10. Prozentrechnung

Prozentrechnung setzt einen Wert in ein Verhältnis zu einem anderen Wert. es interessiert also nicht die tatsächliche Größe, sondern ein Verhältnis (= Quotient) zu einem andern Wert. man kann z.B die Entfernung von der Sonne zum Mars in das Verhältnis setzen zur Entfernung der Sonne zur Erde. Verhältnis heißt immer Quotient, deshalb wir dabei eine Zahl zwischen 1 und 2 herauskommen. Wenn man mit den durchschnittlichen Entfernungen rechnet ergibt das Ergebnis 1,38. Aber niemand kennt dabei die tatsächliche Entfernung in Millionen km. Das Maß, welches hier in der Astronomie zugrunde gelegt wird ist die Astronomische Einheit, die ziemlich willkürlich aber vernünftig als die Entfernung zwischen Sonne und Erde festgelegt wurde.

- Mit diesem prinzipiellen Abstand kann jeder etwas anfangen, auch wenn die tatsächlichen Werte nicht kennt.
- Wenn man die Verhältniszahl kennt und auch die Zahl, auf die sich dieses Verhältnis bezieht, kann man auch die tatsächliche Entfernung bestimmen.

Wenn man sich dann die Grundlagenzahl der Astronomischen Einheit beschafft (= 149,6 Mio km) kann man die Entfernung zwischen Sonne und Mars in km angeben.

Genau dieses Vorgehen verfolgt die Prozentrechnung. Zu einem Wert, den man kennt oder auch nicht kennt gibt es eine Basiszahl zu der man diesen Wert in Beziehung setzen soll. Dazu geht man der Einfachheit halber davon aus, dass die Basiszahl einem Wert von 100 entspricht. Diese Zahl 100 hat keine Maßeinheit, da sie ein Verhältnis aus zwei Zahlen mit gleicher Maßeinheit ist und deshalb die Maßeinheiten sich kürzen.

Prozentrechnung heißt: Beziehe den Basiswert auf 100 und berechne, wieviel Anteile von 100 die zweite Zahl entspricht.

Damit hat man eine generelle Maßeinheit geschaffen, auf die alles bezogen werden kann. Diese Maßeinheit heißt 100.

Die tatsächliche Maßeinheit kann jetzt eine beliebige Maßeinheit sein. Man kann die Frage stellen, wieviel sind 267 kg bezogen auf die Gesamtheit von 1 t. Dann sind die 100 der 1t gleichzusetzen. Man kann fragen, wieviel sind 23,76 € von ursprünglich 250 €, die man vielleicht vor dem Urlaub besessen hatte. Dann sind die 100 mit dem Wert von 250 € gleichzusetzen.

Das entscheidende ist, dass das Verhältnis der angegebenen Maßzahl zur Basismaßzahl das gleiche ist, wir der berechnete Anteil zu 100.

$$\frac{angegebene\,Maßzahl}{Basiszahl} = \frac{gesuchte\,Verhältniszahl}{100}$$

In dieser mathematischen Gleichung sind drei variable Größen enthalten. Um diese Gleichung überhaupt lösen zu können **müssen** zwei dieser drei Größen gegeben sein.
Erste Grundlage für Prozentrechnung:

> In jeder Aufgabenstellung müssen **genau zwei** Zahlenwerte gegeben sein, die zu dieser Aufgabenstellung gehören.

Zweite Grundlage Prozentrechnung:

> Diese beiden gegebenen Zahlen müssen zwei von den drei möglichen Werten **zugeordnet** werden. Der dritte verbleibende Wert ist dann die gesucht Größe.

Da aus der Gleichung leicht zu erkennen ist, dass es drei verschiedene gesuchte

Größen geben kann, sollen als nächstes diese drei Fälle einzeln untersucht und beschrieben werden. Dazu werden die Berechnungen außer mit der angegebenen Bruchgleichung auch mit einem Dreisatz berechnet.

Prozentrechnung ist direkter Dreisatz.

Es soll aber dazu angemerkt sein, dass auf lange Sicht die Dreisatzrechnung zu kompliziert und zu aufwendig ist. Man sollte sich an die Methode der Bruchrechnung gewöhnen. In der Prozentrechnung werden in der angegebenen Bruchgleichung folgende Bezeichnungen benutzt:

$$\frac{Prozentwert}{Grundwert} = \frac{Prozentsatz}{100}$$

Im weiteren wird nur noch mit diesen Bezeichnern gearbeitet.

10.1. Berechne den Prozentwert

$$\frac{\textbf{Prozentwert}}{\textbf{Grundwert}} = \frac{\textbf{Prozentsatz}}{100}$$

Der rot gekennzeichnete Wert ist gesucht und die beiden blau gekennzeichneten Wert müssen gegeben sein. Jetzt ist die Bruchgleichung nach dem gesuchten Wert umzustellen, dh., die gesamte Gleichung ist mit „Grundwert“ zu multiplizieren.

$$\boxed{\textbf{Prozentwert} = \frac{\textbf{Prozentsatz} \cdot \textbf{Grundwert}}{100}}$$

Das ist die umgestellte Formel für die Berechnung des Prozentwertes.

1. Für die Dreisatzrechnung geht man von dem **Teil des Bruches** aus, Zähler oder Nenner, bei dem **beide Werte** gegeben sind. Im Zähler ist nur der Prozentsatz bekannt, aber nicht der Prozentwert, der ist gesucht. Im Nenner ist der Grundwert bekannt und natürlich die konstante Zahl 100. Damit sind beide Nenner bekannt, also beginnt man mit den Nennern.
2. Auf der **Seite des Gleichheitszeichens**, auf der zwei Werte gegeben sind, wird der Wert der ersten Zeile **durch Division** auf den Wert „1“ gebracht. In diesem Fall ist es die rechte Gleichungsseite, bei der „Prozentsatz“ und „100“ bekannt sind. Die zweite gegebene Zahl dieser Gleichungsseite bestimmt den Wert mit dem dann multipliziert werden muss.

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Grundwert} \sim 100 & \textbf{Division durch den Wert der rechten Seite} \\
\dfrac{\textbf{Grundwert}}{100} \sim 1 & \textbf{Multiplikation mit dem zweiten Wert der rechten Seite} \\
\dfrac{\textbf{Grundwert} \cdot \textbf{Prozentsatz}}{100} \sim \textbf{Prozentsatz} & \\
\textbf{Prozentwert} \sim \textbf{Prozentsatz} &
\end{array}$$

	Maßeinheit	%	
	Grundwert	100	
: 100		1	: 100
• Prozentsatz	Prozentwert	Prozentsatz	• Prozentsatz

Die Seite, auf der die grünen Pfeile stehen gibt die Rechnung vor, die auszuführen ist. Die Seite, auf der die gelben Pfeile stehen, hat die gleiche Rechnung nachzuvollziehen.

Musteraufgabe:
Wieviel sind 5 % von 700

$$\text{Prozentwert} = \frac{5 \cdot 700}{100}$$

	Betrag in €	%	
	700	100	
: 100	7	1	: 100
• 5	35	5	• 5

Diese Seite bestimmt, was gerechnet wird: : 100 • 5

Diese Seite hat sich daran zu halten und zieht nach: : 100 • 5

10.2. Berechne den Prozentsatz

$$\frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}} = \frac{\text{Prozentsatz}}{100}$$

Der rot gekennzeichnete Wert ist wieder gesucht und die beiden blau gekennzeichneten Wert sind gegeben. Jetzt ist die Bruchgleichung nach dem gesuchten Wert umzustellen, dh., die gesamte Gleichung ist mit „100“ zu multiplizieren.

$$\boxed{\text{Prozentsatz} = \frac{\text{Prozentwert} \cdot 100}{\text{Grundwert}}}$$

Mit dieser Formel berechnet man den Prozentsatz.

1. Für die Dreisatzrechnung geht man von dem **Teil des Bruches** aus, Zähler oder Nenner, bei dem **beide Werte** gegeben sind. Im Zähler ist nur der Prozentwert bekannt, aber nicht der Prozentsatz, der ist gesucht. Im Nenner ist der Grundwert bekannt und natürlich die konstante Zahl 100. Damit sind beide Nenner bekannt, also beginnt man mit den Nennern.
2. Auf der **Seite des Gleichheitszeichens**, auf der zwei Werte gegeben sind, wird der Wert der ersten Zeile **durch Division** auf den Wert „1“ gebracht. In diesem Fall ist es die linke Gleichungsseite, bei der „Prozentwert“ und „Grundwert“ bekannt sind. Die erste Zahl bestimmt die Zahl, durch die zu dividieren ist, die zweite gegebene Zahl bestimmt den Wert mit dem dann multipliziert werden muss.

$$\textbf{Grundwert} \sim 100 \quad \textbf{Division durch den Wert der linken Seite}$$

$$1 \sim \frac{100}{\textbf{Grundwert}} \quad \textbf{Multiplikation mit dem zweiten Wert der linken Seite}$$

$$1 \cdot \textbf{Prozentwert} \sim \frac{100}{\textbf{Grundwert}} \cdot \textbf{Prozentwert}$$

$$\textbf{Prozentwert} \sim \textbf{Prozentsatz}$$

Maßeinheit	%
Grundwert	100
1	
Prozentwert	Prozentsatz

: Grundwert
• Prozentwert

Der Aufbau der Tabelle entspricht dem Aufbau zur Berechnung des Prozentwertes. Der Unterschied besteht darin, dass die Seite „Grundwert – Prozentwert“ die Berechnung bestimmt und nicht die Seite „Prozentwert – 100“. Als Ergebnis steht wieder auf der linken Seite der Prozentwert, der aber bereits gegeben war und auf der rechten Seite auch wieder der Prozentwert, der aber jetzt berechnet wurde.

