13. Funktionen

Der Begriff der Funktion ist einer der zentralen Begriffe in der Mathematik. Er ist abgeleitet von einer Abbildung, bei der die Elemente der einen Menge über eine Abbildungsvorschrift auf Elemente einer anderen Menge abgebildet werden.

13.1. Abbildungen

Eine Abbildung ist zunächst ganz allgemein jede Vorschrift f , wie die Elemente einer Menge D auf die Elemente einer anderen Menge W abgebildet (zugeordnet) werden. Für die Abbildung $f: D \to W$ und das Element $y \in W$ des Bildbereichs kann man die Menge

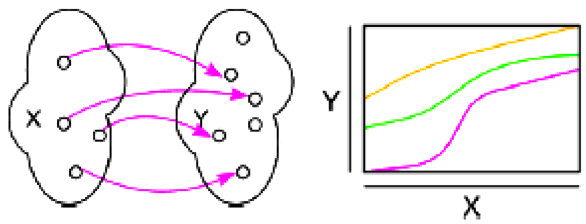
$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in D \mid f(x) = y\}$$

das sind alle die Elemente $x \in D$, die durch die Abbildung f auf y abgebildet werden.
Dabei interessieren folgende Eigenschaften:
Gibt es zu $y \in W$.

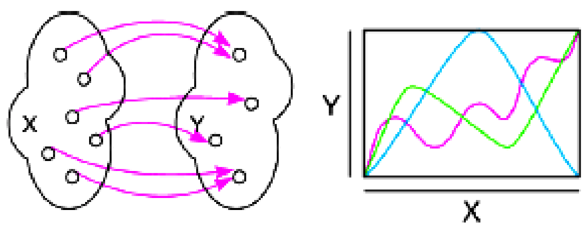
- höchstens ein $x \in D$ mit $f(x) = y$
- mindestens ein $x \in D$ mit $f(x) = y$
- genau ein $x \in D$ mit $f(x) = y$

Abbildungen, die diese besonderen Eigenschaften erfülle, erhalten besondere Namen,
Sei $f: D \to W$ eine Abbildung, dann heißt diese Abbildung f

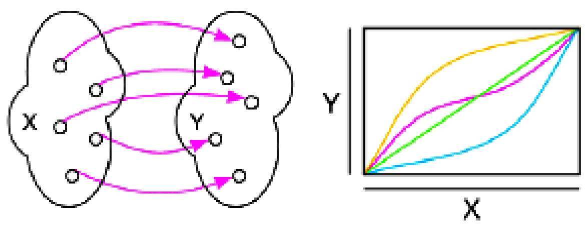
1. **injektiv**, wenn für alle $x,y \in D$ gilt: "f(x)=f(y) ? x=y", wenn die Bilder gleich sind, sind dann auch die Urbilder gleich? Es dürfen keine zwei Urbilder aus D das gleiche Bild in W besitzen.
2. **surjektiv**, wenn $f(D) = W$ gilt; jedes Element des Bildbereichs hat mindestens ein Urbild, es können zwei oder mehr Urbilder zu einem Bild existieren, aber jedes Element im Bildbereich muss abgedeckt sein.
3. **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.



Injektiv, da jedes Element des Bildbereichs **höchstens ein Urbild** hat.



Surjektiv, da jedes Element der Bildbereichs **mindestens ein Urbild** hat.



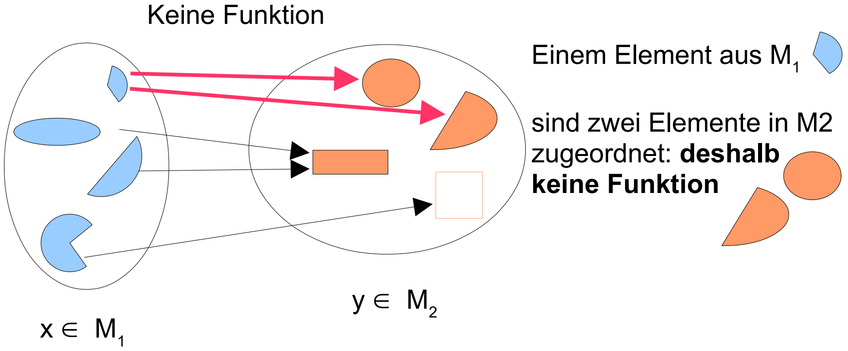
Bijektiv, da sie injektiv und surjektiv ist, also jedes Element des Bildbereichs **genau ein Urbild** hat

13.2. Funktionen

> Eine Funktion ist eine eindeutige Abbildung einer Menge auf eine andere, d.h. eine Menge geordneter Paare [x,y] mit der Eigenschaft: jedem x ist **g e n a u   e i n** y zugeordnet

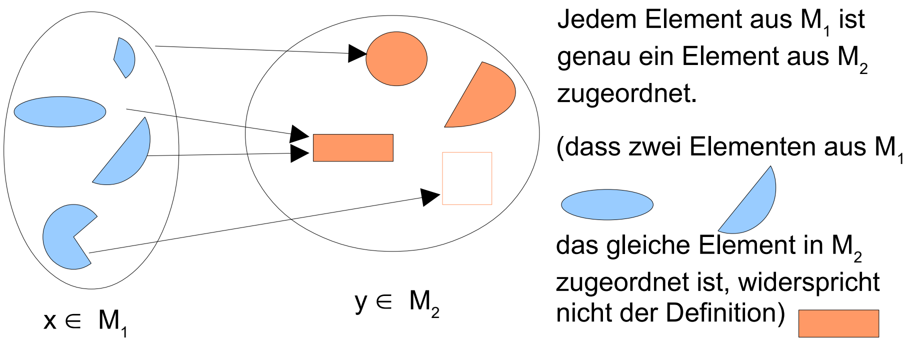
Die Menge M_1 aller **Urbilder** x wird bei Funktionen **Definitionsbereich** genannt.
Die Menge M_2 aller **Bilder** y wird bei Funktionen **Wertebereich** genannt.

Keine Funktion



Abbildungen dieser Art sind keine Funktion, da es zu einem Bild mehrere Urbilder gibt. Das ist nicht zulässig.

Funktion



Abbildungen dieser Art sind Funktionen. Es ist zulässig, dass zu einem Bild mehrere Urbilder gehören, aber nicht, dass zu einem Urbild mehrere Bilder gehören. In diesem Zusammenhang soll nicht auf lineare oder quadratische Funktionen eingegangen werden, sondern nur auf reelle Elementarfunktionen. Für die Darstellung von Funktionen sind zwei Mengen von grundlegender Bedeutung:

13.2.1 Definitionsbereich

Der Definitionsbereich ist die die Menge, **die** auf eine andere Menge **abgebildet werden soll**. Diese Menge bezeichnet man auch als die **Urbilder** einer Funktion und wird in der Koordinatendarstellung als **x- Achse** dargestellt. Es sind die **unabhängigen Werte** einer Funktion. Der Definitionsbereich ist im allgemeinen die Menge aller reeller Zahlen. Von dieser Gesamtmenge können je nach Funktion einige einzelne, oder ganze Intervalle ausgeschlossen werden. Auszuschließen sind alle die x-Werte, für die der Funktionsausdruck einen nicht definierten Wert annimmt. Das können sehr unterschiedliche Bedingungen sein.

- Bei Quotienten von Funktionen sind alle die x-Werte auszuschließen, für die der

Nennerausdruck gleich Null wird, da in diesen Fällen der Wert des Quotienten nicht bestimmt werden kann.

- Bei Wurzelfunktionen sind alle Werte auszuschließen, bei der ein negativer Wurzelausdruck entsteht. Das müssen nicht notwendig alle negativen x -Werte sein. Für die Funktion $y = \sqrt{-x+3}$ sind z.B. alle x – Werte größer als 3 auszuschließen. Für die Funktion $y = \sqrt{5 - x^2}$ sind nur Werte zwischen $-5 \le x \le 5$ erlaubt.
- Außerdem ist zu beachten, ob die Grenzen des Definitionsbereichs mit zum Definitionsbereich gehören, oder nicht. Während bei $y = \sqrt{x}$ der Definitionsbereich $0 \le x < \infty$ ist, gilt für die Funktion $y = \ln x$ als Definitionsbereich $0 < x < \infty$, da diese Funktion für $x = 0$ nicht definiert ist.

Für die Bestimmung des Definitionsbereiches ist jede Funktion individuell zu untersuchen, und es sind alle nicht definierten Ausdrücke aus dem Definitionsbereich auszuschließen. Bei Funktionen, die aus mehreren Ausdrücken zusammengesetzt sind, können verschiedene Kriterien zu berücksichtigen sein.

13.2.2 Wertebereich oder Wertevorrat

Der Wertebereich ist die Menge, **auf** die **abgebildet wird**. Diese Menge bezeichnet man als die **Bilder** der Funktion und wird im Koordinatensystem als die **y-Achse** dargestellt. Diese Menge sind die **abhängigen Werte** der Funktion. Es hängt von der Funktion ab, ob auf ein Element der Bildmenge eine Abbildung erfolgt, oder nicht. Der Wertebereich einer Funktion kann nur bestimmt werden, es sind keine Elemente auszuschließen, da die Annahme der Werte der Bildmenge von der Funktion abhängt und sich aus der Funktion **ergibt**. Die Funktion einer Geraden bildet die gesamte x-Achse auf die die gesamte y-Achse ab, während eine quadratische Funktion die gesamte x-Achse auf den positiven Teil der y-Achse abbildet, die sin – Funktion bildet die gesamte x-Achse auf das Intervall $-1 \le y \le 1$ ab.

Beim Arbeiten mit Koordinatensystemen gibt man den Definitionsbereich und die Wertemenge mit Intervallen an. Dabei bedeuten eckige Klammern, dass die Intervallgrenze dazugehört und runde Klammern, dass die Intervallgrenze nicht dazu gehört. Mitunter werden die eckigen Klammern auch nach außen gedreht, um zu symbolisieren, dass die Grenze nicht dazugehört. Intervallgrenzen, die das Symbol ∞ enthalten sind grundsätzlich mit runden Klammern oder dem '<' – Zeichen anzugeben. Ein Gleicheitszeichen oder eine eckige Klammer sind nicht zulässig.

$[\,4\,;\,8\,]$ ist das abgeschlossene Intervall von 4 bis 8, d.h. $\{x \mid 4 \le x \le 8\}$
$(\,4\,;\,8\,)$ ist das offene Intervall von 4 bis 8, d.h. $\{x \mid 4 < x \le 8\}$
$[\,4\,;\,8\,)$ ist das halboffene Intervall von 4 bis 8, d.h. $\{x \mid 4 \le x < 8\}$
Das Zeichen ∞ bedeutet „Unendlich“ bzw. – ∞ bedeutet – Unendlich.
$D = \{x \mid x \ge 5\}$ kann man auch damit auch so angeben: $D = [5\,;\,+\infty)$

Statt $(\,4\,;\,8\,)$ kann man also auch schreiben: $]\,4\,;\,8\,[$
Wichtig ist dabei, dass die Spitzen der eckigen Klammern nach außen zeigen.

Die Definition des Funktionsbegriffes ist dafür verantwortlich, dass es nur einen Schnittpunkt mit der y-Achse gibt, aber mehrere Schnittpunkte mit der x-Achse geben kann.

13.2.3 Nullstellen von Funktionen

Für das Zeichnen von Funktionen sind markante Punkte immer ein wichtiger Anhaltspunkt, die auch im Kurvenbild sichtbar gemacht werden sollten. Zu diesen markanten Punkte gehören als erste die Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems. Während der Schnittpunkt mit der y-Achse leicht zu bestimmen ist, es gibt nur einen, indem man in den Funktionsausdruck x = 0 einsetzt sind die Schnittpunkte mit der x-Achse nicht so einfach zu bestimmen. Erstens kann es mehrere Schnittpunkte geben und dann kann das Auflösen einer Funktionsgleichung nach x manuell nicht lösbar sein, oder erheblich Probleme aufwerfen. Außerdem benötigt man die Auflösung einer Funktionsgleichung nach x auch für das bestimmen der Extremwerte und Wendepunkte, die Bestandteil der Differenzialrechnung sind. Die Aufgabenstellungen lauten also:

Gesucht sind die x-Werte, für die y = 0 ist, dh 0 = f(x) ist nach x aufzulösen.

- Für **lineare Funktionen** $y = mx + b$ ist diese Aufgabe ohne Probleme lösbar. Ein Umstellen dieser Funktionsgleichung nach x ist immer möglich. Es gibt immer eine Lösung und nur eine.
- Für **quadratische Funktionen** $y = ax^2 + bx + c$ ist die Aufgabe auch lösbar, Dank der p-q Formel. Allerdings sind hier schon Unterscheidungen zu machen. Es besteht die Möglichkeit, dass es eine Lösung gibt, dass es zwei Lösungen gibt, oder dass es keine Lösung gibt.

Für Funktionen höher als 2. Grades ist eine Lösung über einen Lösungsalgorithmus schon nicht mehr möglich. Wenn es auch Formeln gibt, mit denen man die Lösung einer Funktionsgleichung 3. Grades auf die Lösung einer Gleichung zweiten Grades zurückführen kann, sind diese Formeln schwer handhabbar. Hier helfen nur spezielle numerische verfahren, die mittlerweile in den GTR integriert sind. Deshalb soll es in diesem Kapitel nicht so darauf ankommen, wie man die Nullstellen berechnet, sondern welche Arten von Nullstellen es gibt. Die Art einer Nullstelle hat Einfluss auf die Darstellung der Funktion im Koordinatensystem.

13.2.3.1 Satz des Vieta

Ein Mann, der sich als erster darüber Gedanken gemacht hat war Francois Viete (1540 – 1603), der quadratische Funktionen im Zusammenhang mit ihren Nullstellen untersucht hat. Dazu soll als erstes eine einfache quadratische Funktion untersucht werden:

$$y = x^2 + 7x + 10$$

Diese Funktion besitzt zwei Nullstellen: $x_1 = -2$ und $x_2 = -5$.

Jetzt hat dieser Mann folgendes festgestellt: $-2 + (-5) = -7$

und $(-2) \cdot (-5) = 10$

allgemein gesprochen: Die Summe der beiden Nullstelle ergibt den negativen Wert der Zahl von dem x und das Produkt der beiden Nullstellen ergibt den Wert des absoluten Gliedes. Diese Beziehung gilt für Funktionen 2. Grades ganz allgemein:

$$y = x^2 + px + q$$
$$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Deshalb wird ihm zu Ehren diese Beziehung als Satz des Vieta bezeichnet.

13.2.3.2 Mehrfachnullstellen

Bemerkenswert ist außerdem, dass eine Funktion 2. Grades nie mehr als zwei Nullstellen haben kann. Aber was wird mit obigen Beziehung, wenn es nur eine Nullstelle oder gar keine gibt. Gilt dann dieser Satz auch noch, oder, wann gilt er. Dazu soll ein weiteres Beispiel betrachtet werden:

$$y = x^2 - 6x + 9$$

Durch Anwenden der p-q-Formel erhält man die Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = 3$. Dabei bleibt festzuhalten, dass es wieder zwei Lösungen gibt, die beiden Lösungen haben nur den gleichen Wert. Aus diesem Grund spricht man hier von einer Doppellösung. Wenn man die beiden Lösungen in den Satz von Vieta einsetzt, stellt man fest, er gilt auch in diesem Fall. Was ist an dieser Doppelnullstelle anders, als an den beiden einzelnen Nullstellen.

