.



Die blaue Gerade kennzeichnet den Verlauf der im vorigen Abschnitt angegebenen Abbildungsvorschrift. Die rote Gerade kennzeichnet den Verlauf der jetzt geänderten Abbildungsvorschrift. Es ist deutlich zu erkennen, dass diese beiden Geraden parallel verlaufen und deshalb über den gleichen Wert m (=2) verfügen. Für die neue Abbildung sind allerdings alle Bildwerte konstant um 2 Einheiten erhöht, unabhängig davon, an welcher Stelle des Urbildes man sich befindet.

Der Wert b bestimmt den Schnittpunkt der Geraden mit der y – Achse. Dieser Sachverhalt wird in der Formulierung der Abbildungstheorie formuliert als:

Das Ursprungselement x = 0 der Urbildmenge wird auf der Element y = b der Bildmenge abgebildet.

Der Parameter b bestimmt

- über sein Vorzeichen, ob die Gerade die Ordinate oberhalb, auf oder unterhalb der x – Achse schneidet
- über seinen Betrag, in welchem Abstand von der x – Achse die Gerade die y–Achse schneidet.

Aus diesem Grund bezeichnet man den Parameter b als den Ordinatenabschnitt der Gerade.

Genauer gilt:

- **b > 0** : Die Gerade schneidet die Ordinate **oberhalb der x–Achse** im Punkt (0| b)
- b = 0 : Die Gerade schneidet die Ordinate im Punkt (0 | 0)
- **b < 0** : Die Gerade schneidet die Ordinate unterhalb der x–Achse im Punkt (0|b)

16.4.3 Nullstellen

Im vorherigen Abschnitt wurde untersucht auf welches Bildelement das Urbildelement x = 0 abgebildet wird. In diesem Zusammenhang ist es ebenso interessant zu untersuchen, welches Urbildelement denn auf das Bildelement y = 0 abgebildet wird. dazu muss die Frage anders gestellt werden: Welches Urbildelement x wird auf das Bildelement y = 0 abgebildet.
Das ist letztenendes die Frage nach der Umkehrabbildung. Es sind die Bildelemente bekannt und es werden die Urbildelemente gesucht, die zu diesen Bildelementen führen. Im Bereich der Funktionen bezeichnet man diese Abbildungen als „Umkehrfunktionen“. Im Dokument „Funktionen“ wurde dem Thema Umkehrfunktionen großer Raum gewidmet und soll hier nicht wiederholt werden. Betrachtet man die Abbildungsvorschrift einer linearen Funktion y = m x + b so kann man die aufgeworfene Fragestellung mit der Formel

$$0 = m\,x + b$$

beschreiben. Rechnerisch stellt das natürlich kein Problem dar und führt zu dem Ergebnis: $x = -\,b / m$

Schlußfolgerung:

Das Urbildelement x = – b/m wird auf das Bildelement y = 0 abgebildet.

Alle x – Werte der Urbildmenge, die auf das Bildelement y = 0 abgebildet werden bezeichnet man als Nullstellen der Funktion. Prinzipiell kann es mehrere solcher Nullstellen geben,oder auch keine. Bei linearen Funktionen gibt es genau eine.

16.5. Zeichnen des Graphen

In diesem Abschnitt soll geklärt werden, welchen Einfluss die Werte von m und b auf das Kurvenbild er Geraden haben und wie man mit der Kenntnis dieser Werte das Kurvenbild erstellen kann.

16.5.1 Bestimmen des Graphen aus zwei Punkten

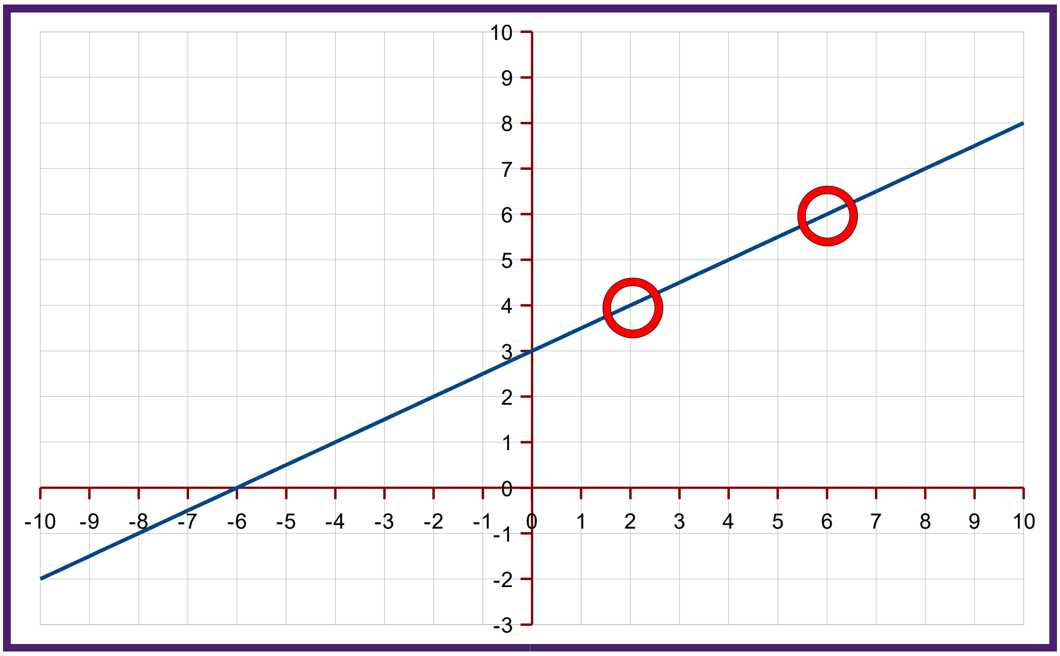
Der einfachste Weg besteht darin, mithilfe der Abbildungsvorschrift zwei Punkte mit ihren x– und y– Werten zu bestimmen. Zwei Punkte legen den Verlauf einer Geraden eindeutig fest. Die so gefundenen Wertepaare werden in das Koordinatensystem eingetragen und mit dem Lineal durch eine gerade Linie verbunden. *(Dabei wird gern vergessen, dass eine Gerade nicht an den beiden Punkten endet, sondern darüber hinaus geht. Eine Gerade hat keinen Anfang und kein Ende.)*