Wieviel % sind 15€ von 200€

$$\textbf{Prozentsatz} = \frac{15 \cdot 100}{200}$$

Preis in €	%
200	100
1	0,5
15	7,5

: 200
• 15

10.3. Berechne den Grundwert

$$\frac{\textbf{Prozentwert}}{\textbf{Grundwert}} = \frac{\textbf{Prozentsatz}}{100}$$

Bei dieser dritten möglichen Berechnungsmethode wird sich einiges mehr ändern, als bei den beiden Vorhergehenden. Im Gegensatz zu den beiden ersten Berechnungen steht hier die gesuchte Zahl im Nenner, während bei den ersten beiden die gesuchte Zahl im Zähler stand. Allein von der Bruchrechnung her sind hier mehr Schritte notwendig. Es reicht nicht, den „Prozentwert“ auf die andere Seite zu bringen, man muss den „Grundwert“ in den Zähler bringen. Um das zu erreichen, muss man mit dem „Grundwert“ multiplizieren. Dann steht dieser aber auf der Seite von „Prozentsatz“ und „100“. Also muss man noch mit „100“ multiplizieren und durch „Prozentsatz“ dividieren um den „Grundwert“ allein auf der rechten Seite stehen zu haben.

$$\boxed{\textbf{Grundwert} = \frac{\textbf{Prozentwert} \cdot 100}{\textbf{Prozentsatz}}}$$

1. Für die Dreisatzrechnung geht man von dem **Teil des Bruches** aus, Zähler oder Nenner, bei dem **beide Werte** gegeben sind. Im Zähler ist der Prozentwert und der Prozentsatz gegeben. Im Nenner ist der Grundwert gesucht.
2. Auf der **Seite des Gleichheitszeichens**, auf der zwei Werte gegeben sind, wird der Wert der ersten Zeile **durch Division** auf den Wert „1“ gebracht. In diesem Fall ist es die rechte Gleichungsseite, bei der „Prozentsatz“ und „100“ bekannt sind. Die erste Zahl bestimmt die Zahl, durch die zu dividieren ist, die zweite gegebene Zahl bestimmt den Wert mit dem dann multipliziert werden muss.

$\text{Prozentwert} \sim \text{Prozentsatz}$ **Division durch den Wert der rechten Seite**

$\frac{\text{Prozentwert}}{\text{Prozentsatz}} \sim 1$ **Multiplikation mit dem zweiten Wert der rechten Seite**

$\frac{\text{Prozentwert}}{\text{Prozentsatz}} \cdot 100 \sim 100$

$\text{Grundwert} \sim 100$

: Prozentsatz

• 100

Maßeinheit	%
Prozentwert	Prozentsatz
	1
Grundwert	100

: Prozentsatz

• 100

4% sind 30 €, wieviel € sind dann 100%

$$\text{Grundwert} = \frac{30 \cdot 100}{4}$$

: 4

• 100

Betrag in €	%
30	4
7,5	1
750	700

: 4

• 100

Damit sind die Grundaufgaben der Prozentrechnung dargestellt. Es ist nicht empfehlenswert sich die drei Formeln für die drei verschiedenen Varianten zu merken. Man soll sich die Ausgangsformel für die Prozentrechnung merken:

$$\frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}} = \frac{\text{Prozentsatz}}{100}$$

Je nach den gegebenen und dem gesuchten Wert sollte diese Formel entsprechend umgestellt werden.

Alle die bisher dargestellten Rechnung stehen im Zusammenhang mit dem Grundwert, der einer Prozentzahl von 100 entspricht. Nun kann man Prozentrechnung auch ohne die Benutzung des Grundwertes verwenden. Dazu soll folgendes Beispiel dienen:

> Nach einer Preiserhöhung auf 115 % kostet eine Ware 2100 €. Vor dieser Preiserhöhung wurde die Ware zu 86% des ursprünglichen Verkaufspreises angeboten. Wieviel musste man bezahlen, als die Ware noch 86% des ursprünglichen Preises betrug.

Bei dieser Aufgabenstellung ist der Grundwert von 100% nicht bekannt, er ist aber auch nicht gesucht. Zur Lösung dieser Aufgabenstellung gibt es zwei Wege.

1. Die Prozentformel wird erweitert auf zwei allgemeine Prozentsätze, ohne die festgelegten 100%.
2. Die Aufgabe wird unter Verwendung des Grundwertes in zwei Schritten berechnet.

Es sollen hier beide Wege dargestellt werden, obwohl der 1. Weg ausreichend ist. Allerdings ist der Grundgedanke des 2. Weges auch für andere Aufgaben wichtig, bei denen das Endergebnis nach mehreren Schritten bekannt ist, um man soll den Ausgangswert der gesamten Veränderung bestimmen.

10.4. Berechnung aus zwei Prozentwerten oder zwei Prozentsätzen

10.4.1 Berechnung ohne Benutzung des Grundwertes

Sind zwei Prozentsätze oder zwei Prozentwerte gegeben, dann benutzt man einen der Prozentwerte an Stelle des Grundwertes. Der diesem Prozentsatz zugeordnete Prozentwert wird dann an Stelle des Wertes 100, dem Prozentsatz des Grundwertes, benutzt. Damit verändert sich die Prozentformel zu folgender Verallgemeinerung:

$$\frac{\textbf{Prozentwert}\,1}{\textbf{Prozentwert}\,2} = \frac{\textbf{Prozentsatz}\,1}{\textbf{Prozentsatz}\,2}$$

Setzt man für „Prozentwert 2“ den „Grundwert“ und für „Prozentsatz 2“ den Wert „100“ ein, erhält man die ursprüngliche Formel der Prozentrechnung.
Die weitere Berechnung, ob über Formel oder über Dreisatz erfolgt in der gleichen Weise. Für das oben angegebene Beispiel würde die Formel folgendes Aussehen bekommen:

$$\frac{2100\,\text{€}}{\mathbf{x}\,\text{€}} = \frac{115}{86}$$

Stellt man diese Formel nach x € um, erhält man den Prozentwert, der dem Prozentsatz von 86 % entspricht. Zum Vergleich mit dem zweiten Rechenweg soll hier nur das Ergebnis angegeben werden: 1 570,43 €

10.4.2 Berechnung des Grundwertes aus einer mehrfachen prozentualen Veränderung

Obwohl der Rechenweg etwas aufwendiger ist, soll er hier erläutert werden, da er sehr oft bei Zinsrechnungen benötigt wird. Der Grundgedanke der Berechnung wird dann auch für diese Fälle benötigt. Die allgemeine Aufgabenstellung lautet:

> Nach mehreren prozentualen Veränderungen bei denen entweder die Prozentsätze bekannt sind, oder die Prozentwerte, ist der Ausgangswert vor allen diesen Veränderungen gesucht.

In der Zinsrechnung spiegelt sich diese Aufgabenstellung etwa in folgendem Problem wieder:

> Eine Person legt bei einer Bank einen Geldbetrag über mehrere Jahre an. Die Zinssätze in den einzelnen Jahren sind unterschiedlich, aber bekannt. Nach all den Jahren erhält die Person einen bekannten Betrag ausgezahlt. Wieviel hat die Person ursprünglich angelegt.

Man könnte eine solche Aufgabenstellung als „Rückrechnung auf den Ausgang" bezeichnen. Und genau so muss auch die Berechnung erfolgen. Es wird mit dem Endergebnis begonnen. Nur für das Endergebnis sind Prozentwert und Prozentsatz bekannt. In gewisser Weise entspricht der Einzahlungsbetrag dem 100% allerdings gibt es mehrere prozentuale Veränderungen und nicht nur eine und damit gibt es auch mehrere Grundwerte, für jede Teilaufgabe einen.

Hier soll die Formel zur Rückrechnung eines Prozentwertes, der durch mehrfache prozentuale Veränderung entstanden ist, hergeleitet werden. Da diese Berechnung für Zinsaufgaben sehr oft benötigt wird, sollt man den Gedanken dahinter erfassen, dann kann man sich andere Formeln selbst herleiten.
Es gibt einen Grundwert, den man nicht kennt und einen Prozentsatz, der bekannt sein muss und einen Prozentwert, den man auch nicht kennt, da er ein zweites mal verändert wird.

$$\frac{\textbf{Prozentwert}\,1}{\textbf{Grundwert}} = \frac{\textbf{Prozentsatz}\,1}{100}$$

Die zweite Prozentrechnung hat als Grundwert nicht mehr den ursprünglichen, sondern den sich nach der ersten Veränderung ergebenden Prozentwert. Für diese zweite Änderung gibt es einen zweiten Prozentsatz und damit entsteht ein neuer, zweiter Prozentwert.

$$\frac{\textbf{Prozentwert}\,2}{\textbf{Prozentwert}\,1} = \frac{\textbf{Prozentsatz}\,2}{100}$$

Der Prozentsatz der ersten Berechnung wird zum Grundwert der zweiten Berechnung und erhält somit für die zweite Berechnung den Prozentsatz 100 %.