Was ist eine Nullstelle ? An einer Nullstelle schneidet die Funktion die x-Achse und das Vorzeichen des Funktionswertes wechselt von + nach – oder von – nach +.

Bei der ersten Funktion $y = x^2 + 7x + 10$ existieren zwei Nullstellen, $x_1 = -2$ und $x_2 = -5$. Betrachte man x-Werte, die jeweils rechts und links von einer Nullstelle liegen, z.B. $x = -3$ und $x = -1$, so stellt man fest: $f(-3) = (-3)^2 + 7(-3) + 10 = -3$ und $f(-1) = (-1)^2 + 7(-1) + 10 = 4$. Das Vorzeichen wechselt an der Nullstelle –2 von negativ nach positiv.

Wie sieht das bei der zweiten Funktion $y = x^2 - 6x + 9$ aus. Die doppelte Nullstelle dieser Funktion war $x = 3$. dazu sollen die Funktionswerte an den Stellen $x = 2$ und $x = 4$ betrachtet werden.

$$f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 9 = 1; \qquad f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 9 = 1$$

Obwohl $x = 3$ eine Nullstelle ist, findet kein Vorzeichenwechsel statt. Vom Kurvenbild gibt es da einen wesentlichen Unterschied: Bei dieser Funktion wird die x-Achse nicht geschnitten, sondern nur berührt.

Bei dreifachen Nullstellen, wie z.B. $y = x^3$ wird die x-Achse wieder geschnitten und bei vier-fachen Nullstellen, wie $y = x^4$ wird die x-Achse wieder nur berührt.

Satz

Ist die Vielfachheit einer Nullstelle ungerade, dann wird die x-Achse geschnitten, ist die Vielfachheit einer Nullstelle gerade, wird die x-Achse nur berührt.

Gleichzeitig kann man feststellen, dass die Vielfachheit als Potenz an einer x-Potenz angegeben ist. Die Höhe der Potenz gibt die Vielfachheit der Nullstelle an. Für die quadratische Funktion mit doppelter Nullstelle bedeutet das, man kann diese Funktion auch in der Form schreiben:

$$y = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

In dieser Form erkennt man sehr deutlich die Nullstelle $x = 3$ und die Vielfachheit 2.

13.2.3.3 Komplexe Nullstellen

Was ist aber mit Funktionen, die keine Nullstellen besitzen. Dazu soll die Funktionsgleichung $y = x^2 + 2x + 5$ betrachtet werden. Die Anwendung der p-q-Formel liefert hier den Ausdruck

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm \sqrt{-4}$$

Diese Gleichung besitzt keine Lösung. Die Aussage ist nicht ganz richtig. Diese Gleichung besitzt keine Lösung innerhalb der reellen Zahlen. Es gibt aber eine Lösung innerhalb der komplexen Zahlen. Diese sind nicht Bestandteil der schulischen Ausbildung. Diese Nullstellen können auch nicht im Kurvenbild sichtbar gemacht werden.

Kleiner Ausflug zu komplexen Zahlen für Interessenten

Aus der Nullstellenberechnung von quadratischen Funktionen mittels der p-q-Formel ist bekannt, dass man dort drei Möglichkeiten unterscheiden muss:

- zwei Schnittstellen mit der x-Achse
- eine Berührungsstelle mit der x-Achse (= Scheitel der Parabel)
- keine Nullstelle.

hier interessiert der Teil „keine Nullstelle“.
In dem Fall, dass keine Nullstelle auftritt, ist der Wert unter der Wurzel negativ, da man aus negativen Zahlen keine Wurzel ziehen kann.
Beispiel:
$y = x^2 + 2x + 5$

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -1 \pm \sqrt{1-5} \\ &= -1 \pm \sqrt{-4} \end{aligned}$$

Alles wäre in Ordnung, wenn nur das – Zeichen unter der Wurzel nicht wäre. Deshalb nutzt man hier das Wurzelgesetz und zerlegt den Ausdruck unter der Wurzel in ein Produkt, bei dem ein Faktor –1 ist. Diesen Faktor lässt man stehen und behandelt ihn wie einen Parameter:

Für den Faktor $\sqrt{-1}$ schreibt man abkürzend i , so dass man als Nullstellen für die quadratische Funktion die beiden komplexen Zahlen

$$x_1 = -2 + 2\,i$$
$$x_2 = -2 - 2\,i$$

erhält. (Die Zahlen können nicht weiter vereinfacht werden und müssen so stehen bleiben.)

Schlussfolgerungen

- Treten bei einer ganzrationalen Funktion komplexe Zahlen als Nullstellen auf, dann treten sie immer paarweise auf, einmal mit positivem Vorzeichen vor dem i und einmal mit negativem Vorzeichen. Solche komplexe Zahlen nennt man **konjugiert komplex**
- multipliziert man zwei Linearfaktoren mit komplexen Nullstellen erhält man immer einen quadratischen Ausdruck mit reellen Zahlen

13.2.3.4 Nullstellenzerlegung eines Polynoms

Nun lag es natürlich nahe, solche Untersuchungen auch an Polynomen höheren Grades durchzuführen, um zu untersuchen, ob da ähnliche Beziehungen gelten.
Ein Polynom n-ten Grades hat folgendes Aussehen:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

Zu den Nullstellen einer solchen Funktion lassen sich folgende Aussagen treffen:

- Eine solche Funktion hat genau n Nullstellen,
- Diese Nullstellen müssen nicht alle reelle Zahlen sein, es können auch komplexe Zahlen auftreten.
- wenn komplexe Zahlen auftreten, dann immer paarweise als konjugiert komplexe Zahlen.
- Die reellen Werte sind die Schnittpunkte der Funktion mit der x-Achse, komplexe Werte können nicht dargestellt werden.

Kennt man alle Nullstellen einer solchen Funktion, dann kann man die Funktion in folgender Form darstellen:

$$y = a_n (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_{n-1})(x-x_n)$$

Dabei ist es möglich, dass einige Nullstellen mehrfach auftreten und dass einige Nullstellen komplexe Zahlen sind. Außerdem ist zu beachten, dass aus den Nullstellen heraus der Faktor vor der höchsten Potenz nicht bestimmbar ist und extra aufgeführt werden muss und dass in den folgenden Koeffizienten dieser Faktor a_n mit enthalten ist, da der Wert von a_n mit den Klammern multipliziert wird.
Daraus ergeben sich für die Koeffizienten a_k und die Nullstellen x_j interessante Zusammenhänge

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}\, x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

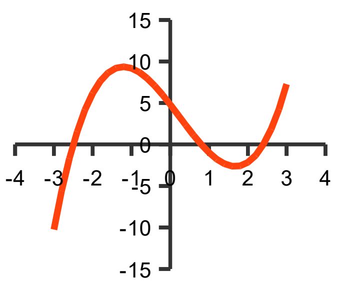
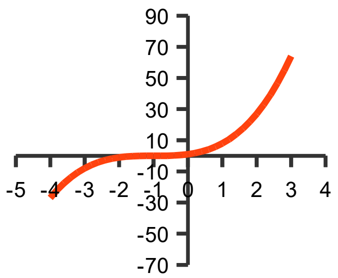
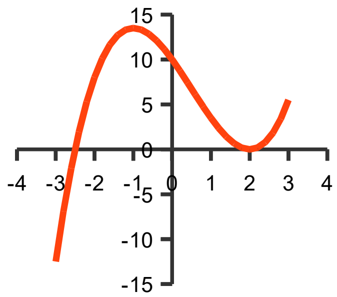
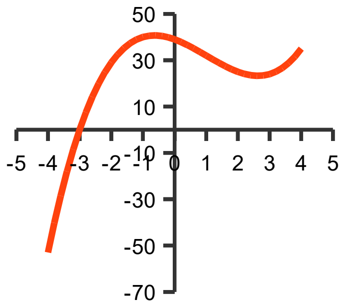
$$x_1x_2x_3x_4 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Diese Formeln werden als der erweiterte Vietasche Wurzelsatz bezeichnet.
Betrachtet man den Ausdruck für den Koeffizienten a_0, so läßt sich über die Nullstellen sagen:

- Wenn eine ganzzahlige Nullstelle x_0 einer solchen Funktion existiert, dann muss dieser Wert ein Teiler des Absolutgliedes a_0 sein.

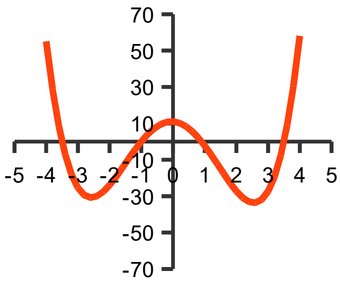
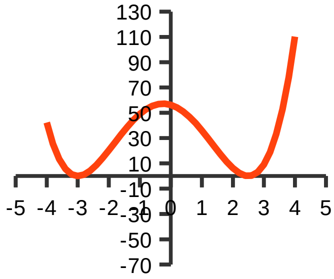
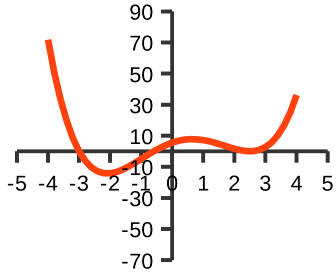
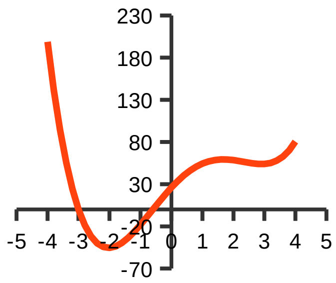
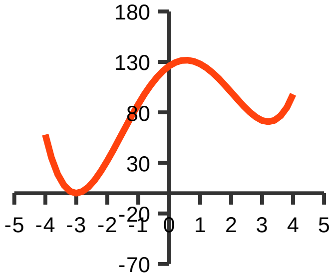
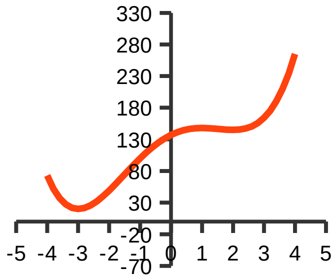
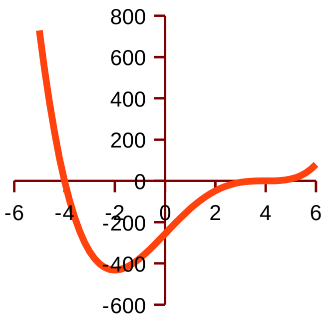
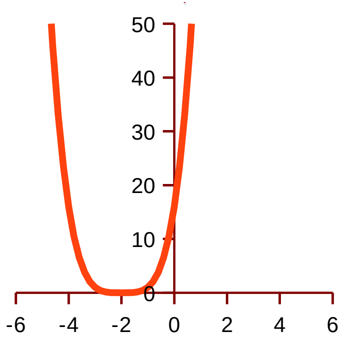
Die Möglichkeit der Faktorzerlegung einer ganzrationalen Funktion in Linearfaktoren ihrer Nullstellen bedeutet, dass bei einer Polynomdivision der Funktion durch den Linearfaktor (oder den quadratischen Faktor bei komplexen Nullstellen) die Division ohne Restpolynom aufgehen muss. Geht die Division nicht auf, liegt ein Rechenfehler vor, oder die Nullstelle stimmt nicht. Im folgenden sollen die Möglichkeiten von Nullstellen für Funktionen 3. und 4. Grades angegeben werden.

13.2.3.5 Ganz-rationale Funktionen 3. Grades

<table>
<tr><td>3 einfache Nullstellen
$y= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$</td><td>1 dreifache Nullstelle
(Stufenwendepunkt)
$y = (x-x_1)^3$</td><td>1 einfache reelle Nullstelle
1 doppelte reelle Nullstelle
$y = (x-x_1)\ (x-x_2)^2$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>1 einfache reelle Nullstelle
1 komplexe Nullstelle
$y = (x-x_1)(ax^2+bx+c)$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Andere Typen von Nullstellen sind nicht möglich. Mehr als drei Nullstellen kann es nicht geben.

13.2.3.6 Ganz-rationale Funktionen 4. Grades

4 einfache reelle Nullstellen $y=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$	2 doppelte reelle Nullstellen $y= (x-x_1)^2 (x-x_2)^2$	2 einfache reelle Nullstellen 1 doppelte reelle Nullstelle $y=(x-x_1) (x-x_2) (x-x_3)^2$
		
2 einfache reelle Nullstellen 1 doppelte komplexe Nullstelle $y=(x-x_1)(x-x_2)(ax^2+bx+c)$	1 doppelte reelle Nullstelle 1 doppelte komplexe Nullstelle $y=(x-x_1)^2(ax^2+bx+c)$	2 doppelte komplexe Nullstellen $y=(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)$
		
1 einfache reelle Nullstelle 1 dreifache reelle Nullstelle $y= (x-x_1)(x-x_2)^3$	1 vierfache Nullstelle $y = (x-x_1)^4$	
		

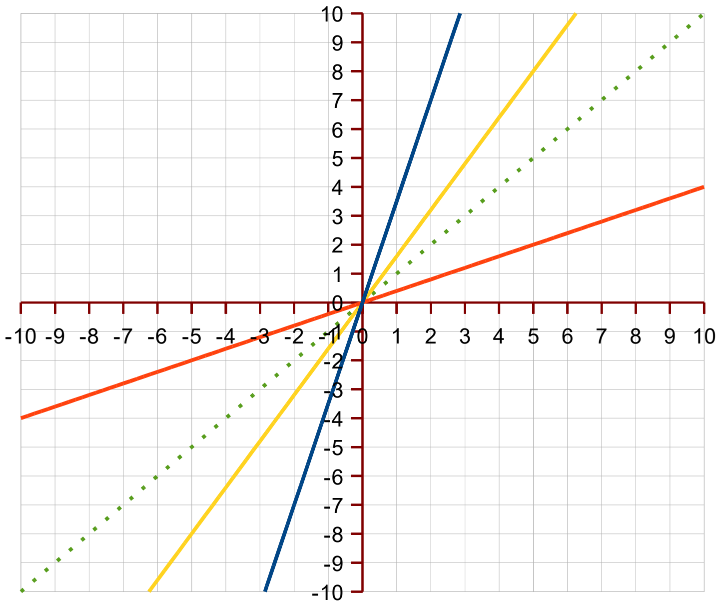
13.3. Proportionale Funktionen

Die einfachsten Funktionen sind proportionale Funktionen. Der Funktionsausdruck einer solchen Funktion lautet

$$\boxed{y = m\,x}$$

Solche Funktionen sollten aus Dreisatzrechnungen bekannt sein. Die Abbildungsvorschrift ist: Multipliziere alle Elemente des Definitionsbereiches mit einem konstanten Faktor m.