Beispiel: $y = \frac{1}{2} x + 3$

Konstruiere eine Mini-Wertetabelle mit geeigneten x – Werten, um eventuell notwendige Bruchrechungen zu vereinfachen. Bei der angegebenen Funktion ist es natürlich möglich auch für x = 1 einzusetzen. Das führt allerdings bei der Berechnung des ersten Ausdrucks zu Brüchen, die man vermeiden kann. Nicht nur aus Gründen der Rechnung, sondern auch aus Gründen der Zeichnung sollte man versuchen ganzzahlige Wert zu bevorzugen. Selbst, wenn man richtig rechten sind Werte, wie 7/16 relativ scher in ein ein Koordinatensystem einzuzeichnen. Natürlich ist das nicht immer möglich, aber wenn möglich, sollte man das nutzen. Für die obige Abbildungsvorschrift machen offensichtlich alle geraden Zahlen Sinn, da man dort wieder ganze Zahlen als Ergebnis erhält.

x	2	6
y	4	6

Je weiter die beiden x – Werte auseinanderliegen, desto genauer lässt sich die Gerade zeichnen.



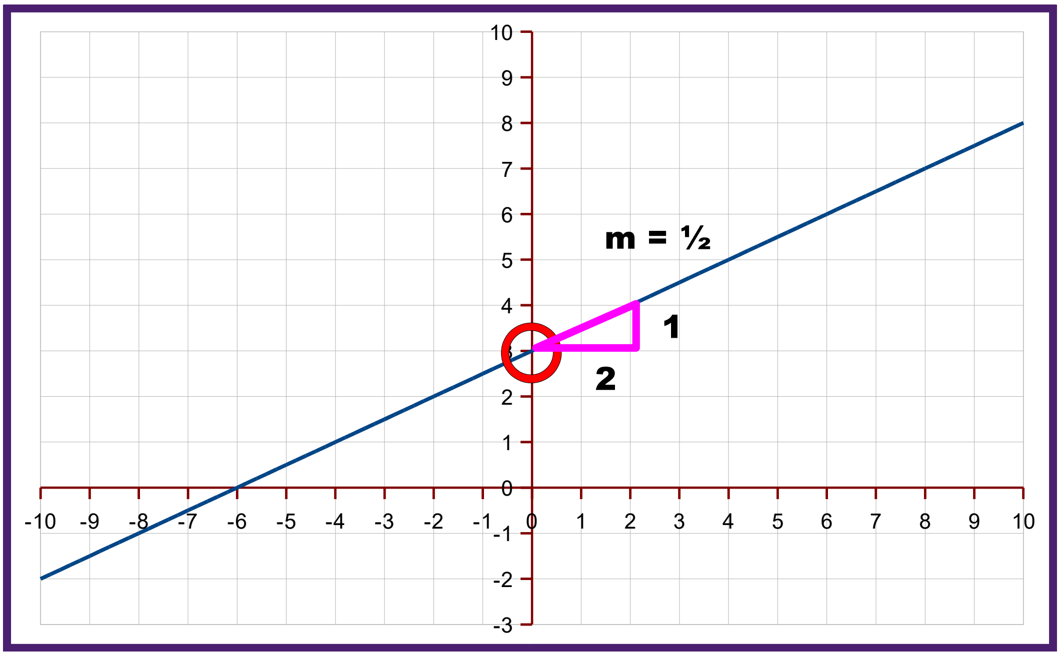
(Ordentliches Werkzeug ist für saubere Arbeit Voraussetzung. Dazu gehören Bleistifte mit Spitzen die sich deutlich von denen des Kugelschreibers unterscheiden und Lineale oder Geo-Dreiecke, die nicht ausgebrochen sind.)

© Dipl.-Math. Armin Richter

16.5.2 Bestimmen des Graphen aus einem Punkt und der Steigung

Eine weitere praktikable Methode ist die, die Funktionsgleichung direkt zum Zeichnen zu benutzen. Dazu benötigt man einen Punkt und die angegebene Steigung. Den notwendigen Punkt bekommt man über den Wert von b. Dieser Wert ist der Schnittpunkt mit der y–Achse und hat somit die Koordinatendarstellung P(0|b). Von diesem Punkt aus trägt man den Anstieg in das Koordinatensystem ein. Aus der Untersuchung der graphischen Bedeutung des Wertes m in dem Kapitel weiter vorn, wurde herausgearbeitet, dass man in x – Richtung um eine Einheit nach rechts gehen muss und um m Einheiten nach oben (bei negativem m nach unten) und man erhält so einen weiteren Punkt. Auch diese Methode führt damit zu zwei Punkten, die mit dem Lineal zu einer Geraden verbunden werden können. Es soll dazu das gleiche Beispiel betrachtet werden: $y = \frac{1}{2} x + 3$

Der Schnittpunkt mit der y–Achse liegt bei x = 0 und y = 3. Damit hat man einen ersten Punkt. Für den zweiten Punkt geht man 1 Einheit in positive x – Richtung und ½ Einheiten in positive y–Richtung. Diese beiden Werte lassen sich auch mit einem beliebigen Faktor multiplizieren, um zu dem nächsten Punkt zu gelangen. Man kann auch 2 Einheiten in x – Richtung und 1 Einheit in y – Richtung gehen. Allgemein kann man bei Brüchen sagen: Der Wert, den m im Nenner hat ist in x–Richtung zu gehen und der Wert der im Zähler steht ist in y–Richtung zu gehen. Steht vor dem Wert von m ein Minuszeichen ist in negative y-Richtung zu gehen.