Jetzt ist aber der zweite Prozentwert bekannt, er entspricht dem Auszahlungsbetrag, der die Zinsen der beiden Jahre einschließlich des ursprünglich eingezahlten Grundwertes. da der zweite Prozentwert auch den Grundwert mit enthält, kann nicht mit den Zinsen p% gerechnet werden, sondern muss mit q% gerechnet werden. q enthält immer den Grundwert mit, entweder als Zinsfaktor mit q = 1 + p oder als Prozentwert mit q% = 100% + p%. da Prozentsatz 2 und Prozentwert 2 bekannt sind, muss die obige Formel nach Prozentwert 1 umgestellt werden.

$$\textbf{Prozentwert}\,1 = \frac{100}{\textbf{Prozentsatz}\,2} \cdot \textbf{Prozentwert}\,2$$

Es soll zunächst davon ausgegangen werden, dass damit der Prozentsatz 1 bekannt ist und deshalb kann man die erste Prozentformel nach dem Grundwert umstellen:

$$\textbf{Grundwert} = \frac{100}{\textbf{Prozentsatz}\,1} \cdot \textbf{Prozentwert}\,1$$

Die Formel hat formal das gleiche Aussehen wie die vorhergehende, was nicht verwundert, da in beiden Fällen der Prozentwert berechnet wird, der dem 100 % entspricht. Allerdings kann man jetzt für den Prozentwert 1 die obige Formel einsetzen, um das Zwischenergebnis für Prozentwert 1 zu vermeiden.

$$\textbf{Grundwert} = \frac{100}{\textbf{Prozentsatz}\,1} \cdot \frac{100}{\textbf{Prozentsatz}\,2} \cdot \textbf{Prozentwert}\,2$$

Berücksichtigt man, dass für die Prozentsätze nicht der Wert p sondern der Wert q einzusetzen ist, so kann man folgende Endformel angeben:

$$\textbf{Grundwert} = \frac{1}{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2} \cdot \textbf{Prozentwert}\,2$$

Aus dieser Formel ist klar, wie man die Berechnung gestalten muss, wenn mehrere Jahre im Spiel sind. Es ist jeweils durch die Zinsfaktoren zu dividieren. Die Formel ist so allgemein, dass sowohl Zinszuschläge als auch Zinsabschläge verwendet werden können. Für Zinsabschläge sind die Werte für q kleiner als 1.

10.5. Formulierungen der Prozentrechnung und Umsetzung in Formeln

…. kostet vor der Preiserhöhung 200 €	200 € = 100 %
…. kostet nach der Preiserhöhung um 10 % 200 €	200 € = 110 %
…. kostet nach der Preissenkung um 15 % 200 €	200 € = 85 %
…. kostet nach 6% Rabatt noch 200 €	200 € = 94 %
….. hat 200 € gekostet und jetzt nach der Preiserhöhung 225 €	200 € = 100 %
	225 € = ? %
…. hat 32 % Abzüge vom Lohn, das sind 200 €	200 € = 32 %
…..hat 32 % Abzüge und erhält noch 1200 €	1200 € = 68 %
…. hat von ihrem Lohn von 2500 € 32 % Abzüge	2500 € = 100 %
Abzüge:	x € = 32 %
… erhält als Nettogehalt …	y € = 68 %
… erhält nach einer Gehaltserhöhung von 10% 2500 €	2500 € = 110 %
…. erhält auf sein Gehalt von 2500 eine Erhöhung von 10 %,	2500 € = 100 %
wie groß ist sein neues Gehalt.	x € = 110 %
… spart 53 € gegenüber dem ausgewiesenen Preis von 200 €	200 € = 100 %
Ersparnis	53 € = x % = 100 – y %
noch zu bezahlender Preis	147 € = y % = 100 – x %
… spart gegenüber dem ausgewiesenen Preis von 1000 € 8 %	1000 € = 100 %
Einsparung	x € = 8 % = 1000 – y
noch zu bezahlender Preis	y € = 92 % = 1000 – x
… bezahlt gegenüber dem ausgewiesenen Preis von 200 € nur 160 €	200 € = 100 %
Ersparnis	40€ = x % = 100 – y %
noch zu bezahlender Preis	160 € = y% = 100 – x %
… bezahlt nur 85% gegenüber dem ausgewiesenen Preis von 200 €:	200 € = 100 %
Ersparnis	x € = 15 % = 200 – y
noch zu bezahlender Preis	y € = 85 % = 200 – x
…. hat bisher mit 16% Mehrwertsteuer 200 € gekostet. Wieviel kostet es bei 19 % Mehrwertsteuer.	
alter Preis	200 € = 116 %
neuer Preis	x € = 119 %

10.5.1 Änderung <u>von</u> Grundwert <u>auf</u> Prozentwert / Prozentsatz

von — gibt immer den <u>Absolutwert</u> der sachbezogenen Maßeinheit an, <u>alter Ausgangswert</u>

auf — gibt immer <u>Absolutwert</u> in sachbezogener Maßeinheit oder Prozent wieder, gibt den <u>neuen Gesamtwert</u> an

…. der Preis ist **<u>von</u>** 200 € **<u>auf</u>** 250 € gestiegen

alter Preis (**von**)	**200 €** = 100 %
neuer Preis (**auf**)	**250 €** = x % (über 100 %)
um wieviel % ist der Preis gestiegen (**um**)	50 € = y %

… der Preis **<u>von</u>** 200 € ist **<u>auf</u>** 185 € reduziert (gesunken)

alter Preis (**von**)	**200 €** = 100 %
wieviel € sind jetzt zu bezahlen (**auf**)	**185 €** = x %
wieviel € sind jetzt **weniger** zu bezahlen (**um**)	15 € = y %

…. der Preis **<u>von</u>** 200 € ist **<u>auf</u>** 115 % gestiegen

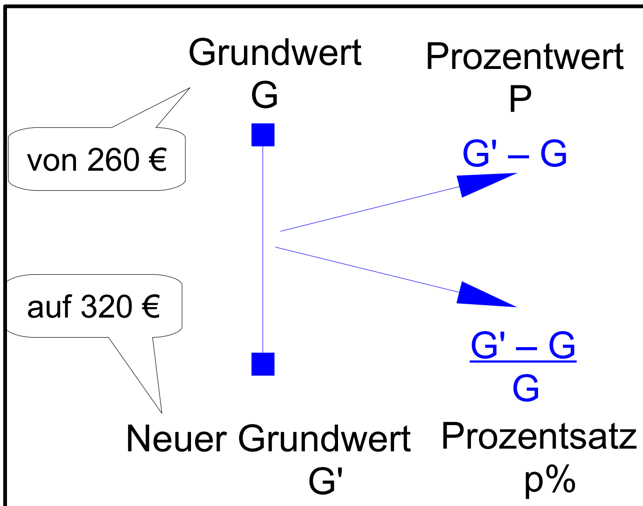
alter Preis (**von**)	**200 €** = 100 %
wieviel € sind jetzt zu bezahlen (**auf**)	x € = **115 %**
wieviel € sind jetzt **mehr** zu bezahlen (**um**)	y € = 15 %

…. der Preis **<u>von</u>** 200 € ist **<u>auf</u>** 80 % reduziert worden

alter Preis (**von**)	**200 €** = 100 %
wieviel € sind jetzt zu bezahlen (**auf**)	x € = **80 %**
wieviel € sind jetzt **weniger** zu bezahlen (**um**)	y € = 20 %

… für ein Fahrrad sind bei 19% Mehrwertsteuer 200 € Mehrwertsteuer zu bezahlen

alter Preis (**von**)		200 € = 19 %
was kostet das Fahrrad **ohne** Mehrwertsteuer	(**auf_1**)	x € = 100 %
was kostet das Fahrrad **mit** Mehrwertsteuer	(**auf_2**)	y € = 119 %



Der Preis für ein Fahrrad wurde **von** 260 € **auf** 320 € erhöht.
Wie groß ist der Erhöhungs**betrag** ?

Der Preis für ein Fahrrad wurde **von** 260 € **auf** 320 € erhöht.
Um wieviel **Prozent** wurde der Preis erhöht?

von … : alter Grundwert
auf : neuer Grundwert

Auf der linken Seite des Schemas stehen die Ausgangswert und der Endwert. Auf der rechten Seite des Schemas stehen der Änderungsbetrag und das Änderungsverhältnis. Der **Änderungsbetrag** ist gleich der Differenz des Endwertes und des Ausgangswertes. Das **Änderungsverhältnis**, der Prozentwert, ist das Verhältnis zwischen Änderungswert und altem Grundwert. Das ist die Grundaufgabenstellung der Prozentrechnung.