- m ist der Proportionalitätsfaktor, in den meisten Fällen ist dieses m eine positive Zahl, es sind aber auch negative Zahlen erlaubt.
- Das Kurvenbild einer proportionalen Funktion ist eine Gerade, die durch den Ursprung geht. Damit ist der Ursprung der einzig mögliche Schnittpunkt mit der x-Achse und der Schnittpunkt mit der y – Achse.
- Proportionale Funktionen sind durch einen weiteren Punkt, der nicht der Ursprung ist, eindeutig festgelegt. Damit kann die Funktionsgleichung eindeutig bestimmt werden und der Graf der Funktion eindeutig gezeichnet werden.



y = mx	
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$-\infty < y < +\infty$
Nullstellen	$x = 0$
Schnittpunkt y-Achse	$y = 0$

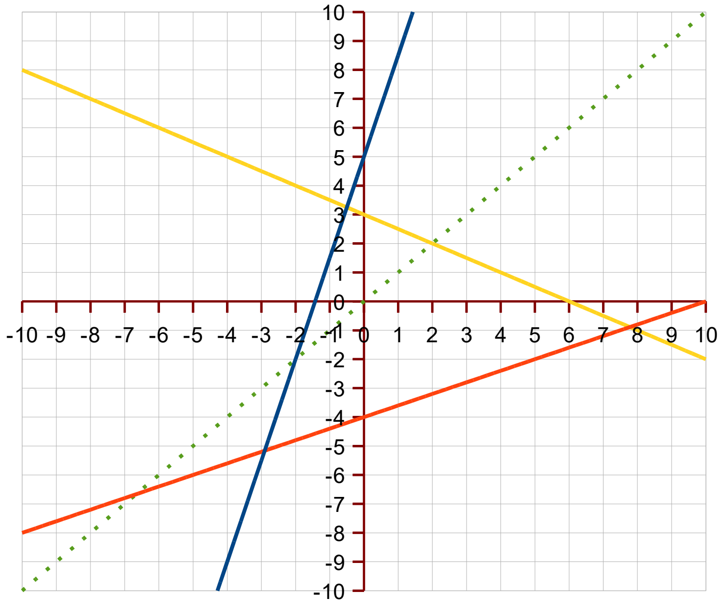
13.4. Lineare Funktionen

Den proportionalen Funktionen am nächsten sind die linearen Funktionen. Der Funktionsausdruck einer solchen Funktion lautet

$$\boxed{y = m\,x + b}$$

Lineare Funktionen sind wohl die am bekanntesten Funktionen, die sich auch sehr gut bearbeiten und untersuchen lassen. Die Abbildungsvorschrift ist: Multipliziere alle Elemente des Definitionsbereiches mit einem konstanten Faktor m und addiere eine für alle Elemente feste Zahl hinzu.

- m ist die Steigung der linearen Funktion, im Gegensatz zu proportionalen Funktionen kann das m auch als negative Zahl auftreten.
- b ist der Schnittpunkt mit der y-Achse
- Lineare Funktionen sind durch zwei Punkte oder einen Punkt und die Steigung eindeutig bestimmt. Damit lassen sich die Funktionsgleichung bestimmen und das Kurvenbild eindeutig zeichnen.

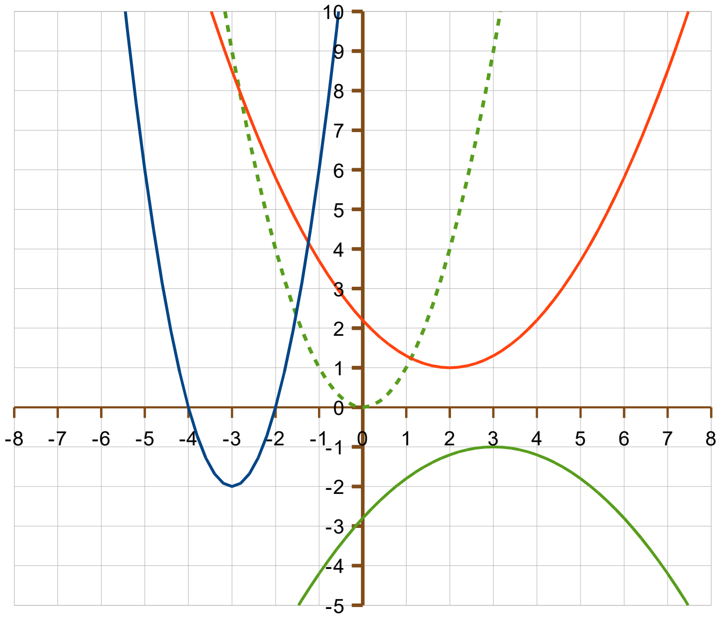


y = mx + b	
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$-\infty < y < +\infty$
Nullstellen	$x = -b / m$
Schnittpunkt y-Achse	$y = b$

13.5. Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen haben ihren Namen daher, dass die unabhängige Variable x als Potenz mit dem Exponenten 2 auftritt. Dabei ist es außerdem möglich, dass y zusätzlich in der ersten Potenz auftritt und ein absolutes Glied ohne die Variable auftreten kann. Damit hat der Funktionsausdruck ein weit größere Variabilität als der bei linearen Funktionen, was sich auch durch eine größere Vielfalt des Kurvenbildes ausdrückt.

$$\boxed{y = a\,x^2 + b\,x + c}$$



$y = ax^2 + bx + c$	
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$a > 0: \quad c-\frac{b^2}{4a} < y < +\infty$ $a < 0: \quad -\infty < y < c-\frac{b^2}{4a}$
Nullstellen	$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Schnittpunkt y-Achse	$y = c$
Scheitelpunkt	$S\left(\frac{-b}{2a};c-\frac{b^2}{4a}\right)$

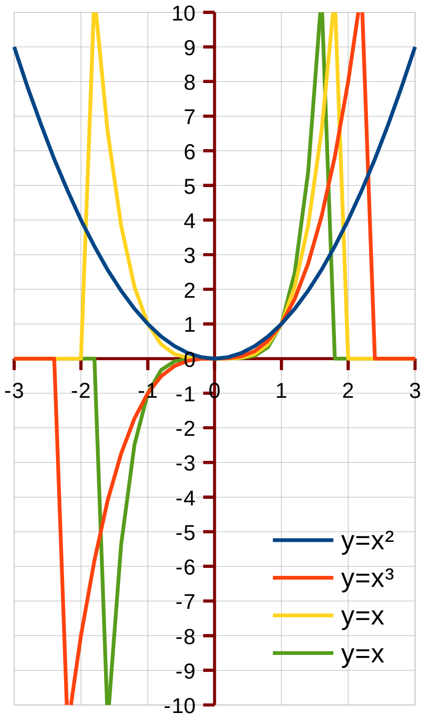
- Der Faktor a bezeichnet die Öffnung der Parabel
  $a > 0$: Parabel ist nach oben geöffnet
  $a < 0$: Parabel ist nach unten geöffnet
  $| a | = 1$: Normalparabel
  $| a | > 1$: Öffnung schmaler als Normalparabel
  $| a | < 1$: Öffnung weiter als Normalparabel
- b gibt in Verbindung mit a die Verschiebung des Scheitels in Richtung x-Achse an. Fehlt des Summand mit b liegt der Scheitel auf der y–Achse.
- c ist der Schnittpunkt mit der y–Achse.
- Nullstellen existieren nur, wenn der Ausdruck unter der Wurzel positiv oder Null ist.
- Ist der Ausdruck unter der Wurzel beim Bestimmen der Nullstellen gleich 0, dann gibt es eine **Doppellösung**: Die beiden Nullstellen fallen zusammen. In diesem Fall ist der x-Wert gleich dem x-Wert des Scheitels und der y-Wert des Scheitels ist 0, dh. der Scheitel liegt auf der x-Achse.

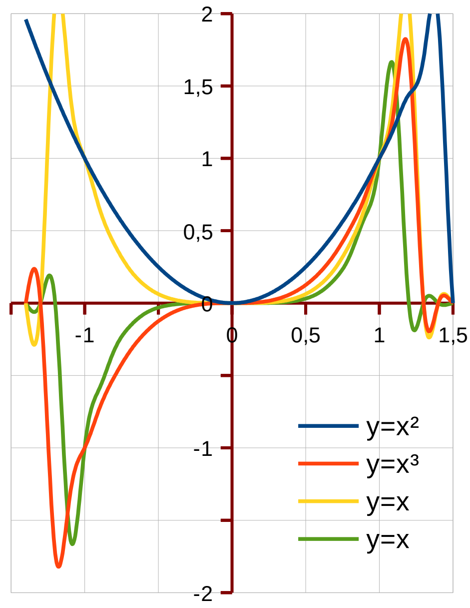
Weitere Berechnungen, Umrechnungen und Funktionsdarstellungen sind dem Dokument über quadratische Funktionen zu entnehmen. In dem vorliegenden Dokument werden nur die Charakteristiken elementarer Funktionen behandelt.

13.6. Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind Funktionen der Art $y = f(x) = x^n$; $x \in R$ und $n \in Z$.
Der Exponent n darf dabei durchaus ganzzahlig sein.

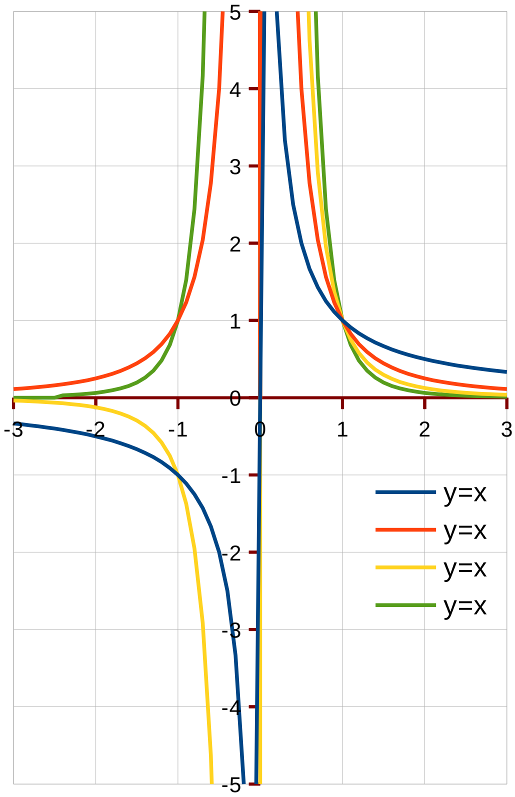
13.6.1 Potenzfunktionen mit positiven Exponenten





$y = x^n$	n geradzahlig	n ungeradzahlig
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$0 < y < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$
Nullstellen	x = 0 gerade Nullstelle	x = 0 ungerade Nullstelle
Extrema	x = 0 weil gerade Nullstelle	keine
Wendepunkte	keine	x = 0 weil ungerade Nullstelle
Gemeinsame Punkte	(-1,1); (0,0); (1,1)	(–1,–1); (0,0); (1,1)
Monotonie	$-\infty < x \le 0$ monoton fallend $0 \le x < +\infty$ monoton wachsend	$-\infty < x < +\infty$ monoton wachsend
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-1 \le x \le 0$ und $0 \le x \le 1$ zu den Intervallen $-\infty < x \le -1$ und $1 \le x < +\infty$	

13.6.2 Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten

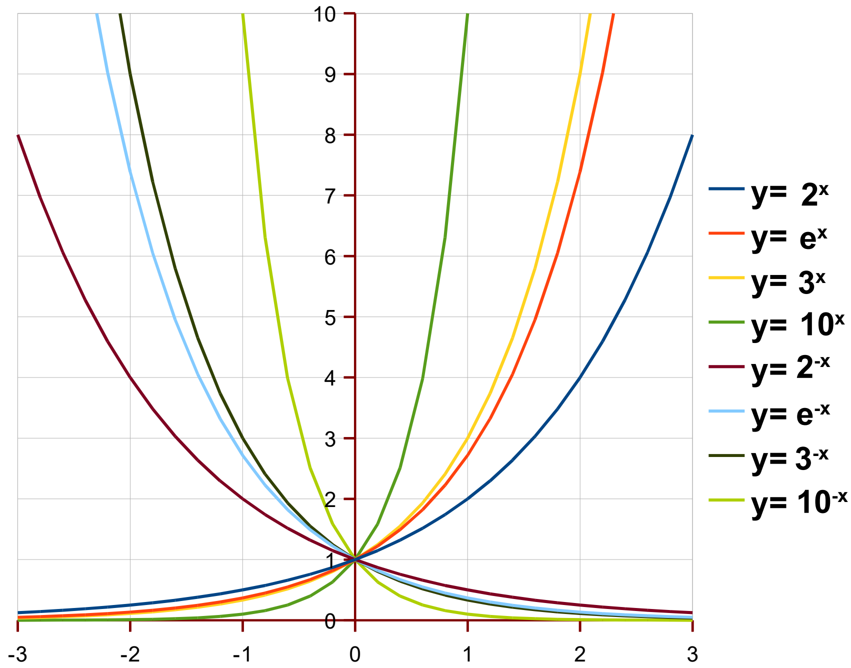


$y = x^{-n}$	n geradzahlig	n ungeradzahlig
Definitionsbereich	$-\infty < x < 0$ $0 < x < +\infty$	$-\infty < x < 0$ $0 < x < +\infty$
Wertebereich	$0 < y < +\infty$	$-\infty < y < 0$ $0 < y < +\infty$
Nullstellen	keine	keine
Extrema	keine	keine
Wendepunkte	keine	keine
Gemeinsame Punkte	(-1,1); (1,1)	(–1,–1); (1,1)
Monotonie	$-\infty < x < 0$ monoton wachsend $0 < x < +\infty$ monoton fallend	$-\infty < x < 0$ monoton fallend $0 < x < +\infty$ monoton fallend
Polstellen	x = 0 ungerade Polstelle	x = 0 gerade Polstelle
Asymptoten	x-Achse für $x \to -\infty$ x-Achse für $x \to +\infty$	x-Achse für $x \to -\infty$ x-Achse für $x \to +\infty$
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-1 \leq x \leq 0$ und $0 \leq x \leq 1$ zu den Intervallen $-\infty < x \leq -1$ und $1 \leq x < +\infty$	

13.7. Exponentialfunktionen

Die Funktion f mit $f(x) = a^x$ oder $f(x) = a^{-x}$ $x \in R$ $a \in N$, $a > 0$, $a \neq 1$ heißt **Exponentialfunktion zur Basis a.**

13.7.1 Exponentialfunktionen für a > 1



$y = a^x$	positiver Exponent	negativer Exponent
oder	**a > 1**	**0 < a < 1**
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$0 < y < +\infty$	$0 < y < +\infty$
Nullstellen	keine	keine
Extrema	keine	keine
Wendepunkte	keine	keine
Gemeinsame Punkte	(0;1)	(0;1)
Monotonie	$-\infty < x < +\infty$ monoton wachsend	$-\infty < x < +\infty$ monoton fallend
Asymptoten	x-Achse für $x \to -\infty$	x-Achse für $x \to +\infty$
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-\infty < x \leq 0$ und $0 \leq x < +\infty$	

Für die Funktionen a^{-x} kann man auch den Ausdruck $1/a^x$ schreiben somit ist z.B. $3^{-x} = (⅓)^x = 1/3^x$ deshalb kann man die Funktionen mit dem Exponenten –x auch interpretieren als Exponentialfunktionen mit $0 < a < 1$ und dafür einem positiven Vorzeichen im Exponenten.