16.6. Aufstellen von Funktionsgleichungen

Im vorangegangenen Abschnitt wurde behandelt, wie man von der Funktionsgleichung zum Kurvenbild der Geraden gelangt. Hier soll jetzt der umgekehrte Weg gegangen werden, wie man von Kurvenbild, oder von gegebenen Werten zur Funktionsgleichung gelangt. Grundsätzlich kann man davon ausgehen, dass man zwei zwei Informationen benötigt, um die Funktionsgleichung zu erstellen. Die Funktionsgleichung hat die allgemeine Form y = mx + b, wobei m und b die interessierenden wert sind. nach allgemeinen mathematischen Grundsätzen kann man aus einer Gleichung nur eine Variable bestimmen, benötigt man also für zwei Variable zwei Gleichungen, also zwei verschiedene Informationen.

16.6.1 Steigung und Punkt

Der erste mögliche Fall ist, dass die Steigung m der Geraden und ein beliebiger Punkt, der auf der Geraden liegen soll, gegeben ist. Dazu soll gleich ein Beispiel betrachtet werden:

m = **2** und der Punkt auf der Geraden ist P(**3 / 4**)

Aus der allgemeinen Geradengleichung y = mx + b ist zunächst der Wert für m bekannt:

$$y = \mathbf{2}\,x + b$$

Außerdem soll der Punkt P auf der Geraden liegen, also muss die Geradengleichung für ihn gültig sein:

$$\mathbf{4} = \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} + b$$

(Setzt man in die Geradengleichung den x-Wert des Punktes ein, muss der y Wert herauskommen!)

Damit entsteht eine Gleichung zur Berechnung von b: **b = – 2**

Dieser Wert führt zur Funktionsgleichung der Geraden: **y = 2x – 2**

Man kann die gegebenen Werte auch direkt in eine Formel einsetzen, um die Funktionsgleichung zu bestimmen. Mitunter ist der direkte Einsatz der Formel günstiger, weil er weniger Rechenaufwand bedeutet.

$$\boxed{\mathbf{y - y_1 = m\,(x - x_1)}}$$

Dabei sind die Werte für x_1 und y_1 die Koordinaten des angegebenen Punktes. Im angegebenen Beispiel würde sich damit folgende Gleichung ergeben:

$$y - 4 = 2\,(x - 3)$$

was nach Ausmultiplizieren der Klammer und Zusammenfassen der Glieder ohne x zum Ergebnis

$$y = 2x - 2$$

führt.

© Dipl.-Math. Armin Richter

16.6.2 Achsenabschnitt und Punkt

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, dass der Achsenabschnitt b und ein Punkt bekannt ist. Die Vorgehensweise ist die gleiche, wie im vorhergehenden Abschnitt, mit dem Unterschied, dass nicht m, sondern b bekannt ist. Mit dem gleichen Beispiel, wie im vorhergehenden Abschnitt ergibt sich folgender Rechenweg:

b = **–2** und der Punkt auf der Geraden ist P(**3 / 4**)

$$y = m\,x - 2$$

Außerdem soll der Punkt P wieder auf der Geraden liegen:

$$4 = m \cdot 3 - 2$$

Damit entsteht eine Gleichung zur Berechnung von m: **m = 6 : 3 = 2**

Dieser Wert führt wieder zur gleichen Funktionsgleichung : **y = 2x – 2**

16.6.3 Zwei Punkte

Beim Zeichnen der Gerade aus der Funktionsgleichung wurde bereits gezeigt, dass zwei Punkte genügen, um eine Gerade eindeutig zu zeichnen. Damit müsste es auch möglich sein, dass aus zwei Punkten eine Geradengleichung erstellt werden kann. Wenn man die vorhergehenden Abschnitte berücksichtigt stellt sich das Problem: Wo bekommt man den Wert für m her. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten.

1. Wenn die beiden Punkte auf einer Geraden liegen sollen, dann müssen beide Punkte die Geradengleichung erfüllen.
Damit kann man für beide Punkte die Gültigkeit der Geradengleichung ansetzen.
Beispiel:
die Punkte **P(3| 4)** und **Q (5 | 8)** liegen auf einer Geraden.
Bestimme die Funktionsgleichung.

$$4 = m \cdot 3 + b$$
$$8 = m \cdot 5 + b$$

Wenn die Punkte auf einer Geraden liegen, dann müssen beide Gleichungen für das gleiche m und das gleich b eine Lösung besitzen. Das ist aber nichts anderes, als ein Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Dieses Gleichungssystem lässt sich mit den bekannten Methoden lösen. Da die Gleichungen immer das gleiche Aussehen haben, bietet sich an, die beiden Gleichungen zu subtrahieren, da dann die Unbekannte b (immer) herausfällt:

$$4 - 8 = 3 \cdot m - 5 \cdot m$$
$$-4 = -2 \cdot m$$
$$2 = m$$

Dieser wert von m ist in eine der beiden Gleichungen einzusetzen, um den Wert für b zu bestimmen: $4 = 2 \cdot 3 + b \Rightarrow b = -2$

womit man die komplette Funktionsgleichung gefunden hat:

$$\mathbf{y = 2\,x - 2}$$

2. Auch für diesen Fall gibt es eine kompakte Formel, die das Lösen einen Gleichungssystem überflüssig macht:

$$\boldsymbol{\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

Dabei sind für x_1 und y_1 die Werte der Punktes P und für y_2 und x_2 die Werte des Punktes Q einzusetzen. Aus dieser Formel kann auch der Wert für den Anstieg direkt entnommen werden. Er entspricht dem Quotienten der y– und x– Werte der beiden Punkte auf der rechten Seite.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Berechnet man den Wert von m gesondert, kann man anschließend den Weg beschreiten, dass ein Punkt und der Anstieg für die Gerade bekannt sind.

für das oben angegebene Beispiel zur Bestimmung der Geradengleichung aus zwei Punkten ergibt sich folgende Rechnung:

Beispiel:

die Punkte **P(3| 4)** und **Q (5 | 8)** liegen auf einer Geraden.
Bestimme die Funktionsgleichung.

$$\frac{y-4}{x-3}=\frac{8-4}{5-3}=\frac{4}{2}=2$$

nach Multiplikation mit dem Nenner der linken Seite ergibt sich:

$$y-4=2\,(x-3)$$

$$\mathbf{y = 2\,x - 2}$$

Mit dieser Formel lässt sich auch das Problem Achsenabschnitt und Punkt aus dem vorherigen Kapitel behandeln. Da ein Punkt bekannt sein muss, kann man aus dem Achsenabschnitt b auch einen Punkt im Koordinatensystem machen. Dieser Punkte hätte die Koordinaten Q (0 | b). Damit besitzt man zwei Punkte, mit denen die Geradengleichung bestimmbar ist.