10.5.2 Änderung von Grundwert um Prozentsatz / Prozentwert

von gibt immer den Absolutwert der sachbezogenen Maßeinheit an, alter Ausgangswert

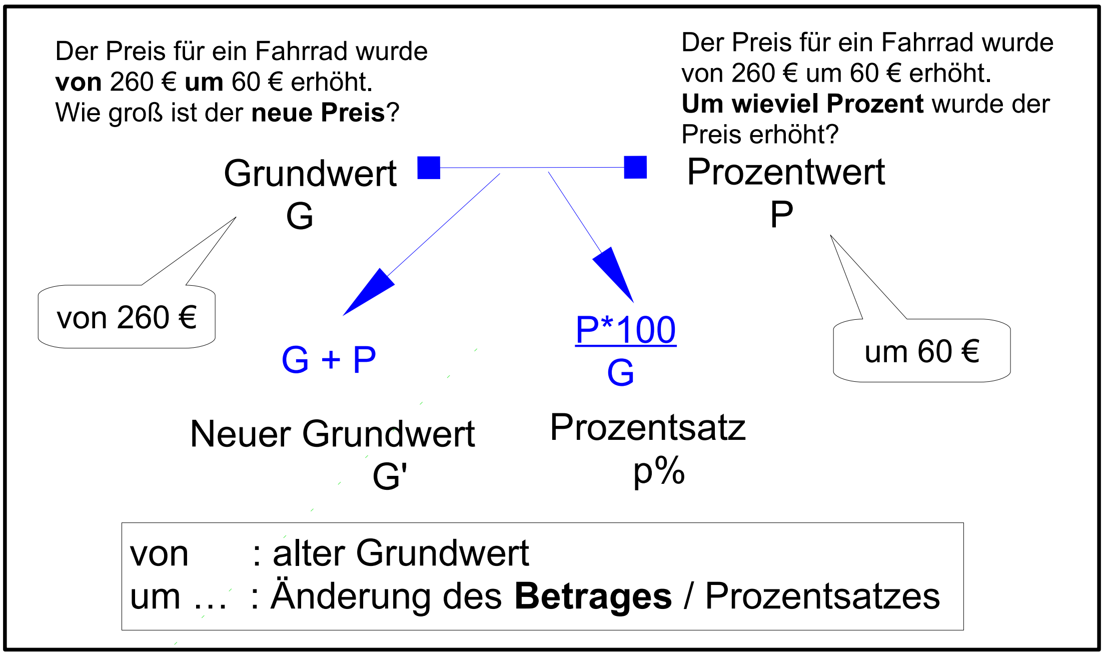
um gibt immer eine Differenz an, gibt den Wert der Änderung an, ist von den Werten, die 100 % angeben zu addieren oder subtrahieren

…. der Preis ist **von** 200 € **um** 40 € gestiegen

alter Preis	200 € = 100 %
um wieviel % ist der Preis gestiegen	40 € = y %
auf wieviel % ist der Preis gestiegen	240 € = x %

…. der Preis **von** 200 € ist **um** 25 € gesunken

alter Preis	200 € = 100 %
wieviel % sind jetzt zu bezahlen (**auf**)	175 € = x %
wieviel % sind jetzt **weniger** zu bezahlen (**um**)	25 € = y %



Neuer Grundwert = alter Grundwert + Prozentwert

Ist der alte Grundwert und der Änderungsbetrag bekannt, berechnet sich der Prozentsatz wieder nach der Grundformel der Prozentrechnung zur Bestimmung des **Prozentsatzes**. Der **neue Grundwert** ist die Summe aus altem Grundwert und Änderungsbetrag, dem Prozentsatz.

…. der Preis **<u>von</u>** 200 € ist **<u>um</u>** 12 % gestiegen

alter Preis	200 € = 100 %
wieviel € sind jetzt zu bezahlen **(auf)**	x € = 112 %
wieviel € sind jetzt **mehr** zu bezahlen **(um)**	y € = 12 %

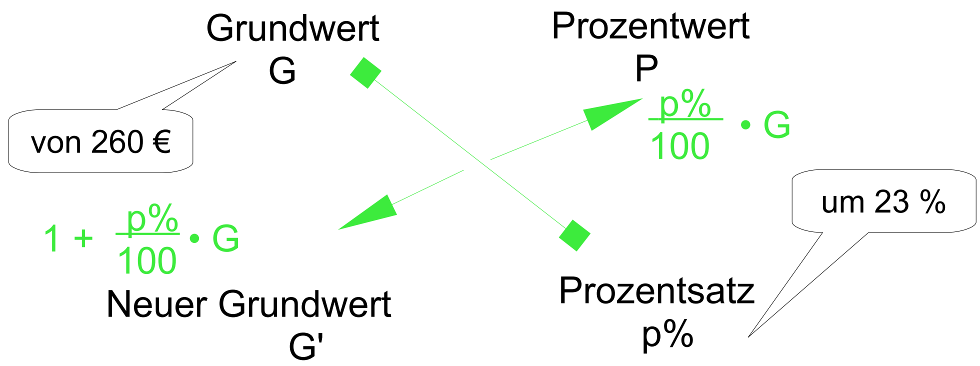
…. der Preis **<u>von</u>** 200 € ist **<u>um</u>** 15 % gesunken (reduziert, Rabatt,...)

alter Preis	200 € = 100 %
wieviel € sind jetzt zu bezahlen (**auf**)	x € = 85 %
wieviel € sind jetzt **weniger** zu bezahlen (**um**)	y € = 15 %

Der Prozentwert ist zunächst aus dem Prozentsatz und dem Grundwert zu bestimmen.

Der Preis für ein Fahrrad wurde **von** 320 € **um** 23% erhöht.
Wie groß ist der **neue Preis**?

Der Preis für ein Fahrrad wurde **von** 320 € **um** 23% erhöht.
Wie groß ist die **Differenz zum alten Preis**?



von : alter Grundwert
um … : Änderung des Betrages / **Prozentsatzes**

Prozentwert Prozentsatz • alter Grundwert

Neuer Grundwert = alter Grundwert + Prozentwert
= alter Grundwert + Prozentsatz • alter Grundwert
= alter Grundwert • (1 + Prozentsatz)

Da die prozentuale Änderung des alten Grundwertes als „um“ angegeben ist, ist das Ergebnis nicht der neue Grundwert, sondern nur der **Änderungswert**. Dieser Änderungswert ist dem alten Grundwert hinzuzuaddieren um den **neuen Grundwert** zu bestimmen. Interessiert der Änderungswert nicht, kann man den neuen Grundwert auch direkt aus dem alten Grundwert (1....   und dem Änderungswert aus der Rechnung .. + p%/100) bestimmen.
Die rechtsstehende Formel ist die direkt umgestellte Formel der Prozentrechnung.

10.5.3 Änderung <u>um</u> Prozentsatz / Prozentwert <u>auf</u> neuen Grundwert

um gibt immer eine <u>Differenz</u> an, gibt den Wert der Änderung an ist von den Werten, die 100 % angeben zu addieren oder subtrahieren

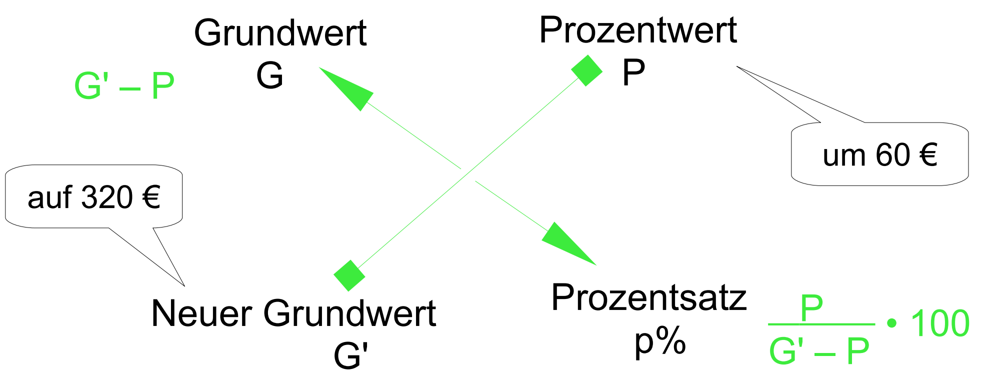
auf gibt immer den <u>Absolutwert</u> der sachbezogenen Maßeinheit an, <u>neuer Gesamtwert</u>

…. der Preis wurde **<u>um</u>** 50 € **<u>auf</u>** 96 % gesenkt

Änderung Sache, Änderung Prozent (**um**)	50 € = 4 %
alter Gesamtwert (**von**)	x € = 100 %
neuer Gesamtwert (**auf**)	y € = 96 %

…. der Preis wurde **<u>um</u>** 100 € **<u>auf</u>** 115 % erhöht

Änderung Sache, Änderung Prozent (**um**)	100 € = 15 %
alter Gesamtwert (**von**)	x € = 100 %
neuer Gesamtwert (**auf**)	y € = 115 %



Der Preis für ein Fahrrad wurde **um** 60 € **auf** 320 € erhöht.
Wie groß war der alte **Preis**?