Für solche Exponentialfunktionen ergeben sich über die Potenzgesetze interessante Zusammenhänge, wenn man die Funktionswerte an einer Stelle x und die an der Stelle

bei doppeltem oder halben x-Wert betrachtet, oder bestimmte feste Werte zu einem x Wert addiert.
Dazu soll als erstes die Funktion $y = 2^x$ betrachtet werden:

Wie ändert sich der Funktionswert, wenn
- x um 1 vergrößert wird: $2^{x+1} = 2\ 2^x$ $\quad f(x+1) = 2\ f(x)$
- x um 2 vergrößert wird: $2^{x+2} = 4\ 2^x$ $\quad f(x+2) = 4\ f(x)$
- x um 0,5 vergrößert wird: $2^{x+0,5} = \sqrt{2}\ 2^x$ $\quad f(x+½) = \sqrt{2}\ f(x)$
- x um 0,5 verkleinert wird: $2^{x-0,5} = 1/\sqrt{2}\ 2^x$ $\quad f(x-½) = f(x) / \sqrt{2}$
- x verdoppelt wird: $2^{2x} = (2^x)^2$ $\quad f(2x) = (\ f(x)\ )^2$
- x halbiert wird: $2^{½\,x} = (2^x)^{½}$ $\quad f(½x) = \sqrt{f(x)}$

allgemein:
- x um n vergrößert wird: $2^{x+n} = 2^n\ 2^x$ $\quad f(x+n) = 2^n\ f(x)$
- x mit n multipliziert wird: $2^{nx} = (2^x)^n$ $\quad f(nx) = (\ f(x)\ )^n$

Die gleiche Untersuchung kann man für die Funktion $y = (½)^{\,x}$ durchführen:

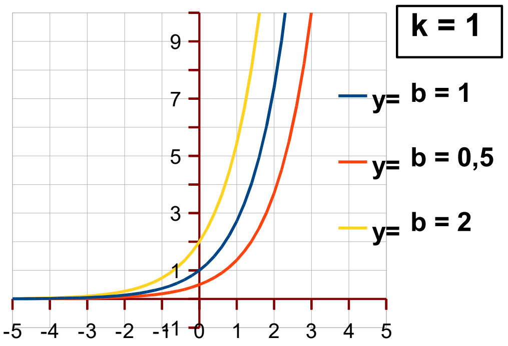
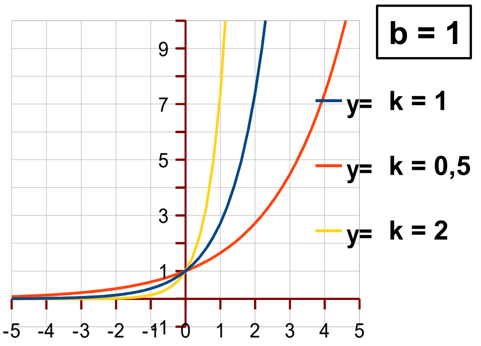
Wie ändert sich der Funktionswert, wenn
- x um 1 vergrößert wird: $½^{\,x+1} = ½\ ½^x$ $\quad f(x+1) = ½\ f(x)$
- x um 2 vergrößert wird: $½^{\,x+2} = ¼\ ½^x$ $\quad f(x+2) = ¼\ f(x)$
- x um 0,5 vergrößert wird: $½^{\,x+0,5} = {}^1/_{\sqrt{2}}\ ½^{\,x}$ $\quad f(x+½) = f(x) / \sqrt{2}$
- x um 0,5 verkleinert wird: $½^{\,x-0,5} = \sqrt{2}\ 2^x$ $\quad f(x-½) = \sqrt{2}\ f(x)$
- x verdoppelt wird: $½^{2x} = (½^x)^2$ $\quad f(2x) = (\ f(x)\ )^2$
- x halbiert wird: $½^{½\,x} = (½^x)^{½}$ $\quad f(½x) = \sqrt{f(x)}$

allgemein:
- x um n vergrößert wird: $½^{x+n} = ½^n\ ½^x$ $\quad f(x+n) = ½^n\ f(x)$
- x mit n multipliziert wird: $½^{nx} = (½^x)^n$ $\quad f(nx) = (\ f(x)\ )^n$

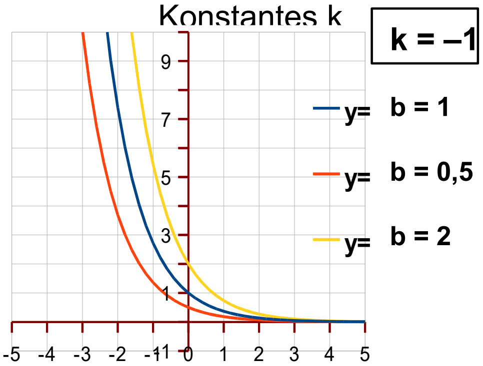
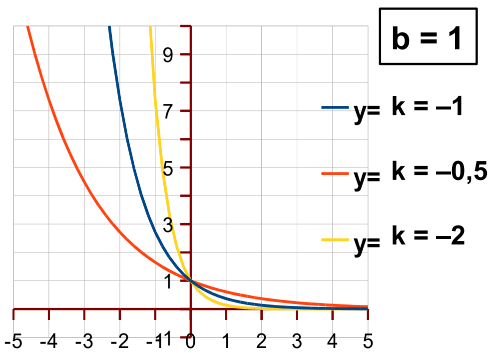
13.8. Allgemeine Exponentialfunktion

Funktionsausdrücke der Form $y = b\,a^{kx}$, die vor dem Exponentialausdruck noch einen weiteren Faktor besitzen und/oder im Exponenten vor der Variablen x einen Faktor besitzen, bezeichnet man als allgemeine Exponentialfunktionen. (Summen zählen hier nicht, da Summen nur eine Verschiebung in x– oder y–Richtung bewirkt, aber keine Änderung des Kurvenverlaufs.)
Funktionen dieser Art sind insbesondere bei Wachstums- und Zerfallsprozessen von Bedeutung. Deshalb soll hier auf die grundlegende Veränderung des Kurvenverlaufs hingewiesen werden.

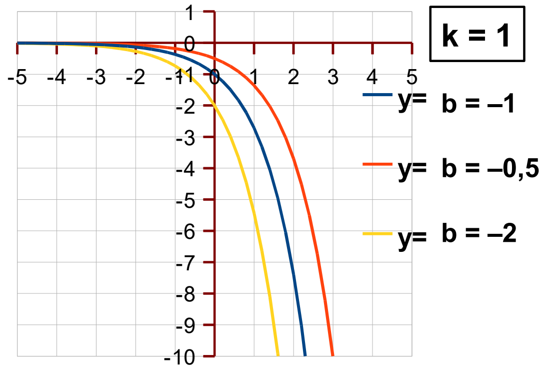
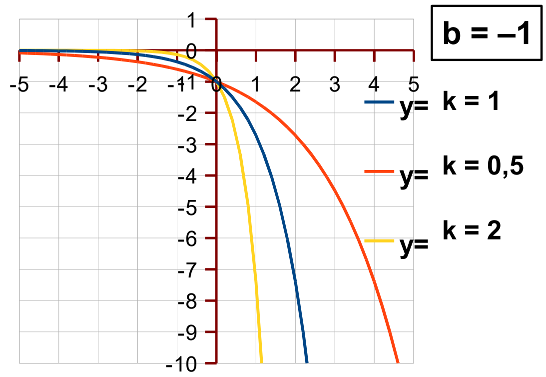
13.8.1 Fall 1: k positiv; b positiv

<table>
<tr><td>Konstantes k

</td><td>Konstantes b

</td></tr>
<tr><td>Kurvenverlauf sehr ähnlich, der Wert von b bestimmt den Schnittpunkt mit der y-Achse, das b bewirkt ein strecken der Kurven nach oben.</td><td>Alle Funktionen haben mit der y- Achse den gleichen Schnittpunkt b. In Abhängigkeit von k werden die Kurven aufgefächert.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Kurvenverläufe sind in beiden Fällen monoton wachsend und stellen damit ein exponentielles Wachstum dar.</td></tr>
</table>

13.8.2 Fall 2: k negativ; b positiv

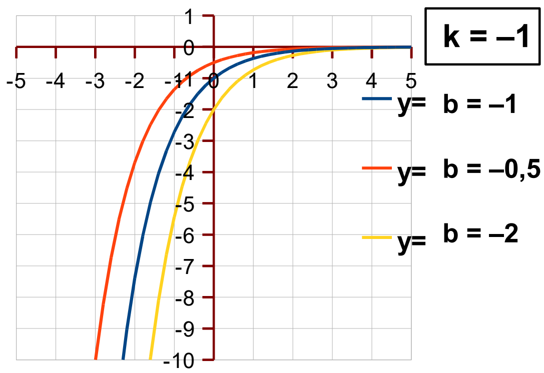
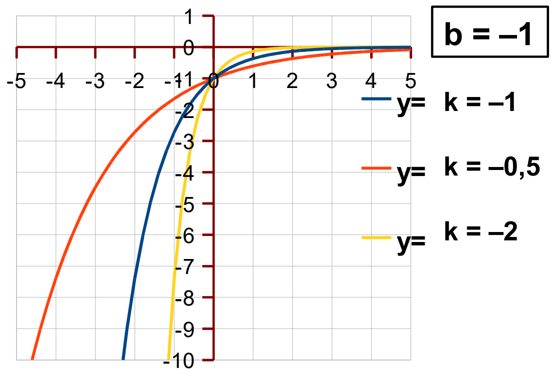
<table>
<tr><td>Konstantes k

</td><td>Konstantes b

</td></tr>
<tr><td>Kurvenverlauf sehr ähnlich, der Wert von b bestimmt den Schnittpunkt mit der y-Achse, das b bewirkt ein strecken der Kurven nach oben.</td><td>Alle Funktionen haben mit der y- Achse den gleichen Schnittpunkt b. In Abhängigkeit von k werden die Kurven aufgefächert.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Kurven entstehen durch Spiegelung von Fall 1 an der y- Achse.
Die Kurvenverläufe sind in beiden Fällen monoton fallen und stellen damit einen exponentiellen Zerfall dar.</td></tr>
</table>

13.8.3 Fall 3: k positiv; b negativ

Konstantes k	Konstantes b
	
Kurvenverlauf sehr ähnlich, der Wert von b bestimmt den Schnittpunkt mit der negativen y-Achse, das b bewirkt ein strecken der Kurven nach unten.	Alle Funktionen haben mit der negativen y-Achse den gleichen Schnittpunkt b. In Abhängigkeit von k werden die Kurven aufgefächert.

Die Kurven entstehen durch Spiegelung von Fall 1 an der x– Achse.
Die Kurvenverläufe sind in beiden Fällen monoton fallend. Für Wachstumsprozesse haben diese Kurvenverläufe keine Bedeutung.

13.8.4 Fall 4: k negativ; b negativ

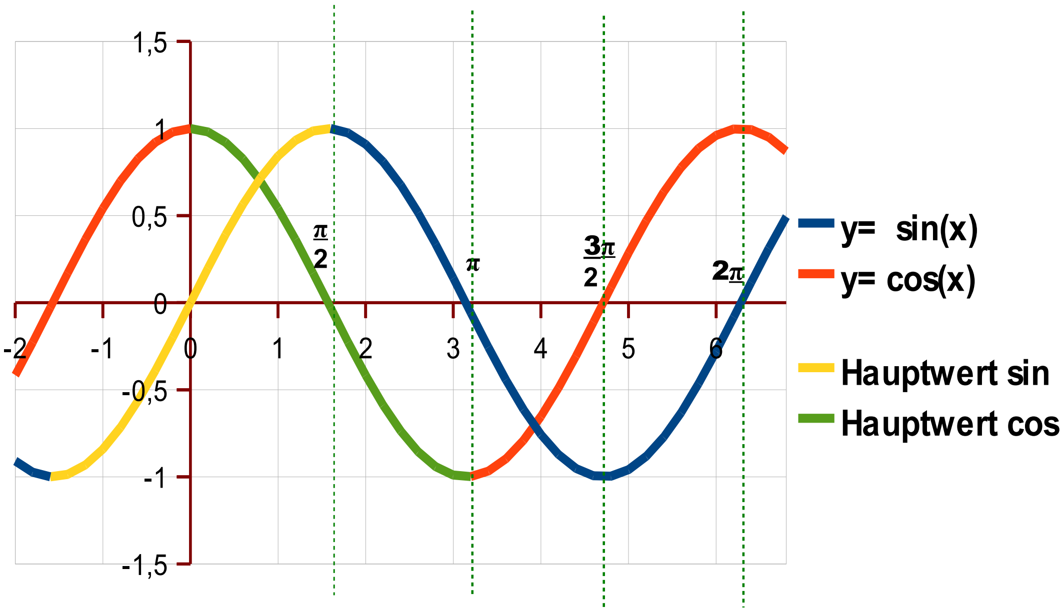
Konstantes k	Konstantes b
	
Kurvenverlauf sehr ähnlich, der Wert von b bestimmt den Schnittpunkt mit der negativen y-Achse, das b bewirkt ein strecken der Kurven nach oben.	Alle Funktionen haben mit der negativen y-Achse den gleichen Schnittpunkt b. In Abhängigkeit von k werden die Kurven aufgefächert.

Die Kurven entstehen durch Spiegelung von Fall 1 an der x– Achse und der y – Achse oder durch Punktspiegelung am Ursprung. Die Kurvenverläufe sind in beiden Fällen monoton wachsend. Für Wachstumsprozesse beschreiben diese Kurvenverläufe **beschränktes Wachstum**.

13.9. Trigonometrische Funktionen

Da das Thema „Trigonometrische Funktionen“ sehr umfangreich ist, werden hier nur die Funktionen mit ihren grundlegenden Eigenschaften der Vollständigkeit halber aufgeführt. Alle weiteren Zusammenhänge und Hintergründe sind im Abschnitt „Trigonometrie“ enthalten.