16.7. Parallele und orthogonale Geraden

Sehr oft ist das Problem gestellt, dass eine Gerade bekannt ist, und es soll zu dieser geraden eine parallele oder eine senkrechte (orthogonale) gerade durch einen Punkt bestimmt werden. Bei einer solchen Aufgabenstellung **muss immer ein Punkt gegeben sein**, durch den die gesuchte Gerade verlaufen soll. Damit stellt sich das Problem, wie erhält man den Anstieg m, da ein zweiter Punkt nicht gegeben ist. Dazu muss man folgendes wissen:

Parallele Geraden haben den selben Anstieg:

Man übernimmt das m aus der gegebenen Geraden $\boldsymbol{m_2 = m_1}$

Senkrechte Geraden haben einen Anstieg mit dem negativen Kehrwert

$$\boldsymbol{m_2=-\frac{1}{m_1}}$$

Damit hat man einen Punkt und den Anstieg und kann die Geradengleichung erstellen.

© Dipl.-Math. Armin Richter

16.8. Berechnung fehlender Koordinaten

Eine weitere Aufgabenstellung besteht darin, dass von eine Punkt ein Koordinatenwert gegeben ist und der zweite so zu bestimmen ist, dass der Punkt auf der Geraden liegt. Damit gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten, der x–Wert ist bekannt und der y–Wert gesucht, oder der y–Wert ist bekannt und der x–Wert gesucht. Es soll mit dem einfacheren Problem begonnen werden, dass der x–Wert bekannt ist und der y – Wert gesucht ist, so dass der Punkt auf der Geraden liegt.

16.8.1 Fehlende y – Koordinate

Zu Beginn des Kapitels über lineare Funktionen wurde bereits festgestellt, dass jede lineare Funktion eine Abbildung einer Urbildmenge auf eine Bildmenge ist. Für diese Abbildung gibt es eine Abbildungsvorschrift, nach der einem Element der Urbildmenge ein Element der Bildmenge zugeordnet wird. Für die Abbildung von reellen Zahlen auf reelle Zahlen erfüllt die Abbildungsvorschrift die Funktionsgleichung, die jedem x ein y zuordnet.
Damit klärt sich das Vorgehen zur Lösung des Problems: Setze den x–Wert (Urbildelement) in die Funktionsgleichung (Abbildungsvorschrift) ein. Das Ergebnis ist das zugehörige y (Bildelement), das auf der Geraden liegt, da es durch die Abbildungsvorschrift entstanden ist.
Beispiel:

Gegeben ist ein Punkt P(3 / ?). Bestimme den y – Wert so, dass der Punkt auf der Geraden $y = -2x + 3$ liegt.

Durch Einsetzen des x–Wertes in die Funktionsgleichung erhält man den y Wert $y = -3$. Damit ist die Lösung der Aufgabenstellung: Der Punkt P(3 / –3) ist der Punkt, der auf der Geraden $y = -2x + 3$ liegt.

16.8.2 Fehlende x – Koordinate

Ein kleines bischen anders liegt der Fall, wenn der y Wert eines Punktes gegeben ist und es soll der x – Wert dazu berechnet werden. Von Seiten der Theorie der Abbildung heißt das, es ist das Bildelement gegeben und e ist das Urbildelement gesucht, dass bei vorgegebener Abbildung zu diesem Bildelement führt. Genau das wird durch die Umkehrabbildung (Umkehrfunktion) realisiert. Aus dem allgemeinen Kapitel über Funktionen ist bekannt, dass Umkehrfunktionen nicht immer existieren müssen, aber für lineare Funktionen existieren sie immer. Betrachtet man die Aufgabenstellung an einem Beispiel, so wird das Vorgehen intuitiv klar.

Beispiel:

Gegeben ist ein Punkt P(? / 2). Bestimme den x – Wert so, dass der Punkt auf der Geraden $y = 2x - 4$ liegt.

Rechnerisch setzt man in der Gleichung für y den gegebenen Wert ein und löst die Gleichung nach der gesuchten Variablen x auf.

$$2 = 2x - 4$$
$$6 = 2x$$
$$3 = x$$

Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten P(3 / 2).

Was wurde bei der Lösung gemacht. Die vorhandene Funktionsgleichung wurde nach der Variablen x aufgelöst. Das kann man natürlich auch machen, ohne dass ein spezieller Punkt bekannt ist.

$$y = 2x - 4$$
$$y + 4 = 2x$$
$$\tfrac{1}{2}y + 2 = x$$

Das ist der Gleichung der Umkehrabbildung (noch nicht die Umkehrfunktion) Diese Abbildung weist jedem Element der Bildmenge das jeweilige Element der Urbildmenge zu. Bei linearen Funktionen ist das noch sehr einfach, da es zu jedem Urbild genau ein Bild gibt und damit zu jedem Bild genau ein Urbild. Würde man die entstandene Funktionsgleichung in ein Koordinatensystem zeichnen, erhält man die gleiche Gerade wir bei $y = 2x - 4$. Was ist dann daran anders? Die abhängige und unabhängige Variable haben sich vertauscht. In der Funktion $y = 2x - 4$ ist x die unabhängige Variable und y die nach Abbildungsvorschrift abhängige Variable. Bei der Gleichung $\tfrac{1}{2}y + 2 = x$ ist y die unabhängige Variable und x die abhängige Variable. Schlußfolgerung: Die jeweils zugeordneten Wertepaare sind die gleichen, der Unterschied besteht in der Urbild– und Bildmenge.

