# 2. Termrechnen

## 2.1. Terme

Terme sind Rechenausdrücke aller Art, z. B. $2 + 3$; $5 \cdot 2$; $(2 – 4):2,5$; $2 – 4:2,5$ usw. Jeder Term ist von einer bestimmten Rechenart (+, -, ·, :) und ist deshalb eine Summe, eine Differenz, ein Produkt oder ein Quotient (siehe 1. Zahlenrechnen; Kap. 1.1). Der Term bekommt damit als Termnamen den Namen der Rechenart.

Beachte: Die Rechenart richtet sich danach, **welche Rechnung als letzte durchgeführt wird**.

Beispiele: Der Term $2 + 3$ ist eine **Summe** (da eh nur eine Plusrechnung vorkommt).
Der Term $5 \cdot 2$ ist ein **Produkt**.
Der Term $(2 – 4):2,5$ ist ein **Quotient**, da zuerst die Differenz in der Klammer berechnet werden muss und damit als letzte Rechnung die Division übrig bleibt.
Der Term $2 – 4:2,5$ ist dagegen eine **Differenz**, da die Regel „Punktrechnung vor Strichrechnung" gilt, und somit zuerst die Division $4:2,5$ berechnet werden muss, bevor die Subtraktion ausgeführt wird.

Beim Rechnen mit Termen kommen die beiden **Grundaufgaben** vor:
(1) den **Termwert berechnen** und
(2) den **Term gliedern**.

### 2.1.1. Den Termwert berechnen

Beim Berechnen des Termwerts wird der Term schrittweise unter Einbehaltung der geltenden Rechenregeln (siehe 1. Zahlenrechnen; Kap. 1.1) vereinfacht. Die Zahl, die sich am Ende ergibt, ist der Termwert bzw. Wert des Terms.

Beispiele: Beim Term $2 + 3$ rechnet man: $2 + 3 = 5$. Der Termwert ist 5.
Beim Term $5 \cdot 2$ rechnet man: $5 \cdot 2 = 10$. Der Termwert ist 10.
Beim Term $(2 – 4):2,5$ rechnet man: $(2 – 4):2,5 = (–2):2,5 = –0,8$.
Der Termwert ist –0,8.
Beim Term $2 – 4:2,5$ rechnet man: $2 – 4:2,5 = 2 – 1,6 = 0,4$.
Der Termwert ist 0,4.

Hinweis: Bei längeren Termen kann man ggfs. innerhalb eines Rechenschritts mehrere Vereinfachungen vornehmen. Unveränderte Teile werden auch unverändert übernommen.

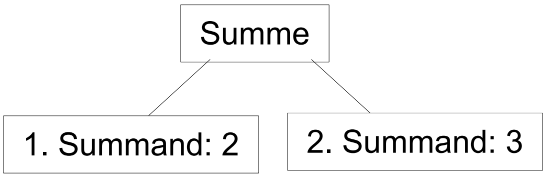
$$10 – 4\,(2\tfrac{1}{2} : 5 + 0{,}8 \cdot 0{,}5) + 0{,}5^2 = 10 – 4\,(\tfrac{1}{2} + 1{,}2) + 0{,}25 = 10{,}25 – 4 \cdot 1{,}7 = 10{,}25 – 6{,}8 = 3{,}45$$

Hier wurde jeweils im gleichen Schritt vereinfacht

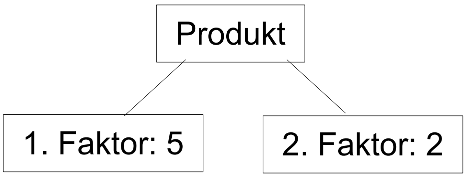
### 2.1.2. Den Term gliedern

Hierbei wird der Term in seine einzelnen Bestandteile aufgelöst. Den Term kann man dabei als Baumdiagramm angeben.

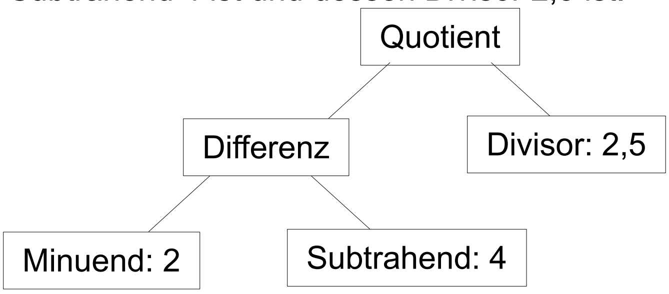
Beispiele: Der Term 2 + 3 ist eine Summe mit dem 1. Summanden 2 und dem 2. Summanden 3.