Der Preis für ein Fahrrad wurde **um** 60 € **auf** 320 € erhöht
Wie groß ist die **prozentuale** Erhöhung?

um … : Änderung des **Betrages** / Prozentsatzes
auf : neuer Grundwert

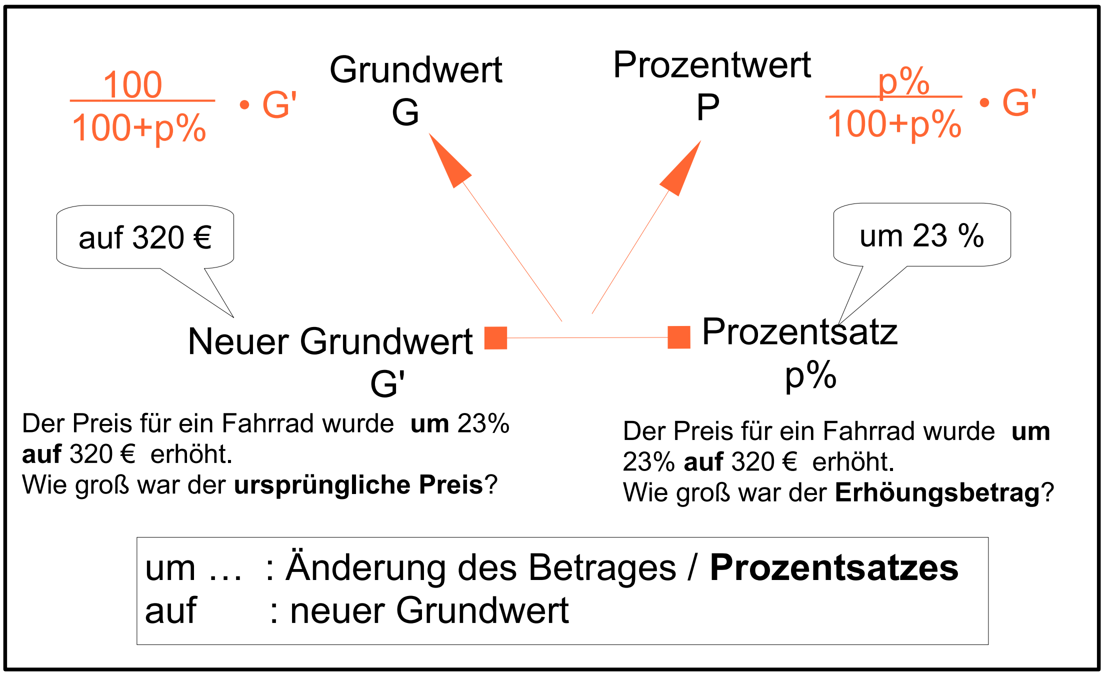
Bei der Berechnung des Prozentsatzes muss auf den alten Grundwert zurückgerechnet werden, da dieser die 100% darstellt, deshalb G = G' – P. Für die Berechnung des Prozentsatzes ist der angegebene Prozentwert auf den alten Grundwert zu berechnen. Deshalb ist P in das Verhältnis zu G' – P zusetzen und nicht in das Verhältnis zu G'. Dann würde nämlich G' als Bezugsgröße, dh. als alter Grundwert angesehen, was der Aufgabenstellung widerspricht. Deshalb steht bei der Berechnung von p% : P /(G'–P) und nicht P/G' .

…. der Preis wurde **um** 4 % **auf** 300 € angehoben

neuer Gesamtwert (**auf**)	300 € = 104 %
alter Ausgangswert (**von**)	x € = 100 %
um wieviel Prozent ist der Preis gestiegen	y € = 4 %

…. der Preis wurde **um** 4 % **auf** 200 € gesenkt

neuer Gesamtwert (**auf**)	200 € = 96 %
alter Ausgangswert (**von**)	x € = 100 %
um wieviel Prozent ist der Preis gesunken	y € = 4 %



Ist zum neuen Grundwert der Änderungssatz gegeben, dann entspricht der neue Grundwert der Summe aus 100% und dem angegebenen Änderungssatz. Für die Prozentrechnung ist also dem neuen Grundwert G' die Prozentzahl 100 + p% zuzuordnen.

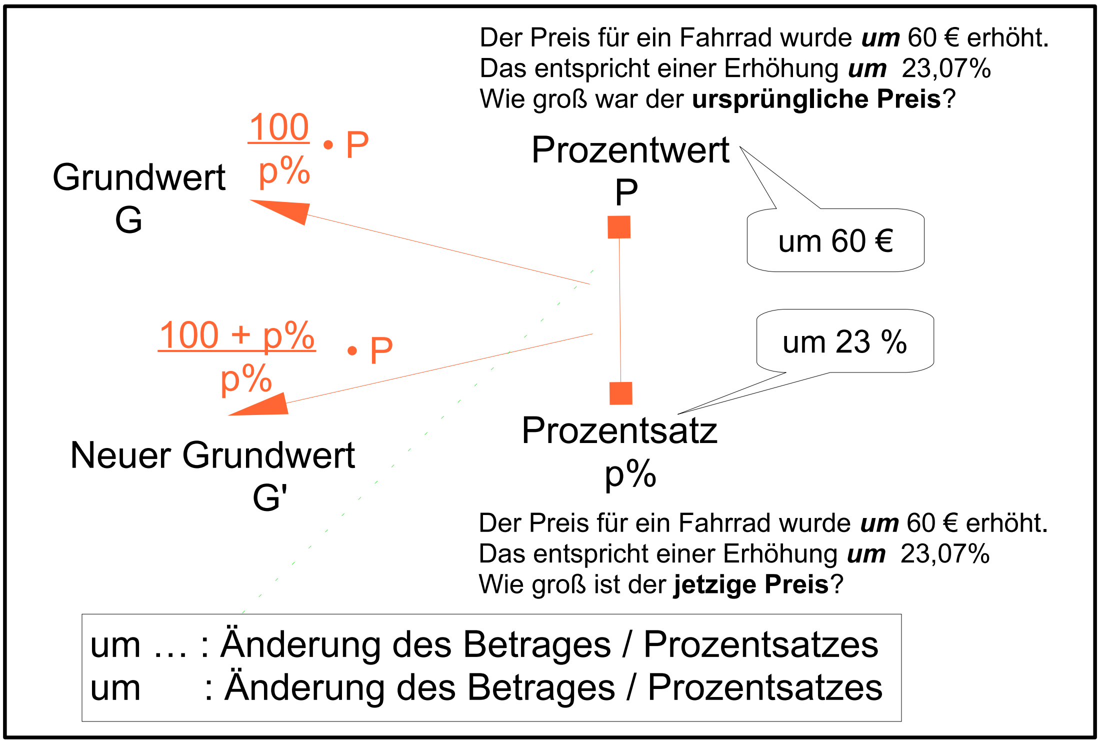
$$\frac{\text{alter Grundwert}}{\text{neuer Grundwert}} = \frac{100}{100+p\%}$$

Stellt man diese Gleichung nach dem alten Prozentwert um, erhält man die oben im Schema angegebene Formel. Für die Berechnung des Prozentwertes gelten die gleichen Grundsätze. Der Unterschied zu dem Vorhergehenden besteht nur darin, der der Prozentwert P dem Prozentsatz p% zuzuordnen ist. Der alte Grundwert G ist nicht bekannt, dafür aber der neue Grundwert G', dem die Prozentzahl 100 + p% zuzuordnen ist.

$$\frac{\text{Prozentwert}}{\text{neuer Grundwert}} = \frac{p\%}{100+p\%}$$

Durch Umstellen der Gleichung erhält man die oben angegebene Formel.

10.5.4 Änderungen um einen Prozentsatz und um einen Prozentwert



Eine weitere Möglichkeit besteht darin, dass weder alter Grundwert noch neuer Grundwert bekannt sind. In diesem Fall muss aber der Änderungswert und der Änderungssatz bekannt sein. Damit ist für die Prozentrechnung eine zusammenhängende Information von Prozentwert und Prozentsatz gegeben. Diese ermöglicht die Berechnung des Grundwertes, dh. der zu Grunde liegenden 100% und die Berechnung des Ergebnisses, dh. dem neuen Grundwert, als Prozentwert, der dem Prozentsatz 100 + p% zuzuordnen sind.

$$\frac{\text{neuer Grundwert}}{\text{Prozentwert}} = \frac{100+p\%}{p\%}$$

Die Umstellung nach „neuer Grundwert“ liefert die oben stehende Formel.

$$\frac{\text{alte Grundwert}}{\text{Prozentwert}} = \frac{100}{p\%}$$

Die Umstellung nach „alter Grundwert“ liefert ebenfalls die oben stehende Formel.