Die Umkehrfunktion entsteht aus der Umkehrabbildung durch Vertauschen der beiden Variablen y und x, so dass als Umkehrfunktion $y = \tfrac{1}{2}x + 2$ entsteht. Diese Gerade entsteht aus der Spiegelung der Ausgangsgeraden $y = 2x - 4$ an der Geraden $y = x$.

16.9. Prüfung ob ein Punkt auf einer Geraden liegt

Daran anknüpfend ist die Fragestellung: Es ist ein Punkt mit seiner x– und y– Koordinaten gegeben und es soll festgestellt werden, ob dieser Punkt auf der Geraden liegt oder nicht. Wenn beide Koordinaten festliegen macht es keinen Sinn zu fragen für welchen Koordinatenwert liegt der Punkt auf der Geraden.

Diese Fragestellung wird allgemein als „Punktprobe“ bezeichnet, weil nachgewiesen werden soll, ob ein vorgegebener Punkt auf einem geometrischen Gebilde liegt oder nicht. Hier wird genau so vorgegangen, als ob zu einem gegebenen x–Wert der zugehörige y–Wert zu berechnen ist. Die x–Koordinate des Punktes wird in die Funktionsgleichung eingesetzt und das zugehörige y berechnet. Ist der berechnete y–Wert mit dem für den Punkt gegebenen y–Wert identisch, dann liegt der Punkt auf der Gerade, im anderen Fall nicht.

Beispiel:

Liegt der Punkt $P(3 \mid 7)$ auf der Geraden $y = 2x + 1$
$y = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ Punkt liegt auf der Geraden, da der berechnete y – Wert dem vorgegebenen entspricht.

Liegt der Punkt $P(2 \mid -5)$ auf der Geraden $y = -3x + 2$
$y = -3 \cdot 2 + 2 = -4$; der Punkt liegt nicht auf der Geraden

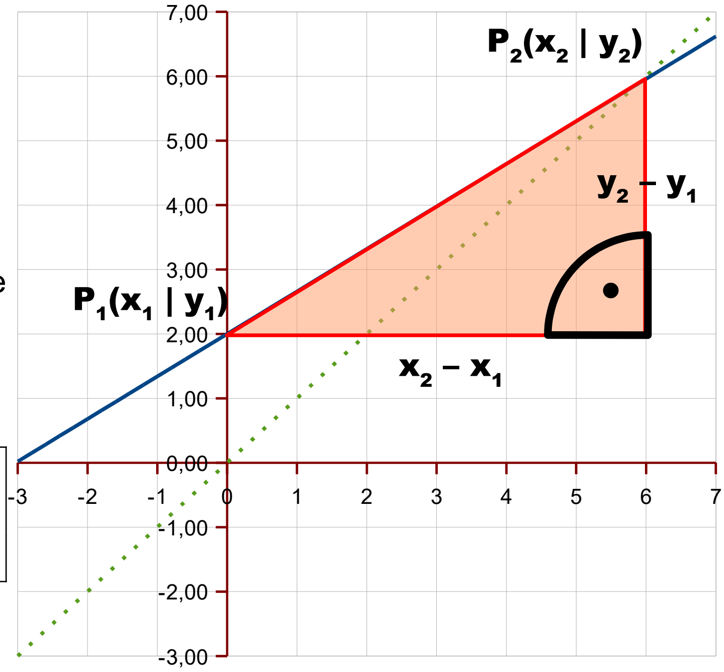
© Dipl.-Math. Armin Richter

16.10. Abstand zweier Punkte im Koordinatensystem

Bei der Bestimmung der Geradengleichung aus zwei Punkten wurde bereits festgestellt, dass sich der Wert von m aus den Differenzen der y Werte und der x Werte der beiden Punkte bestimmen läßt:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Zeichnet man das Steigungsdreieck zwischen zwei beliebigen Punkten einer Geraden ein, erkennt man, dass dabei auch ein rechtwinklges Dreieck entsteht, dessen Katheten gleich den Differenzen der y Koordinaten und den Differenzen der x Koordinaten der beiden Punkte sind. Stellt sich dabei doch die Frage, was ist dann die Hypotenuse dieses Dreiecks.



Die Hypotenuse des Dreiecks ist der Abstand der beiden Punkte P_1 und P_2 voneinander.

Da man für zwei Punkte immer eine Gerade finden kann, die die beiden Punkte verbindet, kann man auf diese Weise auch immer den Abstand zweier Punkte im Koordinatensystem berechnen:

$$\text{Abstand } (P_1;P_2) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

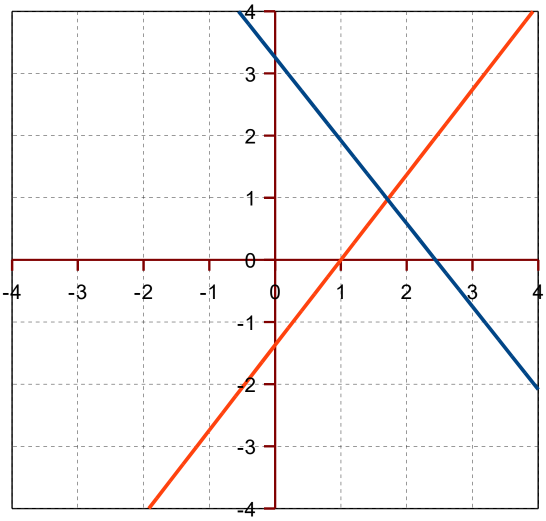
Diese Abstandformel wird für die unterschiedlichsten Aufgabenstellung benötigt und sollte sich eingeprägt werden.