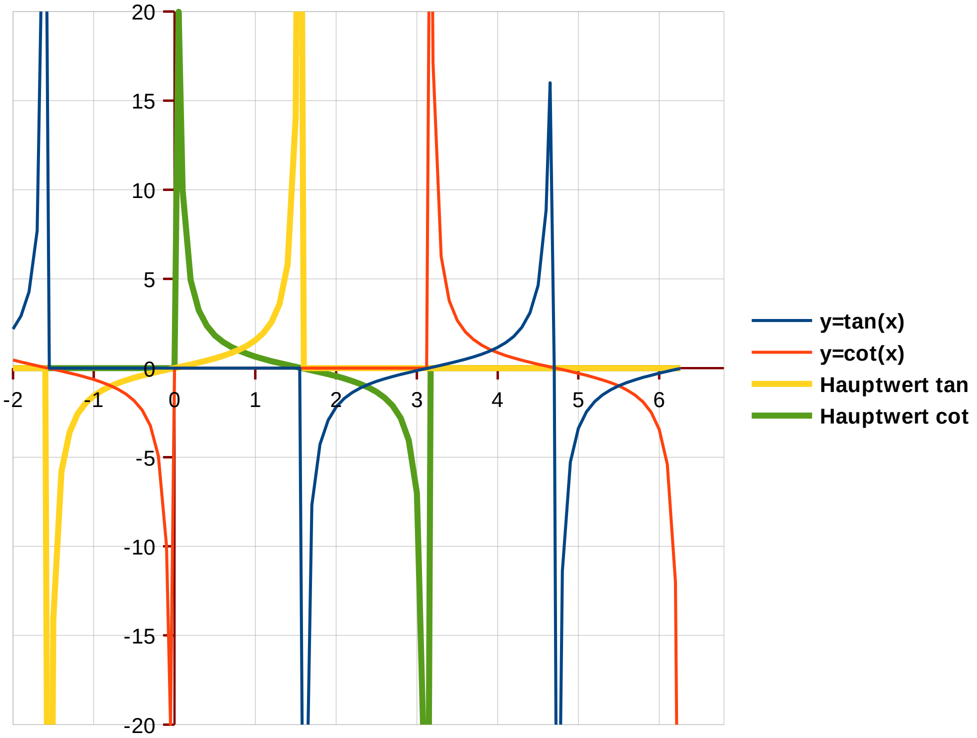
13.9.1 Die sin und cos Funktionen



	y = sin (x)	y = cos (x)
Definitionsbereich	–∞ < x < +∞	–∞ < x < +∞
Wertebereich	–1 ≤ y ≤ +1	–1 ≤ y ≤ +1
Nullstellen	k•π	π/2 + k• π
Extrema	π/2 + 2k• π (Maxima) 3π/2 + 2k• π (Minima)	2k• π (Maxima) π + 2k• π (Minima)
Wendepunkte	π/4 + k• π	π/4 + k• π
Gemeinsame Punkte	(π/4+k•π , ½ √2)	π/4+k•π , ½ √2)
Periode	2π	2π
Monotonie	–π/2+2k•π ≤ x ≤ π/2+2k• π monoton wachsend π/2+2k•π ≤ x ≤ 3π/2+2k• π monoton fallend	π+2k•π ≤ x ≤ 2π+2k• π monoton wachsend 0+2k•π ≤ x ≤ π+2k• π monoton fallend
Asymptoten	keine	keine
Hauptwerte	–π/2 ≤ x ≤ π/2	0 ≤ x ≤ π
Besonderheiten	Die Periodizität trigonometrischer Funktionen führt dazu, dass jeder Wert aus dem Wertebereich für unendlich viele x-Werte erreicht wird. Für spätere Aussagen über die Umkehrfunktion macht sich damit notwendig, dass für jede Funktion sogenannte Hauptwerte festgelegt werden. Diese sind im Kurvenbild gesondert eingetragen.	

13.9.2 Die tan und cot Funktionen

Die cot-Funktion wird heute in der Schule nicht mehr behandelt und hat auch eine geringe Bedeutung. Allein die Symmetrieeigenschaften zwischen sin und cos Funktion auf der einen Seite und tan und cot Funktionen auf der anderen Seite scheinen es zu rechtfertigen, beide Funktionen zu betrachten.



	y = tan (x)	y = cot (x)
Definitionsbereich	–π/2+k•π < x < π/2+k• π	k•π < x < π+k•π
Wertebereich	–∞ ≤ y ≤ +∞	–∞ ≤ y ≤ +∞
Nullstellen	k•π	π/2 + k• π
Extrema	keine	keine
Wendepunkte	k•π	π/2 + k•π
Gemeinsame Punkte	(π/4 + k• π , 1)	(π/4+k•π , 1)
Periode	π	π
Monotonie	–π/2+2k•π ≤ x ≤ π/2+2k• π monoton wachsend	k•π ≤ x ≤ π+k•π monoton fallend
Asymptoten	x = π/2 + k π	x = k π
Hauptwerte	–π/2 < x < π/2	0 < x < π
Besonderheiten	Die Periodizität trigonometrischer Funktionen führt dazu, dass jeder Wert aus dem Wertebereich für unendlich viele x-Werte erreicht wird. Für spätere Aussagen über die Umkehrfunktion macht sich damit notwendig, dass für jede Funktion sogenannte Hauptwerte festgelegt werden. Diese sind im Kurvenbild gesondert eingetragen.	

13.10. Allgemeine Sinus – Funktion

Analog zu einer quadratischen und einer Exponential –Funktion kann man auch für trigonometrische Funktionen einen allgemeinen Funktionsausdruck bilden:

$$y = a \sin(b (x - c)) + d$$

Der Behandlung der allgemeinen Sinusfunktion ist das Kapitel 20 gewidmet und wird hier nicht weiter untersucht. Jede verallgemeinerte Kosinus-Funktion lässt sich auf eine allgemeine Sinus-Funktion zurückführen, da sich Kosinus und Sinus nur durch eine Verschiebung in x – Richtung unterscheiden. Eine Verallgemeinerung der Tangens-Funktion spielt praktisch keine Rolle.

13.11. Gebrochen rationale Funktionen

Eine wichtige Gruppe von Funktionen sind diese gebrochen rationalen Funktionen. Sie bestehen grundsätzlich aus einem Bruch, bei dem im Zähler und im Nenner ein Polynom steht. Damit also nur Koeffizienten und Potenzen von x. Es treten keine Trigonometrischen- , Wurzel-, Exponential oder sonstige Funktionen in diesen Ausrücken auf.

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

Ein wichtiges Merkmal dieser Funktionen ist es, dass auch sogenannte Polstellen auftreten können. Polstellen sind x – Werte, bei denen sich der Wert der Funktion nicht berechnen lässt, da der Wert des Nenners 0 ist und damit durch 0 geteilt würde. An solchen Stellen ist dann der Funktionswert „unendlich“ und es existiert im eigentlichen Sinn kein Funktionswert, da unendlich keine Zahl ist. Diese Stellen an Funktionen werden in dem späteren Kapitel 15 Grenzwerte näher untersucht.

An dieser Stelle soll es dazu reichen, dass man weiß,

- dass die Nullstellen einer solchen Funktion durch die Nullstellen des Zählers erzeugt werden
- und die Polstellen durch die Nullstellen das Nenners.

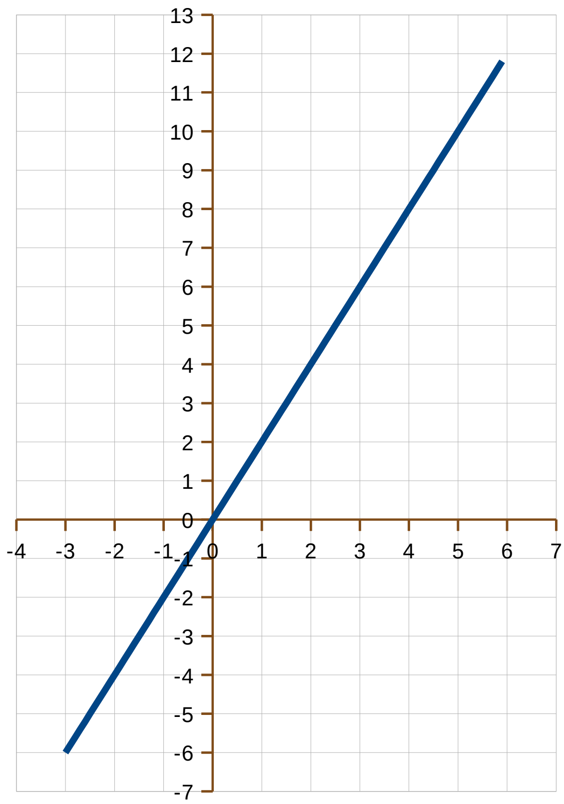
Haben Zähler und Nenner an der gleichen Stelle Nullstellen, dann handelt es sich um eine behebbare Definitionslücke, die in 15.3.2 genauer untersucht wird.

14. Umkehrfunktionen

Aus dem Rechnen mit Zahlen sind Umkehroperationen bekannt. Diese werden benötigt, wenn man das Ergebnis der Rechenoperation kennt, und den Ausgangswert für dieses Ergebnis bestimmen will.
Für die Rechnung 5 + 7 benötigt man keine weitere Operation als die Addition. Was macht man aber mit einer Aufgabe wie: $x + 7 = 12$. Das Ergebnis 12 ist bekannt, aber nicht der Wert x, der zu diesem Ergebnis führt. Wie kann man nun diesen Wert ermitteln, indem man die Umkehroperation von +7 auf beide Seiten der Gleichung anwendet. Das führt zu der veränderten Gleichung $x = 5$. Für $x = 5$ wird also in der obigen Gleichung das Ergebnis 12 erreicht.
Den gleichen Gedankengang kann man durchführen, wenn die Frage steht: $4 \cdot x = 20$. Hier ist die Umkehroperation der Multiplikation gefragt. Es muss die gesamte Gleichung durch 4 dividiert werden, so dass als Lösung $x = 5$ erscheint.

Diese Problem besteht nun auch bei Funktionen. Den Ausdruck $y = x^2$ kann man für jedes x berechnen und man benötigt nur die Definition des Potenzierens. Was macht man aber mit einem Ausdruck $x^2 = 16$. da scheint es doch nützlich eine entsprechende Umkehroperation zu besitzen, damit man diesen Ausdruck bearbeiten kann.
Jeder, der sich auskennt, wird sagen, das ist ganz einfach, da muss man die Wurzel ziehen, also $x = \sqrt{16}$ und daraus schließt man $x = 4$. Warum aber nicht $x = -4$, denn $(-4)^2 = 16$, also muss dort noch irgend etwas sein, was die Umkehroperation beeinflußt.

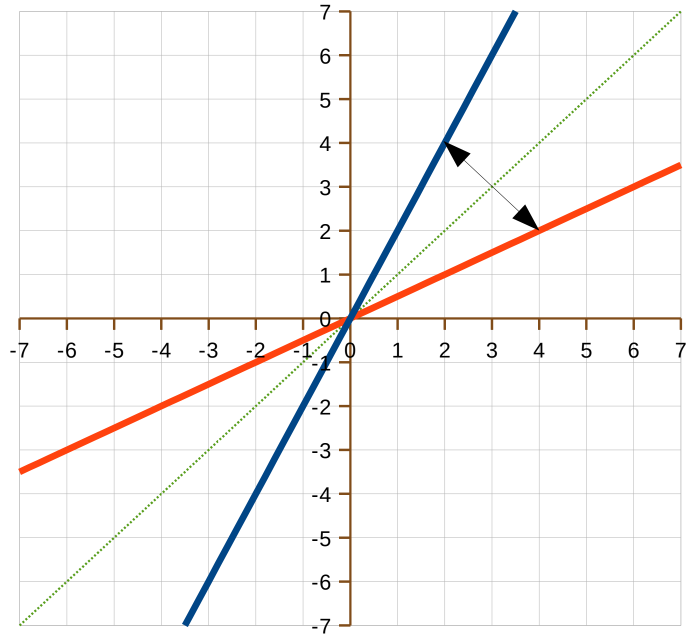
Dazu soll wieder mit der einfachen Addition begonnen werden. Es wir eine Funktion erzeugt, die jedem Wert sein Doppeltes zuweisen soll. Eine solche Funktion ist leicht gefunden mit $y = 2x$. Diese Funktion wird in ein Koordinatensystem gezeichnet.



Jetzt kann man auf der x-Achse sich einen Wert x aussuchen, auf senkrecht hoch auf das Funktionsbild gehen und sich den zugehörigen doppelten Wert auf der y-Achse ablesen.

Prinzipiell funktioniert das auch umgekehrt. Man wählt einen Wert y aus und sucht sich den zugehörigen (halben)Wert x, indem man von der y-Achse waagerecht auf die Funktionskurve geht und dann senkrecht nach unten auf die x-Achse. So erhält man den zu einem gegebenen y gehörenden x Wert.

Jetzt ist man aber gewohnt, dass dass man eigentlich immer einen x-Wert wählt und sich den zugehörigen y-Wert sucht. Das ist in dem Fall problemlos möglich, denn man weiß, man muss die Gleichung durch 2 teilen und erhält dann zu jedem x den halben Wert. das kann man auch in einer Funktion $y = \frac{1}{2}x$ darstellen. Diese Funktion, die die Umkehroperation zu $y = 2x$ darstellt wird jetzt ebenfalls mit in das Koordinatensystem gezeichnet. Damit ist es bequem möglich zu jedem x den doppelten Wert zu ermitteln, aber auch zu jedem gegebenen Wert den zugehörigen halben Wert.

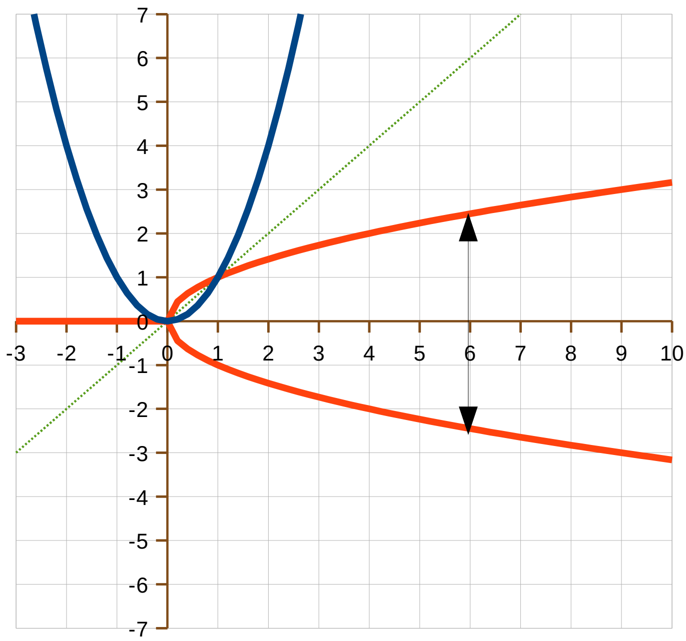


Die blaue Linie ist die Funktion y = 2x und die rote Linie y = ½ x. Diese beiden Kurvenbilder weisen einige interessante Eigenschaften auf. Beide Kurvenbilder besitzen zu der grün gezeichneten Linie einen symmetrischen Abstand. Bildet man von dieser grünen Linie den senkrechten Abstand zu den beiden Funktionen stellt man fest, dass die senkrechten Abstände gleich sind. Gleichzeitig stellt man fest, dass auf der blauen Linie für x = 2 y = 4 gilt und für die rote Linie gilt für x = 4 y = 2, also genau die umgekehrte Operation, die auch noch den senkrechten Abstand zur grünen Linie repräsentiert. Die grüne Linie ist die Gerade y = x, oder Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten.

Daraus gewinnt man die erste wichtige Eigenschaft für Umkehrfunktionen:

> Umkehrfunktionen entstehen aus Ausgangsfunktionen durch Spiegeln an der Geraden y = x

Damit soll wieder auf das Ausgangsproblem $x^2 = 16$ zurückgegangen werden. Man zeichnet die Funktion $y = x^2$, spiegelt diese an der Geraden y = x und erhält die Umkehrfunktion. Wie bekannt muss diese Funktion dann die Wurzelfunktion darstellen, da man diese braucht um die Gleichung zu lösen.