10.5.5 Zusammenfassung

Bei solchen Veränderungen entsteht immer ein neuer Grundwert. Dabei ist zu unterscheiden, ob der alte oder der neue Grundwert gegeben sind und ob die prozentuale oder die mengenmäßige Veränderung gegeben ist.

Der Prozentsatz p wird in der folgenden Tabelle als Dezimalzahl verwendet und nicht als Prozentzahl.

gegeben	Prozentsatz p		Prozentwert P	
alter Grundwert G	p P G G'	p = p • G G = G + p • G	p P G G'	= P / G P G = G + P
neuer Grundwert G'	p P G G'	p = G' / p = G' / (1 + p) G'	p P G G'	= P / (G' – P) P = G' – P G'

Die Formel $$\frac{\text{alte Grundwert}}{\text{Prozentwert}} = \frac{100}{p\,\%}$$

lässt sich mittels Bruchrechnung auf auf die folgende Formel umstellen:

$$\frac{\text{alte Grundwert}}{100} = \frac{\text{Prozentwert}}{p\,\%}$$

damit stehen

- auf der linken Seite der Prozentwert und der Prozentsatz zu 100% (alter Grundwert)
- auf der rechten Seite der Prozentwert und der Prozentsatz zu p% (Prozentwert)

und die Formel lässt sich fortsetzen zu

- auf der 2. rechten Seite der Prozentwert und der Prozentsatz zu 100+p% (neuer Grundwert)

$$\boxed{\frac{\text{alte Grundwert}}{100} = \frac{\text{Prozentwert}}{p\,\%} = \frac{\text{neuer Grundwert}}{100 + p\,\%}}$$

In dieser Formel stecken alle Umrechnungen der letzten Abschnitte. Je nach Aufgabenstellung sind der 1. und 2. Bruch, der 2. und 3. Bruch oder der 1. und 3 . Bruch zu einer Gleichung zusammenzusetzen.

Oder als Dreisatz angegeben, wenn einer der Prozentwerte bekannt ist und die zugehörigen Prozentsätze bestimmt werden sollen.

alter Grundwert	$\widehat{=}$ 100	Prozentwert	$\widehat{=}$ p%	neuer Grundwert	$\widehat{=}$ 100 + p%
1	$\widehat{=}$	1	$\widehat{=}$	1	$\widehat{=}$
Prozentwert	$\widehat{=}$	alter Grundwert	$\widehat{=}$	Prozentwert	$\widehat{=}$
neuer Grundwert	$\widehat{=}$	neuer Grundwert	$\widehat{=}$	alter Grundwert	$\widehat{=}$

In diesen Fällen ist so zu dividieren, dass auf der linken Seite der Dreisatzgleichungen eine „1“ entsteht. Auf der rechten Seite entsteht ein entsprechender Faktor, der dem jeweiligen Wert „1“ entspricht.

Sind statt der Prozentwerte die Prozentsätze gegeben, ist die Rechnung im Dreisatz so umzustellen, dass auf der rechten Seite der 2. Zeile eine „1“ entsteht. Für den Ausdruck in der 3. Zeile (hier 3. und 4. Zeile) ist entscheidend, was eigentlich berechnet werden soll.

alter Grundwert	$\widehat{=}$ 100	Prozentwert	$\widehat{=}$ p%	neuer Grundwert	$\widehat{=}$ 100 + p%
	$\widehat{=}$ 1		$\widehat{=}$ 1		$\widehat{=}$ 1
	$\widehat{=}$ p		$\widehat{=}$ 100		$\widehat{=}$ p
	$\widehat{=}$ 100 + p		$\widehat{=}$ 100 + p		$\widehat{=}$ 100

11. Zinsrechnung

Die einfache Berechnung von Zinsen ist eine Anwendung der Prozentrechnung. Die Formeln entsprechen denen der Prozentrechnung, nur die Bezeichnungen unterscheiden sich.

Prozentrechnung

$$\frac{\textbf{Prozentwert}}{\textbf{Grundwert}} = \frac{\textbf{Prozentsatz}}{100}$$

Zinsrechnung

$$\frac{\textbf{Zinsen}}{\textbf{Kapital}} = \frac{\textbf{Zinssatz}}{100}$$

Zinsen lassen sich anwendungsseitig in zwei Varianten berechnen:

1. Jemand legt Geld bei einer Bank an und bekommt dafür Zinsen von der Bank. Die Bank bezahlt einen Preis dafür, dass die Person der Bank ihr Geld überlässt.
2. Eine Person leiht sich von einer Bank eine Summe Geld, um sich eine größer Anschaffung zu leisten. Die Person bezahlt an die Bank einen Preis, weil die Bank ihr Bankgeld überlässt, die der Person nicht gehört.

11.1. Einfache Zinsrechnung

Bei der einfachen Zinsrechnung geht um Zinsen, die einmalig zu zahlen sind. Eine Person legt Geld bei einer Bank an und erhält am Ende des Jahres für das Geld Zinsen. Oder: Eine Person leiht sich bei einer Bank Geld und zahl das geliehene Geld einschließlich des Preises für die Leihe (= Zinsen) am Ende des Jahres an die Bank zurück. Damit ist in beiden Fällen das Geschäft abgeschlossen und die Berechnung erfolgt nach der Formel

$$\frac{\textbf{Zinsen}}{\textbf{Kapital}} = \frac{\textbf{Zinssatz}}{100}$$

Diese Berechnung kann eine geringe Abwandlung erfahren, indem das Geld nicht für ein ganzes Jahr, sondern für eine bestimmte Anzahl Tage oder Monate überlassen wird. Diese Überlassung ist auch in beide Richtungen möglich. Damit zahl die Bank nicht den vollen Zinsbetrag für ein ganzes Jahr und auch der Leiher muss nicht den Preis des Leihens für ein Jahr bezahlen, sondern nur für den Zeitraum, indem er das Geld geliehen hat.
Dieser anteilige Zinsbetrag entsteht durch einen anteiligen Zinssatz. Banken rechnen 1 Jahr mit 360 Tagen oder 12 Monaten, je nachdem, wie das Geld geliehen/verliehen wurde. Deshalb wird am Ende einer solchen Periode nicht der Betrag für einen Zinssatz p% fällig, sondern nur der Betrag für p% • Tage / 360 oder p% • Monate /12. Der Anzeil des Jahres drückt sich also zunächst nur im Zinssatz aus.

$$\frac{\textbf{Zinsen}}{\textbf{Kapital}} = \frac{\textbf{Zinssatz} \cdot \frac{\textbf{Tage}}{360}}{100}$$

Nach den Regeln für Bruchrechnung kann man diese Formel umschreiben in

$$\frac{\textbf{Zinsen}}{\textbf{Kapital}} = \frac{\textbf{Zinssatz} \cdot \textbf{Tage}}{100 \cdot 360}$$

Das Produkt auf der rechten Seite lässt sich in ein Produkt von zwei Brüchen umwandeln

$$\frac{\textbf{Zinsen}}{\textbf{Kapital}} = \frac{\textbf{Zinssatz}}{100} \cdot \frac{\textbf{Tage}}{360}$$

Analog kann man für eine Anzahl von Monaten folgende Formel erzeugen

$$\frac{\textbf{Zinsen}}{\textbf{Kapital}} = \frac{\textbf{Zinssatz}}{100} \cdot \frac{\textbf{Monate}}{12}$$

In den meisten Formelsammlungen sind diese Formeln nach den „Zinsen" aufgelöst. Das erschwert mitunter das Umstellen der Formel, da nicht jedes mal die Zinsen zu berechnen sind, sondern eventuell auch die Tage oder der Zinssatz. Es ist nicht sinnvoll, sich alle Auflösungen dieser Formel zu merken, sondern man sollte wissen, wie Formeln umgestellt werden, da man das mehrfach benötigt. Hier soll nur noch die Formel für die Auflösung nach „Kapital" angegeben werden, da dann von den Brüchen der rechten Seite der Kehrwert zu bilden ist. Das wird leicht falsch gemacht, da man die Brüche einfach so belässt.

$$\textbf{Kapital} = \textbf{Zinsen} \cdot \frac{100}{\textbf{Zinssatz}} \cdot \frac{360}{\textbf{Tage}}$$

Damit sind alle Formeln für die einfach Zinsberechnung bekannt.

11.2. Zinseszinsen

Zinseszinsen entstehen dadurch, dass eine Person der Bank Geld für einen längeren Zeitraum überlässt, z.B mehrere Jahre. Dann bekommt die Person für das erste Jahr die Zinsen gutgeschrieben, die werden aber nicht bei der Bank abgehoben, sondern verbleiben als weitere Leihe bei der Bank. Damit hat die Person der Bank mehr Geld geliehen, als im ersten Jahr, nämlich zusätzlich die erstatteten Zinsen. Also ist im zweiten Jahr nicht nur das ursprünglich geliehen Geld von der Bank zu verzinsen, sondern auch die Zinsen des ersten Jahres. Daher kommt der Begriff Zinseszins: Gezahlte Zinsen werden wieder verzinst.
Diesen Prozess kann man sich über mehrere Jahre fortgesetzt denken.