16.11. Schnittpunkt zweier Geraden

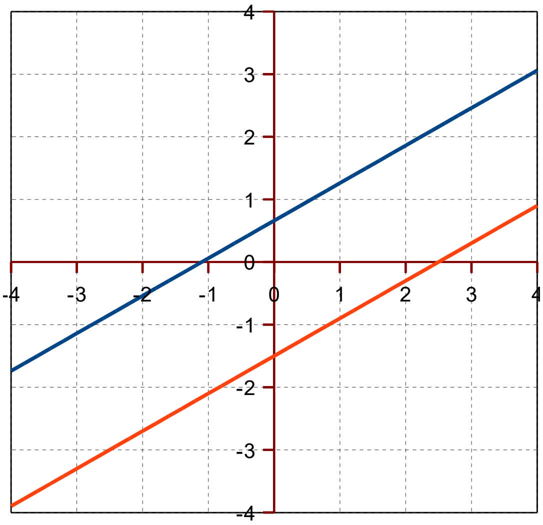
Eine der häufigsten Aufgaben ist die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden. Wenn man eine Geradengleichung als eine „Bedingung" interpretiert, kann man sagen, gesucht ist ein Punkt P(x/y) der beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt. Die markante Eigenschaft eines Schnittpunktes ist, dass er auf beiden Funktionen liegen muss. Für Schnittpunkte von Geraden heißt das, es kann bei zwei Geraden einen Schnittpunkt geben, keinen Schnittpunkt geben oder unendlich viele Schnittpunkte. Die Berechnung solcher Schnittpunkte wird im Kapitel „Gleichungssysteme" behandelt, hier soll es um die graphische Bestimmung solcher Schnittpunkte gehen, bzw. welche Eingenschaften führen zu den drei genannten Möglichkeiten bei der Bestimmung von Schnittpunkten.

1. Fall: Ein Schnittpunkt

Der allgemeine Fall von zwei Geraden ist, dass die beiden Geraden einen Schnittpunkt besitzen. dazu zeichnet man die Funktionsbilder der beiden Geradengleichungen in ein Koordinatensystem und liest die Koordinaten des Punktes ab, in dem sich beide Geraden kreuzen.



2. Fall: Kein Schnittpunkt



Der Fall, dass zwei Geraden keinen Schnittpunkt besitzen tritt immer dann ein, wenn die beiden Geraden parallel sind. Weiter oben wurde bereits angegeben, dass parallele Geraden den gleichen Anstieg besitzen. Deshalb kann man diesen Fall an folgender Eigenschaft erkennen:

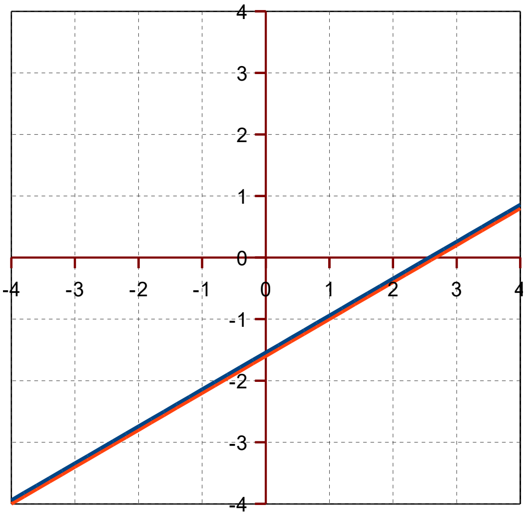
Funktionsgleichungen von parallelen Geraden besitzen das gleiche m, aber verschiedene Werte b.

3. Fall: Unendlich viele Schnittpunkte

Unendlich viele Schnittpunkte kann es nur geben, wenn es sich um zwei Geraden handelt, die das gleiche Kurvenbild besitzen, also identisch sind.

Funktionsgleichungen von identischen Geraden besitzen das gleiche m und das gleiche b

In diesen Fällen ist die gesamte Gerade Lösungsmenge.



© Dipl.-Math. Armin Richter

17. Lineare Gleichungssysteme

Zunächst soll mit der Lösung einer Gleichung durch Benutzen einer Wertetabelle begonnen werden. In diesem Stadium gibt es noch keine Rechnungen, sondern nur das Einsetzen von Werten in Termen. Betrachtet man die Lösung der Gleichung 3x – 5 = 10 und erstellt für die Gleichung eine Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	**5**
3x – 5	-5	-2	1	4	7	**10**
10	10	10	10	10	10	**10**

Setzt man in den Term 3x – 5 den Wert 5 ein, erhält man den Termwert 10. Genau diesen Wert soll man erreichen, da auf der rechten Seite des Gleichheitszeichen eine 10 steht. Damit löst der Wert x = 5 die Gleichung.

Etwas aufwendiger wird das Ganze, wenn auf der rechten Seite auch ein Termausdruck steht 3x – 5 = – 2 x + 10. In diesem Fall ist die dritte Zeile der Tabelle mit dem zweiten Termausdruck zu bestücken. Daran erkennt man schon ein gewisses System: In der zweiten Zeile steht der linke Termausdruck und in der dritten Zeile steht der rechte Termausdruck.

x	0	1	2	**3**	4	5
3x – 5	-5	-2	1	**4**	7	10
-2x + 10	10	8	6	**4**	2	0

In diesem Fall ist der Wert x = 4 derjenige, der die beiden Termausdrücke links und rechts des Gleichheitszeichens zu einem gleichen Ergebnis führt. Der Wert x = 4 löst diese Gleichung. Es hat sich gezeigt, dass es Berechnen der Lösung nicht sehr geschickt ist, die beiden Ausdrücke 3x – 5 und – 2 x + 10 zu berechnen, um zu sehen, wann denn der gleiche x – Wert zum gleichen Ergebnis führt, sondern man sortiert die Gleichung um, so dass auf das einen Seite alle Ausdrücke mit x stehen und auf der anderen Seite alle Ausdrücke ohne x. Das führt zum Ausdruck 5x = 15, bei dem wieder, wie im ersten Beispiel auf einer Seite nur eine konstante Zahl steht.
Um auch in diesen Fällen die aufwendige Tabellenberechnung zu vermeiden, hat sich gezeigt, dass man mit Division durch 5 schneller zum richtigen Ergebnis gelangt.