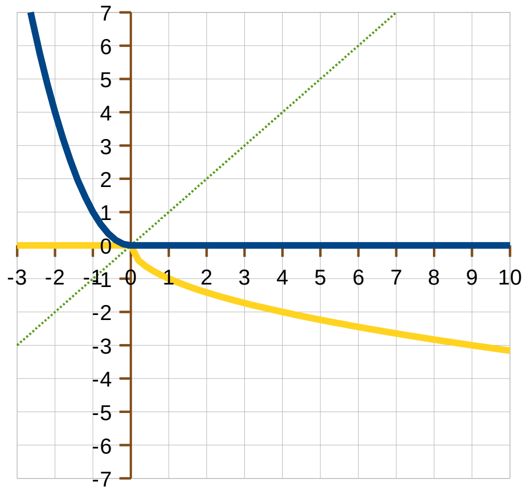


Damit wäre eigentlich das Problem gelöst, gäbe es jetzt nicht ein anderes, viel schwerwiegenderes. Zu einem x Wert gibt es zwei verschiedene y-Werte. Im Funktionsbild für x =6 kenntlich gemacht. Das widerspricht **fundamental** dem Funktionsbegriff der Mathematik, siehe dazu die ersten Abschnitte dieses Kapitels. Zu einem x- Wert darf es nur einen y-Wert geben, zu einem y-Wert darf es aber mehrere x-Werte geben. Damit ist die rote Kurven keine Funktion und somit auch keine Umkehrfunktion.

Analysiert man dieses Problem weiter kommt man zu dem Schluß, die Ursache liegt darin dass in der Ausgangsfunktion zu zwei x-Wert ein und derselbe y-Wert existieren, was bei quadratischen Funktionen ja bekannt ist. In dem vorher betrachteten Multiplikationsbeispiel war das nicht der Fall, da gab es zu jedem x auch nur **ein** y . Also kann an bei der Funktion $y = x^2$ nicht die gesamte Funktion nehmen, sondern nur die Teile, für die zu einem x Wert **nur ein** y Wert gehört. Das wäre der Kurventeil, der für negative x entsteht und der Kurventeil, der für positive x entsteht. In jedem dieser Kurventeile gibt es für ein x und ein y Wert. Also wird die Funktion $y = x^2$ in zwei Teile zerlegt, für die dann jeweils Umkehrfunktionen existieren sollten.

Die Kurvenbilder zeigen die blaue Kurven als Funktion $y = x^2$ für negative x. Die gelbe Kurve ist die an y =x gespiegelt Kurve und stellt ebenfalls eine Funktion dar, da zu jedem x nur ein y gehört. Damit ist die gelbe Kurve Umkehrfunktion der blauen Kurve. Mathematisch formuliert heißt das:

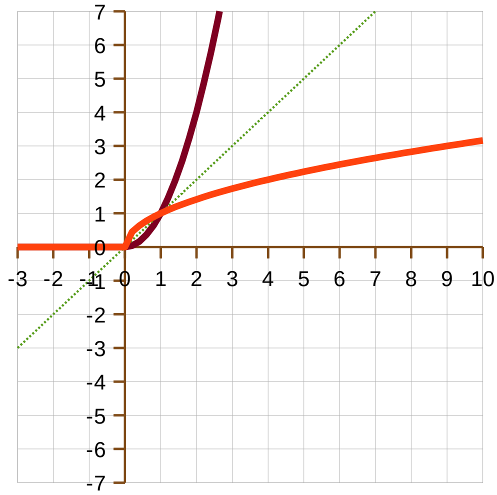
Die Funktion $y = x^2$ hat für $x \leq 0$ eine Umkehrfunktion und diese heißt $y = -\sqrt{x}$



Jetzt sollte es möglich sein, auch für den anderen teil der Kurve eine Umkehrfunktion zu finden.

Die Kurvenbilder zeigen die Funktion $y = x^2$ für positive x und die rote Kurve als gespiegelte Kurve an y =x . Auch für die rote Kurve gilt jetzt, dass zu jedem x nur ein y gehört und damit die rote Kurve eine Funktion ist und somit als Umkehrfunktion der brauen Kurve gelten kann. Mathematisch heißt das folgendes:

Die Funktion $y = x^2$ hat für $x \geq 0$ eine Umkehrfunktion und diese heißt $y = \sqrt{x}$



Für das Eingangs gestellte Problem $x^2 = 16$ heißt das, die Lösung dieser Gleichung ist x = – 4 oder x = +4, je nachdem auf welchen Teil der Funktion man sich beziehen will. Möchte man alle Lösungen muss man beide Teile betrachten und erhält somit zwei Lösungen.

Jetzt bleibt die Frage, wann hat den eine Funktion eine Umkehrfunktion, und wann hat sie keine. Das führt zur zweiten Eigenschaft von Umkehrfunktionen:

> Umkehrfunktionen können nur für die Funktionsteile gebildet werden, in denen die Funktion ein einheitliches Monotonieverhalten besitzt.

Ein einheitliches Monotonieverhalten sichert, dass zu jedem x nur ein y gehört. Man sieht das sehr leicht an der untersuchten Funktion $y = x^2$. Diese Funktion ist für $x < 0$ monoton fallend und für $x > 0$ monoton steigend. Also hat sie für jeden Teil eine Umkehrfunktion, aber die gesamte Funktion ist sowohl monoton steigend als auch monoton fallen, also gibt es für die gesamte Funktion keine Umkehrfunktion.

Es soll noch einmal betont werden, dass es irrelevant ist, ob die Funktion monoton fällt oder steigt, sie darf im betrachteten Intervall nur nicht beides haben.

Rechnerisch bestimmt man eine Umkehrfunktion indem man die Ausgangsfunktion nach x auflöst und anschließend x und y vertauscht. Dieses Vertauschen entspricht dem Spiegeln an der Geraden $y = x$. das Auflösen allein macht noch nicht die Umkehrfunktion, sondern verändert nur die abhängige und die unabhängige Variable.

Beispiel 1:

1	Funktionsvorschrift aufschreiben:	$x \rightarrow 3x + 7$	
2	Funktionsgleichung aufschreiben	$y = 3x + 7$	
3	Nach x auflösen	$y = 3x + 7$	| -7 (Umkehroperation zu +)
		$y - 7 = 3x$	| : 3 (Umkehroperation zu *)
		$\frac{1}{3}y - 7/3 = x$	
4	x und y vertauschen	$\frac{1}{3}x - 7/3 = y$	
5	Funktionsvorschrift aufschreiben	$x \rightarrow \frac{1}{3}x - 7/3$	

Beispiel 2:

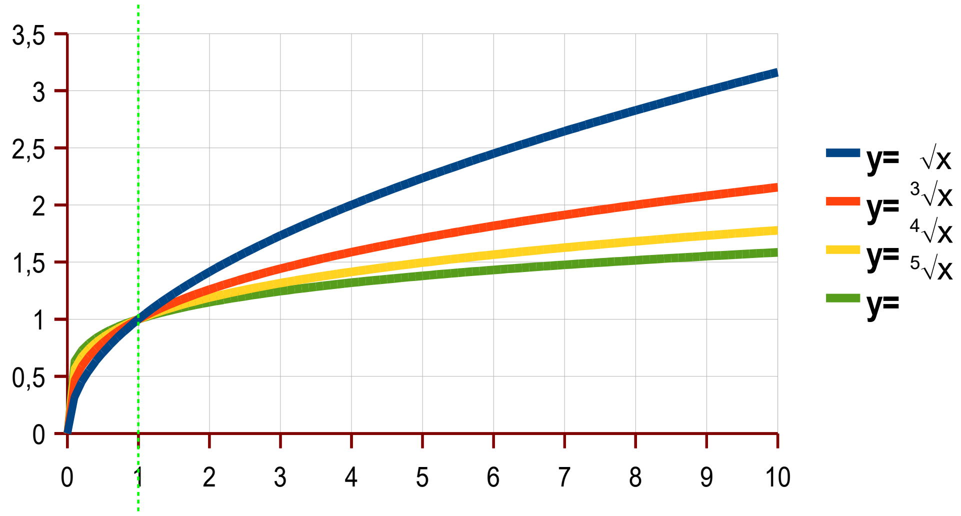
1	Funktionsvorschrift aufschreiben:	$x \rightarrow 2x^3 - 5$	
2	Funktionsgleichung aufschreiben	$y = 2x^3 - 5$	
3	Nach x auflösen	$y = 2x^3 - 5$	| +5 (Umkehroperation zu –)
		$y + 5 = 2x^3$	| : 2 (Umkehroperation zu *)
		$\frac{1}{2}y + 5/2 = x^3$	| $\sqrt[3]{\ }$ (Umkehrfunktion zu x^3)
		$\sqrt[3]{\frac{1}{2}y + 5/2} = x$	
4	x und y vertauschen	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}x + 5/2} = y$	
5	Funktionsvorschrift aufschreiben	$x \rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2}x + 5/2}$	

Als nächstes sollen zu den bisher behandelten elementaren Funktionen die Umkehrfunktionen behandelt werden. Die Umkehrfunktionen sind diejenigen Funktionen, die man braucht um aus einem gegebenen y Wert den zugehörigen x wert zu finden. deshalb heben sich Verschachtelungen von Funktion und Umkehrfunktion gegenseitig auf und es bleibt nur das Argument selbst übrig.

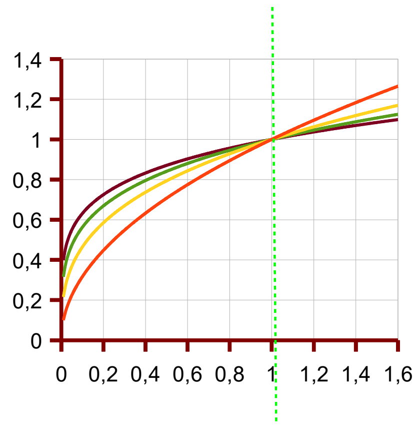
14.1. Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen. Dabei ist zu beachten, dass Potenzfunktionen mit geradem Exponenten über die gesamte x -Achse zwei verschiedene Monotonieverhalten besitzen, also in zwei Umkehrfunktionen zerlegt werden müssen, während Potenzfunktionen mit ungeradem Exponenten nur ein Monotonieverhalten haben und deshalb auch nur eine Umkehrfunktion über die gesamte x-Achse besteht.

14.1.1 Wurzelfunktionen für positive x-Werte

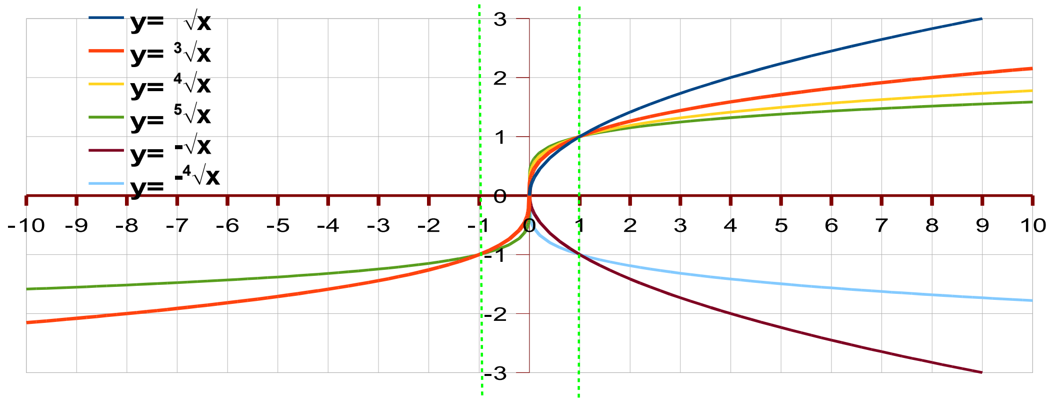


$y = \sqrt[n]{x}$	n ganzzahlig
Definitionsbereich	$0 \le x < +\infty$
Wertebereich	$0 \le y < +\infty$
Nullstellen	$x = 0$
Extrema	keine
Wendepunkte	keine
Gemeinsame Punkte	(0,0); (1,1)
Monotonie	$0 \le x < +\infty$ monoton wachsend
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven der Intervall $0 \le x \le 1$ zu dem Intervall und $1 \le x < +\infty$



14.1.2 Funktionszweige für positive und negative x Werte

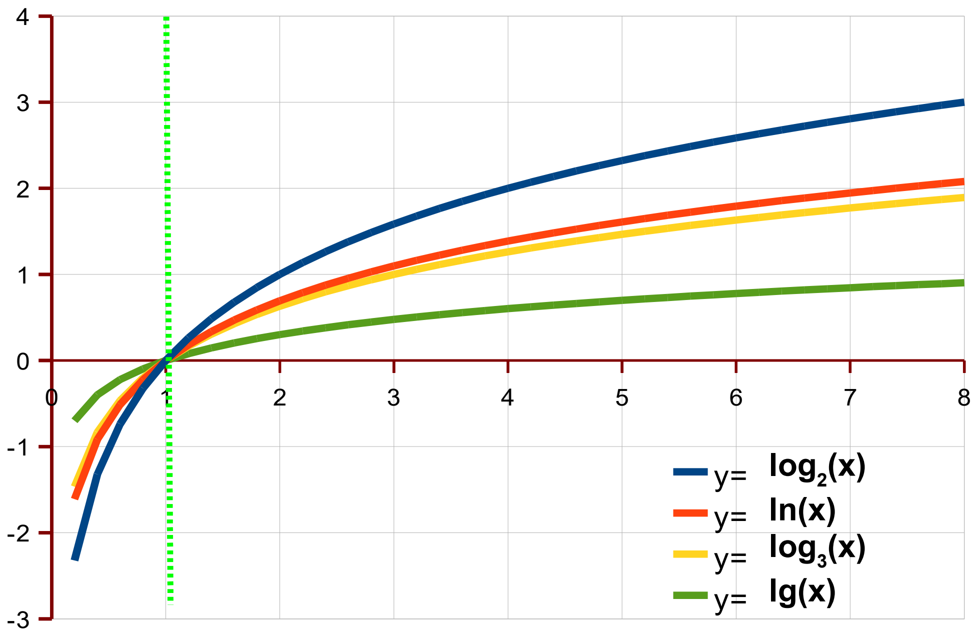
Über die gesamte x-Achse gesehen müssen für gerade Potenzfunktionen Unterscheidungen gemacht werden.



$y = \sqrt[n]{x}$	n geradzahlig	n ungeradzahlig
Definitionsbereich	$0 \le x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$0 \le y < +\infty$ (Zweig 1) $-\infty < y \le 0$ (Zweig 2)	$-\infty < y < +\infty$
Nullstellen	x = 0	x = 0
Extrema	x = 0	keine
Wendepunkte	keine	x = 0
Gemeinsame Punkte	(0,0); (1,1) (0,0); (1,–1)	(–1,–1); (0,0); (1,1)
Monotonie	$0 \le x < +\infty$ monoton wachsend (Zweig 1) $0 \le x < +\infty$ monoton fallend (Zweig 2)	$-\infty < x < +\infty$ monoton wachsend
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $-1 \le x \le 0$ und $0 \le x \le 1$ zu den Intervallen $-\infty < x \le -1$ und $1 \le x < +\infty$	

14.2. Logarithmusfunktionen

Logarithmusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen. Exponentialfunktionen sind im gesamten Definitionsbereich monoton, deshalb sind keine Fallunterscheidungen notwendig. Hier werden nur Logarithmusfunktionen für eine Basis a > 1 betrachtet, die Funktionen für eine Basis a < 1 sind von untergeordnetem Interesse und nur eine Spiegelung dieser Funktionen an der x-Achse.