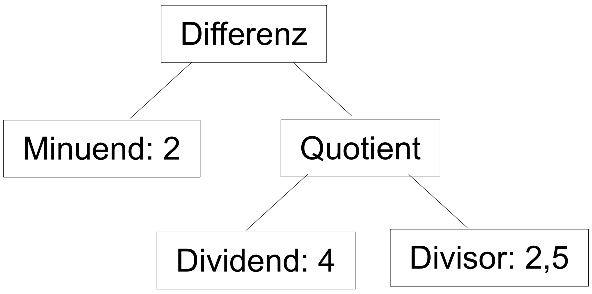

Der Term $5 \cdot 2$ ist ein Produkt mit dem 1. Faktor 5 und dem 2. Faktor 2.




Der Term (2 – 4):2,5 ist ein Quotient, dessen Dividend die Differenz mit dem Minuend 2 und dem Subtrahend 4 ist und dessen Divisor 2,5 ist.




Der Term 2 – 4:2,5 ist eine Differenz, dessen Minuend 2 ist und dessen Subtrahend der Quotient mit dem Dividend 4 und dem Divisor 2,5 ist.



## 2.2. Terme mit Variablen

Oft verwendet man bei Termen an Stelle einer Zahl einen Platzhalter für Zahlen, eine sogenannte Variable. Für Variablen werden Zeichen wie  , O, . . ., meist jedoch Buchstaben a, b, c, x, y, ... verwendet.

Beispiele: Terme wie $2 + x$; $5 \cdot x$; $(a – b):2{,}5$; $a – b:c$ sind Terme mit Variablen.

### 2.2.1. Terme mit einer Variablen

Für einen Term, der von der Variablen x abhängt, schreibt man kurz: T(x) (gelesen: „T von x“).

Beispiel: $T(x) = 2 + x$

**Hinweis:**
Die Grundaufgabe „Termwert berechnen“ kann nicht in gleicher Weise wie in 2.1 durchgeführt werden, da Terme mit Buchstaben keinen Wert haben können.
Ein Rechenausdruck wie 2 + x kann nicht „berechnet“ werden kann, sondern bleibt so stehen.
Setzt man jedoch für die Variable eine konkrete Zahl ein, so nimmt der Term für diese Zahl einen bestimmten Wert an.

Die Menge der Zahlen, die man in einen Term einsetzen darf, heißt **Grundmenge G** des Terms.

Beispiel: Gegeben sei der Term $T(x) = 2 + x$ mit der Grundmenge $G = \mathbb{N}_0$.

Dann ergibt sich für verschiedene Einsetzungen jeweils der Wert des Terms. Zum

Beispiel:
$T(0) = 2 + 0 = 2$ $T(1) = 2 + 1 = 3$ $T(2) = 2 + 2 = 4$ $T(3) = 2 + 3 = 5$
Der Term nimmt also u.a. die Werte 2; 3; 4; 5 an. Offensichtlich ergeben sich als Werte alle natürlichen Zahl, die größer als 1 sind.

Beispiel: Gegeben sei der Term $T(x) = 5 \cdot x$ mit der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$.
Hier kann man nur exemplarisch einige Termwerte berechnen. Zum Beispiel:
$T(0) = 5 \cdot 0 = 0$ $T(1) = 5 \cdot 1 = 1$ $T(2) = 5 \cdot 2 = 10$
$T(-3) = 5 \cdot (-3) = –15$ $T(0{,}84) = 5 \cdot 0{,}84 = 4{,}2$ usw.
Welche Werte werden angenommen? Offensichtlich kommen alle rationalen Zahlen als Werte des Terms vor.

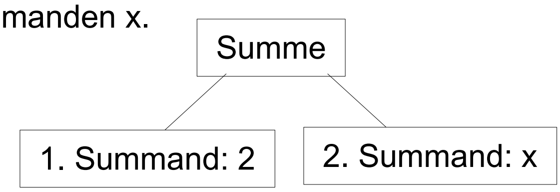
**Hinweis:**
Solange keine Einschränkungen gegeben sind, wird die Grundmenge häufig die Menge der rationalen bzw. reellen Zahlen sein.
In einzelnen Fällen kann es jedoch notwendig sein, die Grundmenge sinnvoll einzuschränken. Ein häufiger Grund für eine Einschränkung ist, dass eine Division durch 0 nicht erlaubt ist.

Die Menge der Zahlen, die in einen Term eingesetzt werden dürfen, heißt **Definitionsmenge D** des Terms.

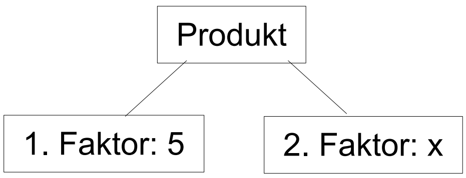
Beispiel: Gegeben sei der Term T(x) = 1:x.
Da eine Division durch 0 nicht erlaubt ist, darf 0 nicht in den Term eingesetzt werden. Alle anderen rationalen (oder reellen) Zahle sind erlaubt.
Deshalb hat der Term die Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ (gelesen: „ $\mathbb{Q}$ ohne 0“).