Im vergangenen Kapitel wurde Terme behandelt, die zwei Variable besitzen, nämlich x und y. Als lineare Funktionen haben die Ausdrücke immer die Form y = . Man erhält dann sowohl **für jeden x Wert** einen y Wert, als auch für **jeden y Wert** einen x Wert. Zeichnet man die zusammengehörigen Paare in eine Koordinatensystem ein, ergibt sich der Graph der linearen Funktion. Betrachtet man Ausdrücke mit zwei variablen etwas allgemeiner, dann entstehen Ausdrücke der Form 3x + 7y = 5 . Das ist **eine Gleichung mit zwei Variablen**. Eine solche Gleichung besitzt **keine Lösung**, sondern es existieren unendlich viele Paare (x;y) für die diese Gleichung richtig ist. Damit ist eine solche Gleichung auch nicht lösbar. In der Mathematik gilt folgender Grundsatz:

Mit einer Gleichung lässt sich nur eine Variable bestimmen.

Für zwei Variable lässt sich dieser Grundsatz umformulieren:

Will man zwei Variable bestimmen, benötigt man zwei Gleichungen.

Geht es darum, Lösungen zu finden, die mehrere Gleichungen gleichzeitig erfüllen, spricht man von einem Gleichungssystem. Um also wirklich Gleichungen mit zwei Variablen lösen zu können benötigt man zwei Gleichungen. Deshalb benötigt man für eine Lösung außer $3x + 7y = 5$ eine zweite Gleichung z.B $4x – 2y = 17$. Dann löst man das **Gleichungssystem**. Das kuriose daran ist, dass man genau das nicht kann, sondern man kann nur **eine Gleichung mit einer Variablen** lösen. Wie kommt man aus dieser Zwickmühle wieder heraus:

Man formt die
zwei Gleichungen mit zwei Variablen
um in
eine Gleichung mit einer Variablen.

Diese Umformung ist es, die man als Lösen eines Gleichungssystems bezeichnet. Was bei diesen Umformungen erlaubt ist, wird später gezeigt.

17.1. Lösen eines Gleichungssystems

Was ist eigentlich das Lösen eines Gleichungssystems. Dazu sollen wieder die beiden Gleichungen $3x + 7y = 5$ und $4x – 2y = 17$ betrachtet werden. Bisher bekannt ist aus dem vorherigen Kapitel eine Darstellung einer Gleichung, bei der auf einer Seite nur ein y steht und der Rest auch der anderen Seite des Gleichheitszeichens. Wie jede normale Gleichung lassen sich auch diese beiden nach x oder y auflösen, wobei die zweite Variable mit auf die gegenüberliegende Seite des Gleichheitszeichens kommt. In Anlehnung an das Kapitel 16 sollen beide Gleichungen nach y aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 3\cdot x+7\cdot y&=5 \\ 7\cdot y&=5-3\cdot x \\ y&=\frac{5}{7}-\frac{3}{7}\cdot x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4\cdot x-2\cdot y&=17 \\ -2\cdot y&=17-4\cdot x \\ y&=-\frac{17}{2}+2\cdot x \end{aligned}$$

Jede einzelne Gleichung lässt sich umformen in die Form y = … . Eine solche Form entspricht einer linearen Funktion

Jede lineare Gleichung mit zwei Variablen lässt sich umformen in die Darstellung einer linearen Funktion

Die Lösung eines Gleichungssystem bedeutet, man sucht ein Wertepaar (x ;y), so dass mit diesem Wertepaar beide Gleichungen richtig sind. Es gibt also einen Punkt (x;y), der auf der ersten geraden liegt und dieser Punkt liegt auch noch auf der zweiten Geraden. Einen solchen Punkt, der auf zwei Funktionen gleichzeitig liegt, nennt man **Schnittpunkt**. daraus folgt dann anschaulich:

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems ist die Suche nach dem Schnittpunkt von zwei linearen Funktionen.

Genau wie bei einfachen Gleichungen kann es eine Lösung geben, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Das ist bereits bei einfachen Gleichungen möglich:

$3x + 7 = 5x - 2$ besitzt genau eine Lösung
$3x + 7 = 3x - 4$ besitzt keine Lösung
$3x + 7 = 3x + 7$ besitzt unendlich viele Lösung

In der graphischen Interpretation bedeutet das, es gibt einen Schnittpunkt, oder keinen Schnittpunkt oder unendlich viele Schnittpunkte, was auch immer das heißen mag.

17.2. Lösungswege für lineare Gleichungssysteme

Als nächstes soll beschrieben werden, wie solche Gleichungssysteme gelöst werden. Es wurde bereits davon gesprochen, dass man Gleichungssystem so nicht lösen kann, sondern dass man sie zu eine Gleichungen mit einer Variablen umwandeln muss. Die Lösungswege beschreiben genau die möglichen Weg der Umwandlung. Die eigentliche Lösung folgt dann wie bei einfachen Gleichungen.
Als Musterbeispiel, die möglichen Lösungswege kennenzulernen soll folgendes Beispiel dienen:

$$\begin{aligned} 7x - 2y &= 4 \\ 3x + y &= 11 \end{aligned}$$

17.2.1 Additionsverfahren

Ziel des Additionsverfahren ist es, durch Addition der beiden Gleichungen eine Variable verschwinden zu lassen, indem durch die Addition der Koeffizienten vor der Variablen eine Null entsteht. Das setzt voraus, dass

- die Zahlen vor der ausgewählten Variablen gleich sind
- die Vorzeichen aber unterschiedlich

Nur in diesem Fall würde die Variable verschwinden. Im angegebenen Beispiel erreicht man das nicht. Aber es helfen die Umrechnungsmöglichkeiten, die bei Gleichungen generell gelten.

> Man darf jede Gleichung mit einem (anderen) Faktor multiplizieren, wenn man beide Seiten der Gleichung mit dem Faktor multipliziert.