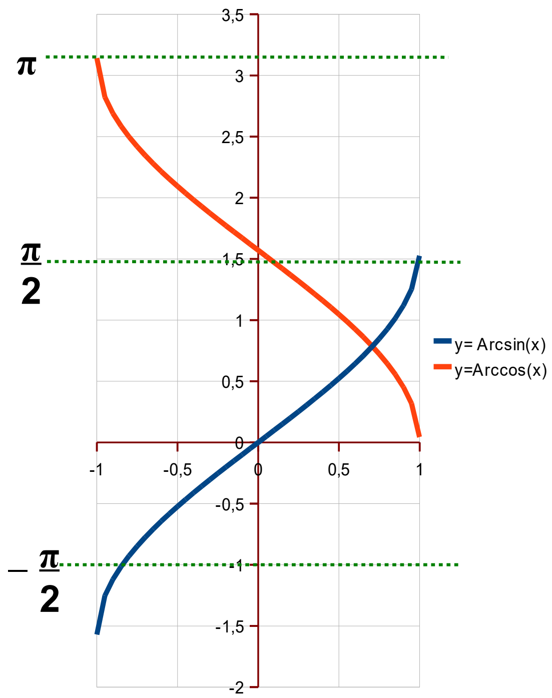
$y = \log_a x$	a > 1
Definitionsbereich	$0 < x < +\infty$
Wertebereich	$-\infty < y < +\infty$
Nullstellen	x = 1
Extrema	keine
Wendepunkte	keine
Gemeinsame Punkte	-1,1
Monotonie	$0 < x < +\infty$ monoton wachsend
Besonderheiten	zu beachten ist die unterschiedliche Lage der Kurven im Intervall $0 < x \leq 1$ zu dem Intervall $1 \leq x < +\infty$

14.3. Arcusfunktionen

Die Arcusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Hier ist das Bilden der Umkehrfunktion ein Problem, da die Funktionen für jedes y beliebig viele x Werte besitzen und somit eine Eindeutigkeit nicht herstellbar ist. Aus diesem Grund hat man sich für die sogenannten Hauptwerte entschieden. Das sind solche x-Bereiche, in denen die trigonometrische Funktion nur einen Monotoniebogen hat. Für diesen Monotoniebogen ist die Umkehrfunktion dann definierbar. Diese notwendigen Beschränkungen haben Konsequenzen auf das Rechnen mit trigonometrischen Funktionen, die im Kapitel Trigonometrie behandelt werden.

14.3.1 arcsin und arccos Funktion

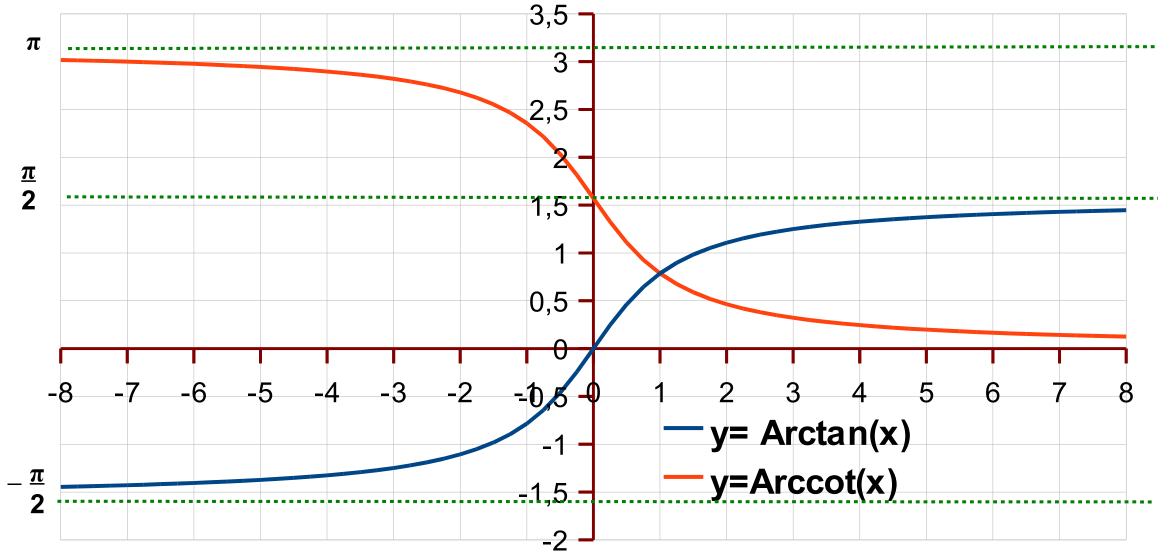
Für die sin Funktion hat man sich für den Bereich $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ entschieden und für die cos Funktion $0 \le x \le \pi$. das führt dann zu folgenden Umkehrfunktionen:



	y = arcsin (x)	y = arcos (x)
Definitionsbereich	$-1 < x < +1$	$-1 < x < +1$
Wertebereich	$-\pi/2 \le y \le +\pi/2$	$0 \le y \le \pi$
Nullstellen	x = 0	x = 1
Extrema	keine	keine
Wendepunkte	x = 0	x = 0
Monotonie	$-1 \le x \le 1$ monoton wachsend	$-1 \le x \le 1$ monoton fallend
Asymptoten	keine	keine

14.3.2 arctan und arccot Funktion

Für die tan Funktion hat man sich für den Bereich $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ entschieden und für die cot Funktion $0 \le x \le \pi$. das führt dann zu folgenden Umkehrfunktionen:



	y = arctan (x)	y = arccot (x)
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$-\pi/2 \le y \le +\pi/2$	$0 \le y \le \pi$
Nullstellen	x = 0	keine
Extrema	keine	keine
Wendepunkte	x = 0	x = 0
Monotonie	$-\infty < x < +\infty$ monoton wachsend	$-\infty < x < +\infty$ monoton fallend
Asymptoten	$y = -\pi/2 \quad x \to -\infty$ $y = \pi/2 \quad x \to +\infty$	$y = 0 \quad x \to +\infty$ $y = \pi \quad x \to -\infty$

15. Grenzwert von Funktionen

15.1. Definitionen

Der Begriff des Grenzwertes kommt aus der Betrachtung von Folgen und Reihen. Wenn eine Zahlenfolge gegen einen bestimmten Wert konvergiert – dh. diesen nicht über– oder unterschreitet – hat sie einen Grenzwert. Diese Denkweise wird auf Funktionen übertragen.

Definition: Die Funktion f hat **an der Stelle x_0 den Grenzwert G** $\in$ R, wenn *für jede* gegen x_0 konvergierende Folge $\{ x_n \}$ aus dem Definitionsbereich von f die Folge der zugehörigen Funktionswerte $\{ f(x_n) \}$ den Grenzwert G besitzt.
Man schreibt dann $\lim_{x \to x_0} f(x) = G$ oder $f(x) \to G$ für $x \to x_0$

Für die üblichen stetigen Funktionen ist diese Definition immer erfüllt. Nur bei Funktionen, die stückweise definiert sind, kann es vorkommen, dass diese Funktionen nicht **einen Grenzwert**, sondern zwei Grenzwerte besitzen, abhängig davon, ob man sich von x-Werten oberhalb der Trennstelle nähert, oder mit x-Werten unterhalb der Trennstelle. In diesen Fällen spricht man von einem linksseitigen und einem rechtsseitigen Grenzwert. Sind diese beiden Grenzwert gleich, dann ist die Funktion an dieser Stelle stetig, sind die beiden Grenzwerte unterschiedlich, hat die Funktion an dieser Stelle eine Sprung, dh. eine Unstetigkeitsstelle.
Für die weiteren Betrachtungen sind aber auch solche Grenzwerte von Interesse, die nicht gegen einen begrenzten, festen Zahlenwert konvergieren, sondern auch solche, die „über alle Grenzen“ konvergieren, dh. gleichgültig, wie groß man die grenze wählt, man findet immer noch x Werte, für die die Funktionswerte f(x) größer sind als diese Grenze.

Definition: Die Funktion f hat an der Stelle x_0 den linksseitigen (rechtsseitigen) **uneigentlichen Grenzwert** $+\infty$ bzw. $-\infty$, wenn für jede von links (von rechts) gegen x_0 konvergierende Folge $\{x_n\}$ die Folge der Funktionswerte $\{f(x_n)\}$ den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$ bzw. $-\infty$ besitzt.
Man schreibt dann: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Damit sind alle möglichen Grenzwerte einer Funktion abgedeckt, die entstehen könne, wenn der Wert der variablen x gegen eine endliche zahl konvergiert. Für Funktionsuntersuchungen sind aber auch Grenzwerte interessant, für die der Wert von x „über alle Grenzen“ wächst, dh. x gegen $+ \infty$ oder $- \infty$ strebt. Das entspricht dem analogen Verhalten von Zahlenfolgen oder –reihen, bei denen der Index n gegen $+\infty$ läuft.

Definition: Die Funktion f hat für **$x \to \infty$ den Grenzwert G**, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta(\varepsilon)$ existiert, so daß $| f(x) - G| < \varepsilon$ für alle $x > \delta$.
Schreibweise: $\lim_{x \to \infty} f(x) = G$ oder $f(x) \to G$ für $x \to \infty$

Diese Definition eines Grenzwertes mit δ und ε ist eine der zentralsten mathematischen Konstrukte überhaupt. Der größte Teil der Mathematik besteht aus Grenzwerten. Aus diesem Grund soll diese Definition hier noch etwas erläutert werden.

Der Ausdruck $|f(x) - G| < \varepsilon$ legt um den Wert G einen „schlauchartigen" Bereich an, der von G aus jeweils nach oben und unten die Breite ε hat. Dass die Breite nach oben und unten zu sehen ist, wird durch den Betrag hervorgerufen. Man will damit ausdrücken, dass es belanglos ist, ob die Funktionswerte oberhalb oder unterhalb der Grenze liegen, oder gar hin und her springen. **Diese Breite des Schlauches (= ε) ist beliebig wählbar.** Gemeint ist hier beliebig klein. **Dann kann man für eine noch so kleine Breite immer einen Wert δ finden, so dass der Funktionswert innerhalb dieses Schlauches liegt.** Der Wert für dieses δ ist natürlich vom gewählten Wert von ε abhängig, was durch die Schreibweise δ(ε) ausgedrückt werden soll. Im allgemeinen heißt das, je kleiner man ε wählt, desto größer muss man δ wählen.

15.2. Asymptotisches Verhalten von Funktionen

15.2.1 Senkrechte Asymptoten

Existiert für eine Funktion f an der Stelle x_0 ein rechts- oder linksseitiger **uneigentlicher Grenzwert**

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \pm\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0-0} f(x) = \pm\infty$$

so ist x_0 eine Unendlichkeitsstelle von f; die Funktionskurve hat die Gerade $x = x_0$ als senkrechte Asymptote. Die Funktionswerte in der Umgebung von x_0 wachsen über alle Grenzen, je näher man an die Stelle x_0 kommt. Die Schreibweisen +0 und –0 unter dem lim Symbol sollen anzeigen, dass man sich von rechts : +0 oder von links: –0 nähert. Eine solche Unendlichkeitsstelle heißt für das Kurvenbild der Funktion, dass es an dieser Stelle eine Polstelle besitzt.

ACHTUNG! Die Gerade $x = x_0$ ist einen Asymptote, aber sie ist keine Funktion.

Alle Polstellen einer Funktion sind damit auch Asymptoten. Aber es gibt nur wenige Funktionsklassen, die solche Polstellen besitzen. Die wichtigste und bekannteste Klasse sind die gebrochen rationalen Funktionen. Das sind solche Funktionen, die aus einem Bruch bestehen und im Zähler und Nenner ein Polynom zu stehen haben. Bei diesen Funktionen sind die Polstellen **die Nullstellen des Nenners**. Zu dieser Gruppe sind auch Funktionen zu zählen, die im Nenner Wurzelausdrücke stehen haben. Auch da sind die x-Werte betroffen, an denen die Wurzel den Wert 0 hat.
Eine zweite Gruppe sind Funktionen bei denen Logarithmusfunktionen im Funktionsausdruck auftreten. Logarithmusfunktionen besitzen Polstellen an den Stellen, an denen **der Ausdruck in der Logarithmusfunktion 0 wird**.
Eine dritte Gruppe sind Funktionen, bei denen die tan oder cot Funktion auftritt. Die tan Funktion hat Polstellen an den Stellen an denen der Funktionsausdruck im tan $\boldsymbol{\pi/2+k\pi}$ beträgt.

15.2.2 Asymptotische Näherungskurven für $x \to \pm\infty$

Der Begriff „asymptotische Näherungskurven“ für die zweite Form der Asymptoten ist geeigneter, als der häufig in Mathematikbüchern verwendete Begriff „waagerechte Asymptoten“, weil diese nur ein Teil der asymptotischen Näherungskurven sind. Als asymptotische Näherungskurven gelten alle Kurven (Funktionen), an die sich eine gegebene Funktionskurve annähert, wenn die x Werte nach $+\infty$ oder $-\infty$ laufen. Das können nicht nur waagerechte Kurven sein.

Alle asymptotischen Näherungskurven sind Funktionen.

In Anlehnung an die Definition des Grenzwertes für $x \to \infty$ im vorigen Kapitel kann man für solche Funktionen folgende Definition angeben:

Definition: Eine Funktion g(x) heißt **Asymptote** zu einer Funktion f(x), wenn für jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta(\varepsilon)$ existiert, so daß

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x > \delta .$$

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g(x)$ oder $f(x) \to g(x)$ für $x \to \infty$

In der graphischen Interpretation des letzten Kapitels heißt dass, man kann um die Funktion g(x) einen Schlauch mit der Breite ε legen, so dass für genügend große x Werte die Funktionswert f(x) innerhalb dieses Schlauches liegen. Daran erkennt man sofort, dass waagerechte Asymptoten nur eine Möglichkeit sind.

15.2.2.1 Funktionen, die keine asymptotischen Näherungskurven besitzen

Die meisten Funktionen besitzen keine asymptotischen Näherungskurven. Dazu gehören alle trigonometrischen Funktionen, alle ganz–rationalen Funktionen (Polynome), damit alle Geraden und Parabeln.
Dazu zählen auch alle Wurzelfunktionen und Logarithmusfunktionen. Die letzteren haben zwar Polstelle als Asymptoten, aber keine asymptotischen Näherungskurven.