Der entscheidende Unterschied zur normalen Zinsrechnung besteht darin, daß man nicht mit den Zinsen weiterrechnen kann, sondern daß man immer mit dem neu entstanden Geldbetrag weiterrechnen muss. Da in der folgenden Zinsperiode nicht nur die Zinsen verzinst werden, sondern auch daß ursprünglich eingezahlte Kapital, unabhängig, wieviele Zinsen bisher gezahlt wurden, muss man immer den Gesamtbetrag für die Berechnung zugrunde legen.
Hier soll zunächst die dafür notwendige Formel hergeleitet werden.
Eine Person zahl am <u>Anfang des ersten Jahres</u> einen Betrag von K_0 ein. Am Ende des Jahres erhält er sein Zinsen $Z = K_0 * p\%$.
Dieser Betrag ist sein Gesamtbestand <u>am Ende des ersten Jahres</u>.

(Ende 0. Jahr =) Anfang 1. Jahr K_0
Ende 1. Jahr = Anfang 2. Jahr: $K_1 = K_0 + Z = K_0 + K_0 \cdot p = K_0 (1 + p)$
Ende 2. Jahr = Anfang 3. Jahr: $K_2 = K_1 + Z = (K_0 + K_0 \cdot p) + (K_0 + K_0 \cdot p) \cdot p$

Wegen der Übersichtlichkeit sind hier Klammern gesetzt. Die erste Klammer enthält den Betrag K_1 und die zweite Klammer mit dem Faktor p sind die Zinsen auch den Geldbetrag K_1 . Wenn man die Klammern ausmultipliziert erhält man folgende Gleichung:

$$K_2 = K_1 + Z = K_0 + K_0 \cdot p + K_0 \cdot p + K_0 \cdot p^2 = K_0 (1 + 2p + p^2) = K_0 (1+p)^2$$

$$\begin{aligned} K_3 = K_2 + Z &= K_0 (1 + 2p + p^2) \quad + \quad K_0 (1 + 2p + p^2) \cdot p \\ &= K_0 + K_0 \cdot 2p + K_0 \cdot p^2 \quad + \quad K_0\ p + K_0\ 2p^2 + K_0\ p^3 \\ &= K_0 (1 + 3p + 3p^2 + p^3) = K_0 (1+p)^3 \end{aligned}$$

Es tritt in jedem Jahr zum Ausgangsbetrag eine Potenz des Wertes 1 + p auf. Diesem Wert hat man einen neuen Ausdruck gegeben und nennt diesen q, den Zinsfaktor. Der Zinsfaktor sichert, das zu jedem Jahr sowohl der ursprüngliche Einzahlungsbetrag als auch die bisher aufgelaufenen Zinsen berücksichtigt werden. Er ermöglicht nicht direkt die bis dahin gezahlten Zinsen zu erfassen.
Der bis zu einem Jahr n aufgelaufene Gesamtbetrag bei einer Geldanlage, bei der die Zinsen nicht ausgezahlt werden berechnet sich aus:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$$

Die Formel lässt sich sowohl nach K_0 als auch nach q umstellen. Für Realschulen ist ein Umstellen nach n nicht möglich, da die mathematischen Voraussetzungen nicht behandelt werden. Für Gymnasien muss man die Formel auch nach n umstellen können.

Die Zinsen, die **insgesamt** in diesen n Jahren gezahlt wurden berechnen sich am einfachsten durch

$$Z_{gesamt} = K_n - K_0$$

Die Zinsen, die **im letzten Jahr n** gezahlt wurden berechnen sich aus

$$Z_n = K_n - K_{n-1}$$

Die oben angegebene Formel setzt voraus, dass der Zinssatz p während der gesamten Laufzeit gleich bleibt. Deshalb entsteht einen Potenz von q, da der Wert q immer wieder multipliziert werden muss. Ändern sich die Zinssätze während der Laufzeit, ändern sich auch die Werte für q in jedem Jahr. Gleichbleibend ist, dass die Werte von q miteinander multipliziert werden müssen, aber verschiedene werte annehmen. Deshalb tritt keine Potenz mehr auf, sondern ein Produkt:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3}$$

Treten über mehrere Jahre hinweg wieder die gleichen Zinssätze auf, dann gibt es für die zugehörigen Zinsfaktoren wieder Potenzen in der Höhe der Jahre, in denen der Zinssatz gleich ist.

11.3. Ratensparen

Nicht direkt zur Zinsrechnung, aber zum Prüfungsgebiet der Realschulen gehört das Thema „Ratensparen“. Hier gibt es zu normalen Zinseszinsrechnung einen Unterschied. Bei der Zinseszinsrechnung wird am Anfang einmalig ein Betrag eingezahlt und dann über mehrere Jahre bei der Bank gelassen. Beim Ratensparen wird jedes Jahr außerdem ein vorher festgelegter Betrag zusätzlich eingezahlt. Dieser Betrag ist jedes Jahr zu Zahlen und bleibt über die gesamte Laufzeit konstant. Dadurch erhöht sich der Gesamtbetrag nicht nur zur Zinseszins Zuwächse, sondern noch zusätzlich durch regelmäßige Einzahlungen der betroffenen Person.
Die mathematische Theorie, die diesen Berechnung zugrunde liegt ist die Theorie der „geometrischen Reihen“. „Folgen und Reihen“ sind kein Schulstoff und deshalb fällt das Verständnis für die Berechnung schwer. Deshalb sollen als erstes die geometrischen Reihen etwas genauer erklärt werden.

11.3.1 Theorie der geometrischen Reihen

Eine geometrische Folge beginnt mit einem beliebigen Anfangsglied a_0. Das nächste Element der Folge entsteht durch Multiplikation diese Elements mit einem für die Reihe konstanten Faktor q. Damit ergibt sich $a_1 = a_0 \cdot q$. das nächste Glied der Folge ergibt sich wieder aus dem Glied a_1 durch Multiplikation mit dem Faktor q.

$$a_2 = a_1 \cdot q = (a_0 \cdot q) \cdot q = a_0 \cdot q^2$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_0 \cdot q^3$$

Diese Folge lässt sich beliebig weit fortsetzen. Bei den so berechneten Elementen handelt es sich zunächst nur um einen *Folge*, noch keine Reihe. Die einzelnen Zahlen werden einfach nacheinander aufgelistet. Aus einer Folge wird eine Reihe, indem bist zum aktuellen Element alle vorherigen Elemente aufaddiert werden. Die Reihe, die aus der obigen Folge entsteht sieht folgendermaßen aus:

$$s_0 = a_0$$
$$s_1 = a_0 + a_1 = a_0 + a_0 \cdot q$$
$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2$$
$$s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3$$
$$s_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 + a_0 \cdot q^4$$

Die Elemente s (die wieder eine Folge sind) nennt man Partialsummen der Reihe. Sie stellen jeweils die Summe der Folge a bis zu einem bestimmten Index n dar. Aus der Struktur der Elemente s_k kann man erkennen, dass sich bei jedem s_k der Faktor a_0 ausklammern lässt. Damit kann man die Folge der s_k auch so schreiben:

$$s_0 = a_0 \quad 1$$
$$s_1 = a_0 \ (1 + q)$$
$$s_2 = a_0 \ (1 + q + q^2)$$
$$s_3 = a_0 \ (1 + q + q^2 + q^3)$$
$$s_4 = a_0 \ (1 + q + q^2 + q^3 + q^4)$$

Jedes Element s enthält das erste Element a_0 als Faktor und dann eine Summe der Potenzen von q , bist zur Höhe de jeweiligen Index von s. Dieser Indes der Folge s_k wird bei der zukünftigen Berechnung die Anzahl der Jahre sein. Jetzt wäre es natürlich nützlich eine kürzere Formel für die Summe der Potenzen von s_k zu finden, da mit zunehmender Anzahl die Summenbildung immer aufwendiger wird.

Es gilt folgende Formel, die man als Erweiterung der 3. Binomischen Formel ansehen kann:

$(a^n - b^n) = (a - b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}\,b^1 + a^{n-3}\,b^2 + \ldots + a\,b^{n-1} + b^{n-1})$

Wendet man diese Formel auf den obigen Sachverhalt an und setzt dabei a = 1 und b = q, dann ergibt sich folgende Formel:

$$(1 - q^n) = (1 - q)\,(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1})$$

Dabei ist zu beachten, dass die höchste in der summierten Reihe um eins niedriger ist als die Potenz auf der linken Seite, so dass man für die Summe s_n der Reihe bis zu einem beliebigen Index n folgende Formel angeben kann:

$$\boxed{s_{n-1} = a_0(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}) = a_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Diese Formel verringert den Rechenaufwand bei der Berechnung von Zinseszins Aufgaben.

11.3.2 Ratensparen

Beim Ratensparen kann man generell am Anfang eine beliebige Summe einzahlen und nur in den Folgejahren eine konstante Summe dazusparen. Die bisherigen Prüfungsaufgaben haben davon keinen Gebrauch gemacht. Es wird immer davon ausgegangen, dass der erste eingezahlt Betrag auch in Höhe der Rate erfolgt. Deshalb soll hier auch nur dieser Fall betrachtet werden.