Das hilft weiter, wenn man die zweite Gleichung mit dem Faktor 2 multipliziert:

$$\begin{aligned} 7x - 2y &= 4 \\ 6x + 2y &= 22 \end{aligned}$$

Damit wurde erreicht, dass die Zahlen vor dem y gleich sind, aber in den beiden Gleichungen unterschiedliche Vorzeichen besitzen. Jetzt werden die beiden Gleichungen einfach addiert, wie man das bei der Addition von Zahlen macht. Dabei ist aus dem Kapitel Terme zu berücksichtigen, dass nur Zahlen mit gleichen Buchstaben addiert werden dürfen:

$$\begin{aligned} 7x - 2y &= 4 \\ \underline{6x + 2y} &\underline{= 22} \\ 13x \quad &= 26 \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist eine Gleichung mit einer Variablen : $13x = 26$
Diese Gleichung ist nach den Regeln für Gleichungen zu lösen. In diesem Fall erhält man $x = 2$. Die Lösung eines Gleichungssystems ist aber ein Zahlenpaar (x ;y). Der ersten Wert für dieses Paar ist $x = 2$. Wie bekommt man das zugehörige y heraus. Dazu erinnert man sich, dass das Lösungspaar beide Gleichungen erfüllen muss. Setzt

man dieses x in eine Gleichung ein, dann muss die Gleichung erfüllt sein. das y ist noch unbekannt und bleibt deshalb als Unbekannte in der Gleichung stehen. Hier soll dazu die erste Gleichung benutzt werden.

$$7 \cdot \mathbf{2} - 2y = 4$$

Durch dieses Einsetzen gibt es wieder **eine Gleichung mit einer Variablen** . Die wieder ohne Probleme nach den Regeln zur Berechnung von Gleichungen gelöst werden kann. Es ist kein Gleichungssystem mehr. Als Lösung ergibt sich y = 5. Erst jetzt ist die Lösung des Gleichungssystems fertig:

Das Gleichungssystem $\begin{matrix} 7x - 2y = 4 \\ 6x + 2y = 22 \end{matrix}$ besitzt die Lösung (2 ; 5) .

Die Lösung ist immer ein Zahlenpaar, so dass das nicht zwei Lösungen sind, sondern nur eine Lösung.

17.2.2 Gleichsetzungsverfahren

Das Ziel des Gleichsetzungsverfahren besteht darin, dass man beide Gleichungen nach der gleichen Variablen auflöst. Das bedeutet, dass bei beiden Gleichungen die gleiche Variable als einzige auf einer Seite des Gleichheitszeichen steht. Gleiche konstante Zahlen auf einer Seite des Gleichungssystems löst das Problem nicht.

$$\begin{matrix} 7x - 2y = 4 \\ 6x + 2y = 8 \end{matrix}$$

Man könnte die erste Zeile mit 2 multiplizieren und erhält dann

$$\begin{matrix} 14x - 4y = 8 \\ 6x + 2y = 8 \end{matrix}$$

Jetzt stehen auf der rechten Seite des Gleichungssystems beide Male die 8 und man könnte die beiden Gleichungen gleich setzen.

$$14x - 4y = 6x + 2y$$

Rein mathematisch gesehen ist die Rechnung korrekt, nur das Ergebnis ist **1 Gleichung** mit **2 Variablen**. Eine solche Gleichung ist nicht lösbar, da sie eine Funktion bleibt und sich jedem x ein y zuordnen lässt.
Der Weg muss anders gehen. In beiden Gleichungen tritt der Ausdruck 2y auf. Allerdings ist er in der einen Gleichung mit einem Plus und in der anderen Gleichung mit einem Minus vorhanden. Beide Gleichungen werden jetzt so umgestellt, dass bei jeder Gleichung auf einer Seite +2y steht.

$$\begin{matrix} 7x - 4 = 2y \\ 8 - 6x = 2y \end{matrix}$$

Jetzt sind die rechten Seiten der beiden Gleichungen ebenfalls gleich, aber auf dieser Seite steht ein Ausdruck mit einer Variablen. Wenn man jetzt die beiden Gleichungen gleich setzt, entsteht 1 Gleichung mit 1 Variablen und eine solche Gleichung ist lösbar.

$$7x - 4 = 8 - 6x$$

Man kann diese Gleichung so umstellen, dass auf einer Seite nur Ausdrücke mit x stehen und auf der anderen Seite nur konstante Zahlen. Hat man diesen Wert berechnet setzt man die Zahl für x in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen ein und bestimmt den zugehörigen anderen Wert der Lösung. Auch hier muss die Lösung

© Dipl.-Math. Armin Richter

ein Zahlenpaar (x,y) sein.

17.2.3 Einsetzungsverfahren

Das dritte mögliche Lösungsverfahren wird weniger benutzt als die anderen beiden, kann aber in bestimmten Fällen auch ganz nützlich sein, um aufwendige Rechnungen zu vermeiden. In diesem Fall wird nur eine Gleichung nach einer Variablen aufgelöst und dieser Ausdruck an Stelle der Variablen in der anderen Gleichung eingesetzt. dazu soll wieder das erste Beispiel benutzt werden.

$$\begin{aligned} 7x-2y&=4 \\ 6x+2y&=22 \end{aligned}$$

Da sich die zweite Gleichung ohne Brüche durch 2 dividieren lässt wird diese zweite Gleichung zunächst durch 2 geteilt.

$$\begin{aligned} &7x-2y=4 \\ &6x+2y=22 \quad |:2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &7x-2y=4 \\ &3x+y=11 \end{aligned}$$

Jetzt lässt sich die zweite Gleichung so umstellen, dass auf einer Seite des Gleichheitszeichens nur das y steht.

$$\begin{aligned} &7x-2y=4 \\ &y=11-3x \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck für y wird jetzt an Stelle des y in die erste Gleichung eingesetzt. Da es sich bei dem Ausdruck um eine Summe handelt und in der ersten Gleichung das y mit der 2 über eine Multiplikation verbunden ist, muss der Ausdruck im Klammern stehen.

$$7x-2\cdot(11-3x)=4$$

Damit ist wieder 1 Gleichung mit 1 Variablen erreicht und diese Gleichung lässt sich lösen.

$$7x-22+6x=4$$

Beim Auflösen der Klammer ist auf die Vorzeichenregel zu achten und der vor der Klammer stehende Faktor mit allen Zahlen in der Klammer zu multiplizieren. Hat man dann den Wert für x bestimmt, erhält man den zugehörigen y Wert wieder durch Einsetzen in eine der beiden Ausgangsgleichungen.