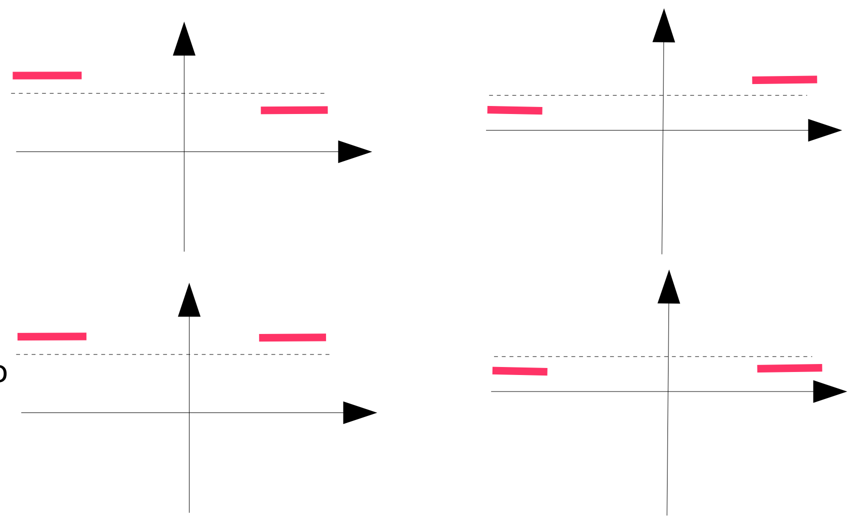
15.2.2.2 Gebrochen-rationale Funktionen

Die wichtigste und auch variantenreichste Funktionsgruppe mit asymptotischen Näherungskurven sind die gebrochen–rationalen Funktionen. Hier richtet sich die Asymptoten nach den höchsten Potenzen der Zähler- und der Nennerfunktion. Prinzipiell erhält man die Asymptote durch Polynomdivision des Zählerpolynoms durch das Nennerpolynom. Eine solche Division ist aber nur durchführbar, wenn die höchste Potenz im Zähler mindesten genau so groß ist, wie die höchste Potenz im Nenner. Ist die höchste Potenz im Zähler kleiner als im Nenner, kann keine Polynomdivision durchgeführt werden. Daraus resultieren die unterschiedlichen Asymptoten bei gebrochen–rationalen Funktionen.
Betrachtet man dazu den allgemeine Ausdruck einer gebrochen-rationalen Funktion:

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

Die höchste Potenz des Zählers ist n und die höchste Potenz des Nenners ist m. Für die Berechnung des Grenzwertes klammert man im Zähler und Nenner die jeweils höchste Potenz aus. Damit entstehen ab dem Koeffizienten a_{n-1} und b_{m-1} Ausdrücke, die für wachsendes x gegen Null gehen, da die x-Werte nur noch im Nenner vorkommen. Damit werden die Werte für die Grenzwerte von den höchsten Potenzen des Zähler und Nenner und den Koeffizienten vor den höchsten Potenzen entschieden. Die Koeffizienten sind besonders für das Vorzeichen wichtig, da sie die Vorzeichen eventuell vertauschen können, wenn das Vorzeichen des Koeffizienten negativ ist.

Wie sich eine Funktion an eine Asymptote annähert hängt von den weiteren Funktionsgliedern ab. Prinzipiell sind alle rechts aufgeführten Varianten möglich, dabei muss die Asymptote nicht immer eine waagerechte Linie sein. Der genau Verlauf kann also nur durch detaillierte Untersuchungen der Funktion gefunden werden. Beim Zeichnen von Kurvenbildern nach einer Kurvendiskussion läßt sich die Art der Annäherung meist aus dem Verlauf der Funktion im „endlichen Bereich“ entnehmen.



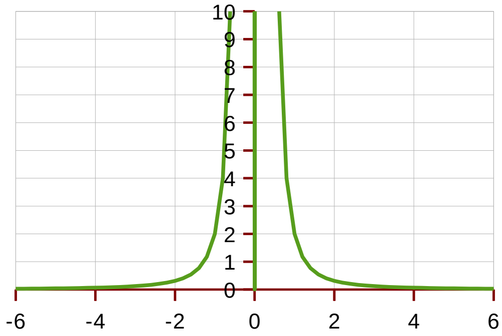
Haben gebrochen rationale Funktionen ein Zählerpolynom, dessen höchste Potenz größer ist, als die des Nennerpolynoms erhält man die Asymptote durch Polynomdivision des Zählers durch den Nenner. Diese Polynomdivision wird in den meisten Fällen nicht ohne einen Rest möglich sein, aber das Restpolynom hat immer eine höchste Potenz, die kleiner ist als die höchste Potenz des Nenners und damit geht das Restpolynom für $x \to \infty$ immer gegen 0 und liefert somit keinen Betrag zur Asymptote. Die bei der Division entstehende ganzrationale Funktion ist die Asymptote der gebrochen-rationalen Funktion für $x \to \infty$. Aus einer beliebigen gebrochen rationalen Funktion $R(x) = Z(x) / N(x)$ entsteht eine neue Funktion

$$R(x) = P(x) + \frac{Z_1(x)}{N(x)}$$

Die so entstandene Funktion P(x) ist die Asymptote der gebrochen rationalen Funktion.

Höchste Potenz des Zählers ist **kleiner** als höchste Potenz im Nenner

n < m



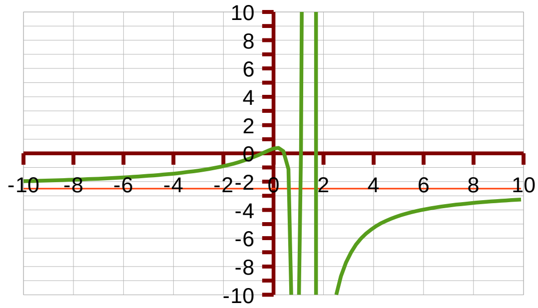
In diesen Fällen ist eine Polynomdivision nicht möglich. Der Funktionswert für $x \to \infty$ ist immer 0.Für solche Funktionen ist die x – Achse die Asymptote der Funktion gegen $+\infty$oder $-\infty$.

Das Kurvenbild des nebenstehenden Beispiels gehört zur Funktion

$$y = \frac{x^2+1}{x^4}$$

Höchste Potenz des Zählers ist **gleich** der höchsten Potenz im Nenner

n = m



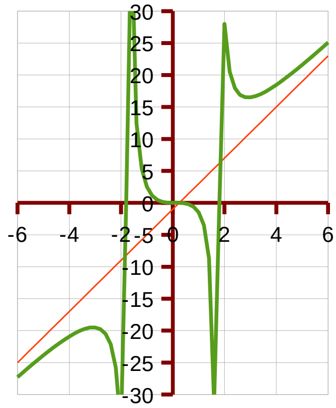
Die Polynomdivision einer solchen Funktion liefert als Funktion P(x) einen konstanten Wert, der kein x enthält. Die Funktion nähert sich für $x \to \infty$ diesem konstanten Wert an.
Die Asymptote solcher Funktionen ist eine Parallele zur x – Achse. Die Konstante ist der y-Wert der Asymptote.
Das nebenstehende Beispiel gehört zur Funktion:

$$y = \frac{-5x^2-1}{2x^2-5x+3}$$

Die Asymptote dieser Funktion ist y = – 5/2

Höchste Potenz des Zählers ist **um 1 größer** als höchste Potenz im Nenner

n = m + 1



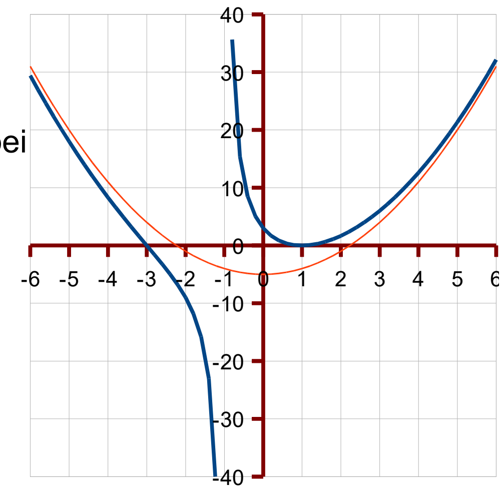
In diesen Fällen liefert die Polynomdivision als P(x) eine Geradengleichung. Die Annäherung der Funktion erfolgt nicht an einen festen Wert, sondern an die Gerade, wobei die Funktionswerte selbst für $x \to \pm\infty$ ebenfalls nach $\pm\infty$ laufen, aber nicht willkürlich, sondern entsprechend des Verlaufs der Geraden. Wenn die x-Werte genügend groß sind, findet keine Schneiden der Funktion mit der Asymptote mehr statt. Für x-Werte im endlichen Bereich kann es durchaus zu Schnittpunkten mit der Asymptote kommen. Im rechten Beispiel ist der Kurvenverlauf der Funktion

$$y = \frac{4x^3 - x^2}{x^2 - 3}$$

angegeben. Die Polynomdivision dieser Funktion führt zu einer Funktion P(x) von $y = 4x - 1$. Das ist die Asymptote der Funktion und als rote Gerade in das Koordinatensystem eingezeichnet.

Höchste Potenz des Zählers **mehr als 1 größer** als höchste Potenz im Nenner

n > m + 1



Gebrochen-rationale Funktionen dieser Art liefern bei der Polynomdivision eine ganz-rationale Funktion mindestens zweiten Grades, wobei der Grad der Funktion von der Differenz der beiden höchsten Potenzen abhängt. Die rechts dargestellt Funktion besitzt die Funktionsgleichung

$$y = \frac{(x - 1)^2(x+3)}{x + 1}$$

und entspricht dem blauen Kurvenbild.

Eine Polynomdivision des Zähler und Nenners führt zu einer Funktion $y = x^2 - 5$. Diese Funktion ist eine Parabel mit dem Scheitelpunkt auf der y–Achse und im Koordinatensystem als rotes Kurvenbild dargestellt. Hier sieht man auch noch einmal deutlich, dass ein asymptotisches Annähern von beiden Seiten der Asymptote erfolgen kann, je nachdem, welche Grenzwertbetrachtung man zugrunde legt.

Es sei nochmals darauf hingewiesen: In den letzten beiden Fällen ist der Grenzwert der Funktion f(x) gegen $\pm\infty$ ist ebenfalls $\pm\infty$, also kein endlicher Wert, aber „Schnelligkeit“ oder die Steilheit der Kurve wird durch den Kurvenverlauf der Asymptote bestimmt.

15.3. Definitionslücken

Definitionslücken sind x–Werte, für die kein y–Wert berechnet werden kann. Typischerweise ist das x-Werte, für die ein Nenner Ausdruck Null wird, da dann durch Null dividiert werden müsste und das unzulässig ist. Aber auch Funktionen, die keinen Nenner besitzen können Definitionslücken haben. Ein Vertreter einer solchen Funktion ist die tan Funktion, die an den Stelle x = π/2 , x = 3/2 π eine Definitionslücke hat. Bei der Angabe des Definitionsbereiches sind diese Werte explizit aus dem Definitionsbereich zu entfernen und dürfen nicht mit angegeben werden. Als Definitionslücken kommen zwei verschiedene Typen vor.

15.3.1 Polstellen

Polstellen sind x-Werte, für die kein y-Wert berechnet werden kann, weil der Wert unendlich wäre, unendlich aber keine Zahl ist. das sind die am häufigsten auftretenden Definitionslücken. Diese Art von Definitionslücken treten bei gebrochen-rationalen Funktionen oder auch bei der tan-Funktion auf. Bei gebrochen-rationalen Funktionen sind es genau die x-Werte, für die der Nenner den Wert 0 ergibt. damit würde sich eine Division durch Null ergeben.
Potenzfunktionen, ganz-rationale Funktionen, Sinus-Funktionen, Exponentialfunktionen besitzen keine Polstellen. Diese Funktionen sind für alle x–Werte definiert. Polstellen besitzen auch Logarithmus-Funktionen an der Stelle x=0. Wurzelfunktionen haben an der Stelle x=0 keine Polstelle, da ihr Funktionswert für x=0 ebenfalls y=0 ist. Diese Funktionen sind an der Stelle x=0 sehr wohl definiert.
Der Kurvenverlauf an einer Polstelle ist dadurch gekennzeichnet, dass das Kurvenbild diesen x-Wert nicht überschreitet, dafür die y-Werte immer weiter „nach oben“ oder „nach unten“ gehen. Die Funktion „**hat** an dieser Stelle **nicht** den Wert ∞“, sondern die Funktion „**strebt** für x gegen x0 **gegen** den Wert ∞„. Hierbei handelt es sich genau um die Punkte, die im Kapitel „senkrechte Asymptoten“ behandelt wurden.

Prinzipiell unterscheidet man bei Polstellen ebenfalls nach geraden und ungeraden Polstellen in Anlehnung an die Klassifizierung der Nullstellen.

Definition: Eine Funktion f(x) besitzt eine **gerade Polstelle,** wenn bei Annäherung an die Polstelle von links oder von rechts der gleiche Grenzwert erreicht wird:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0-0} f(x) = +\infty$$

oder

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0-0} f(x) = -\infty$$

Dabei versteht man unter der Schreibweise $x \to x_0 + 0$ eine Annäherung an die Polstelle von rechts. Es werden x-Werte betrachtet, die zu x_0 eine Zahl addieren. Unter der Schreibweise $x \to x_0 - 0$ betrachtet man eine Annäherung an die Polstelle von links. Zu x_0 werden Zahlen subtrahiert, was zu Zahlen kleiner als x_0 führt.

Definition: Eine Funktion f(x) besitzt eine ungerade Polstelle, wenn bei Annäherung an die Polstelle von links oder von rechts der verschiedene Grenzwert erreicht werden:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0-0} f(x) = -\infty$$

oder

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0-0} f(x) = +\infty$$

Bei gebrochen-rationalen Funktionen entspricht das genau der Vielfachheit der Nullstellen der Nennerfunktion.

15.3.2 Behebbare Definitionslücken

Behebbare Definitionslücken sind solche x-Werte, bei denen die Nennerfunktion **und die Zählerfunktion** einen Nullstelle besitzen. Damit entstehen Ausdrücke der Form 0/0. Diese Ausdrücke führen nicht zwangsläufig zu einem Wert, der unendlich ist. Ausdrücke dieser Form können **jeden beliebigen Wert** annehmen. Es ist immer für die jeweilige Funktion der Wert zu finden, der die Definitionslücke schließen kann. In der Sprache der Grenzwerte ausgedrückt heißt das, wenn man sich dem Punkt x_0 von links oder von rechts nähert erhält man immer den gleichen y-Wert.

Für die Behandlung solcher Probleme gibt es bestimmte Verfahren aus der Differenzial-rechnung, die diesen y-Wert berechnen. Diese Verfahren sind nicht Bestandteil der Schulausbildung. Für die Schulausbildung sind nur gebrochen rationale Funktionen von Interesse. Dann entstehen dort behebbare Definitionslücken, wenn die Zähler– und die Nennerfunktion eine Nullstelle besitzen. Der für diese Stelle notwendige y-Wert kann bestimmt werden, in dem man für die Zähler- und die Nennerfunktion jeweils eine Polynomdivision mit dem Linearfaktor der Nullstelle durch führt. Der Quotient der beiden verbleibenden Funktionen ist dann der y-Wert, der für diesen x-Wert zu definieren ist.

Die x–Werte für behebbare Definitionslücken sind zunächst aus dem Definitionsbereich zu entfernen.

Der nach der Polynomdivision neu entstandene y-Wert wird nachträglich für die x-Position als Funktionswert definiert.

Damit hat man die **Definitionslücke geschlossen** und die Funktion kann an dieser Stelle sowohl stetig als auch differenzierbar sein.