(Ende 0. Jahr =)

Anfang 1. Jahr		$K_0 = R$
Ende 1. Jahr	:	$K_1 = K_0 + Z = R + R \cdot p = R\,(1 + p) = R\,q$
Anfang 2. Jahr	:	$K_2' = R\,(1 + p) + R = R\,(1 + 1 + p) = R\,(1 + q)$
Ende 2. Jahr	:	$K_2 = K_2' + Z = R\,(1+q) + R\,(1+q) \cdot p = R\,(1+q) \cdot q$
		$= R\,(q + q^2)$
Anfang 3. Jahr	:	$K_3' = R\,(q + q^2) + R = R\,(1 + q + q^2)$
Ende 3.Jahr	:	$K_3 = K_3' + Z = R\,(1 + q + q^2) + R\,(1 + q + q^2) \cdot p$
		$= R\,(1 + q + q^2) \cdot (1 + p)$
		$= R\,(1 + q + q^2) \cdot q$
		$= R\,(q + q^2 + q^3)$

Es ist zu erkennen, dass sich in der Klammer eine geometrische Reihe entwickelt. Allerdings beginnt diese geometrische Reihe nicht mit 1, wie es sein muss, sondern mit q. Aber in der Klammert lässt sich aus allen Summanden ein Faktor q mit ausklammern, so dass man die Formel umschreiben kann zu:

$$= R\,q\,(1 + q + q^2)$$

Die höchste Potenz in der Klammer ist jetzt 2, aber es sind 3 Jahre verstrichen. In der Summenformel der geometrischen Reihe erscheint aber die Potenz um 1 höher als die höchste Potenz der aufsummierten Potenzen. Deshalb kann man für die 3 Jahre folgende Summenformel aufstellen:

$$K_3 = R \cdot q(1+q+q^2) = R \cdot q \cdot \frac{1-q^3}{1-q}$$

Für drei Jahre erscheint in der Summenformel auch die Potenz 3. Außer der konstanten Rate ist noch einmal der Faktor q aus der Summe ausgeklammert. Damit kann man für eine beliebige Anzahl n von Jahren folgende allgemeine Summenformel angeben:

$$\boxed{K_n \;=\; R \cdot q \cdot (1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}) \;=\; R \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Ein Auflösen dieser Formel nach q oder n ist nicht möglich. Die einzige Möglichkeit ist ein Auflösen der Formel nach der Rate R. Diese Auflösung hätte dann folgendes Aussehen:

$$R \;=\; \frac{K_n}{q} \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$$

11.4. Darlehensrechnung

Bei der Darlehensrechnung geht es darum, dass sich jemand bei der Bank Geld leiht und nicht, dass er welches anlegt. Die Zinsen sind dann als Leihgebühr, zusätzlich zu dem geliehenen Betrag an die Bank zu zahlen.
Bei Darlehen, im Gegensatz zum Kleinkredit im nächsten Abschnitt, erfolgt die Rückzahlung in Raten, die nach Zinsen und Tilgungsbetrag aufgeteilt werden, da die Rückzahlung meist über mehrere Jahre läuft. Ein fundamentales Merkmal dieser Rechnung ist, dass der Zinssatz über die gesamte Laufzeit der Jahre konstant bleibt, aber die Zinsen selbst sich verringern. Das liegt daran , dass durch den Tilgungsbetrag die Schuld bei der Bank von Jahr zu Jahr abnimmt und damit auch die Zinskosten geringer werden. Da die Rückzahlungsraten aber konstant bleiben, wird der Anteil der Tilgung immer größer. Damit ändern sich jedes Jahr die Zinsbeträge, die Tilgungsanteile und die verbleibende Restschuld. Dieses enge Geflecht der drei Beträge lässt sich schwer in kompakte Formeln fassen, deshalb ist es empfehlenswert für diese Rechnung eine Tabelle anzulegen. Folgende Tabelle hat sich, auch in Reihenfolge, bei den Berechnungen bewährt:

Jahr	Restschuld zu Beginn des Jahres	Rate	Zinssatz	Zinsen	Tilgung	Restschuld am Ende des Jahres
1						
2						

- Am Anfang beträgt die Restschuld den gesamten Kreditbetrag, sie **ändert sich** während der gesamten Laufzeit
- Die Rate ist eine jährliche **konstante** Zahlung an die Bank
- Der Zinssatz wird von der Bank bei der Kreditaufnahme festgelegt und ist **konstant**
- Die Zinsen berechnen sich aus der verbleibenden Restschuld und dem festgelegten Zinssatz. Die Zinsen **ändern sich** während der gesamten Laufzeit.
- Die Tilgung ist der verbleibende Betrag, wenn man von der Rate die Zinsen subtrahiert hat. Damit **ändert sich** auch die Tilgung ständig.
- Die Restschuld am Ende des Jahres berechnet sich aus der Schuld am Anfang des Jahres minus der Tilgung. Da sich die Tilgung ändert, **ändert sich** auch die Restschuld.

Musterbeispiel

Ein Kredit in Höhe von 120 000€ soll in 6 Jahren zurückgezahlt werden.
Die Rückzahlungsrate beträgt 26750,37€ und der Zinssatz liegt bei 9%

Jahr	Restschuld (zu Beginn des Jahres) = Restschuld des Vorjahres	Rate konstant	Zinssatz	Zinsen	Tilgung = Rate – Zinsen	Restschuld (am Ende des Jahres) = Restschuld – Tilgung
1	120000	26750,37	0,09	10800	15950,37	104049,63
2	104049,63	26750,37	0,09	9364,47	17385,91	86663,72
3	86663,72	26750,37	0,09	7799,73	18950,64	67713,08
4	67713,08	26750,37	0,09	6094,18	20656,2	47056,88
5	47056,88	26750,37	0,09	4235,12	22515,25	24541,63
6	24541,63	26750,37	0,09	2208,75	24541,63	0

- Die Berechnung der Zinsen bezieht sich immer auf den verbleibenden Restschuldbetrag am Anfang der Zeile: $Z_k = RSA_k \cdot p$
- Die Tilgung berechnet sich immer aus Rate – Zinsen in diesem Jahr: $T_k = R - Z_k$
- Die verbleibende Restschuld am Ende des Jahres ergibt sich aus der Schuld am Anfang des Jahres minus der Tilgung: $RSE_k = RSA_k - T_k$
- Die Restschuld am ende eines Jahres wird zur Anfangsschuld im nächsten Jahr: $RSA_{k+1} = RSE_k$

Die blau umrandeten Spalten geben die Werte an, die sich ändern, die rot umrandeten Spalten geben die die werte an, die konstant bleiben.

11.5. Kleinkredit

Kleinkredite sind von der Sache her das gleiche wie Darlehen. Da aber bei Kleinkrediten sowohl die Beträge als auch die Laufzeit geringer ist, wird nicht ein solcher Rechenaufwand betrieben. Faktisch findet keine teilweise Tilgung mit der Rückzahlung statt, so dass nur ein Zinsbetrag berechnet wird, der dann auf die Laufzeit gleichmäßig aufgeteilt wird.
Die Aufnahme eines Kleinkredits bei der Bank besteht aus drei Teilen:

Kreditsumme Zinsen Bearbeitungsgebühr

Dabei erfolgt die Berechnung der Zinsen etwas anders als bei einer Darlehensaufnahme: Der Zinssatz wird als Monatszins festgelegt und ist deshalb vom wert her sehr klein, meist im 0,00... Bereich. Für den ursprünglichen Jahreszins müsste man diesen Betrag mit 12 multiplizieren, dh. die Bank teilt ihren üblichen Zinssatz durch 12 und daraus ergibt sich der Monatszins festgelegt. Dann berechnen sich die Zinsen aus:

Zinsen = Kreditsumme • Zinssatz pro Monat • Anzahl der Monate

Es ist also hier nicht mit der auf Monate erweiterten Zinsformel zu rechnen.
Die Bearbeitungsgebühr ist ein fester Betrag der sich meist als konstanter Prozentsatz auf die Kreditsumme bezieht. Deshalb ist eine Formulierung wie „ die Bearbeitungsgebühr beträgt 2% von der Kreditsumme“ eine durchaus übliche Formulierung. Dieser

Betrag hat keinen Einfluß auf die Zinsen, dh. er wird zur Zinsberechnung nicht der Kreditsumme hinzugeschlagen. Zinsen werden nur aus der Kreditsumme bestimmt. Damit sind die Gesamtkosten des Kleinkredits zusammengefasst:

Kreditsumme + Zinsen + Bearbeitungsgebühr = Gesamtbetrag

Dieser Gesamtbetrag wird jetzt durch die Anzahl der Monate dividiert, die als Laufzeit des Kredits vereinbart wurden. Damit ergibt sich die monatliche Rückzahlungsrate.

Kreditsumme + Zinsen + Bearbeitungsgebühr = Rückzahlungsrate * Anzahl der Monate

Je nach dem Wert, der zu berechnen ist, ist diese Formel entsprechend umzustellen.