**Hinweis:**
Die 2. Grundaufgabe für Terme „den Term gliedern“ ist auch für Terme mit Variablen möglich, da es hierbei nicht auf die einzelnen Zahlen bzw. Variablen ankommt, sondern auf die Struktur des Terms.

Beispiele: Der Term T(x) = 2 + x ist eine Summe mit dem 1. Summanden 2 und dem 2. Summanden x.




Der Term $T(x) = 5 \cdot x$ ist ein Produkt mit dem 1. Faktor 5 und dem 2. Faktor x.




### 2.2.2. Terme mit mehreren Variablen

Bestehen Terme aus mehreren Variablen und Zahlen, ohne, dass zwischen diesen Rechenzeichen angegeben sind, dann sind diese immer durch Multiplikation verbunden. Dabei sollte man darauf achten, dass die Zahlen immer am Anfang stehen und die Variablen in alphabetischer Reihenfolge sortiert sind. Terme der Form ab23zh sind grundsätzlich zu vermeiden, da sie mißverständlich sind: Was ist mit 23 ? Ist das eine ganze Zahl (=23) und ist das als 2•3 zu interpretieren. Eine zahl am Anfang ist grundsätzlich als eine zahl zu werten und niemals als ein Produkt. Soll es als Produkt gelesen werden, dann muß ein Multiplikationszeichen zwischen den Zahlen stehen:
127 abxy bedeutet als Faktor 127 zum Unterschied von 12•7adh.
Die Variablen gelten grundsätzlich als Faktoren miteinander verbunden. Die alphabetische Reihenfolge der Variablen erleichtert das Erkennen gleichartiger Terme und damit das mögliche Zusammenfassen.

### 2.2.3. Gleichartige Terme

Beim Vereinfachen von Termen spielen die **gleichartigen Terme** eine grundlegende Rolle:

**Definition:** Terme sind **gleichartig**, wenn sie aus der gleichen Kombination von Variablen bestehen

Beispiele: Die Terme 2x und 3x sind gleichartig, da sie jeweils aus nur einem x bestehen.
Die Terme xy und yx sind ebenfalls gleichartig, dagegen sind xy und xz nicht gleichartig.

**Hinweis:**
Kombinationen von Variablen sollten grundsätzlich in alphabetischer Reihenfolge angegeben werden, also ab statt ba, x2y statt yx2 usw.
Zahlen werden grundsätzlich vor den Buchstaben geschrieben, also 2x und nicht $x \cdot 2$.
Die Zahlen vor den Buchstaben nennt man Beizahlen oder Koeffizienten.

## 2.3. Vereinfachen von Termen

### 2.3.1. Zusammenfassen einfacher Terme

Eine der weiteren Grundaufgaben beim Termrechnen besteht im Vereinfachen von Termen.
Beim Vereinfachen von Termen gilt die Grundregel:

Nur **gleichartige Terme** können **zusammengefasst** werden

Beispiele: Die Terme 2x und 3x sind gleichartig und können deshalb zusammengefasst werden, also $2x + 3x = 5x$ bzw. $7x – 3x = 4x$

Dagegen lässt sich der Term $2a + 3b$ nicht zusammenfassen und bleibt somit so stehen.

**Hinweis:**
Dieses Zusammenfassen ist intuitiv, wenn man z. B. an die Addition zweier Geldbeträge denkt, wie 2€ + 3€ = 5€, oder an die Addition zweier Streckenlängen, wie 2m + 3m = 5m.
Der Term 2a + 3b ist vergleichbar mit der Addition von 2 Äpfeln und 3 Birnen. Das sind weder 5 Äpfel noch 5 Birnen, sondern eben „2 Äpfel und 3 Birnen“.

Genauer steckt hinter dem Zusammenfassen gleichartiger Terme das Distributivgesetz $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (vgl. 1.2), hier aber von rechts nach links gelesen, also $a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c$. Da in der Klammer nur noch Zahlen stehen, lassen diese sich addieren bzw. subtrahieren. Also:

$$2x + 3x = (2 + 3)x = 5x \quad \text{bzw.} \quad 7x – 3x = (7 – 3)x = 4x$$

Damit gilt:

Beim Zusammenfassen gleichartiger Terme werden die Koeffizienten addiert oder subtrahiert und die Variablen bleiben erhalten.

**Hinweis:**
Damit rechnet man genauso wie beim „normalen“ Zahlenrechnen, d. h. es gelten alle Rechenregeln wie für das Zahlenrechnen (vgl. 1. Kapitel). Insbesondere gelten damit alle Rechenregeln wie „Klammerregeln“, „Punkt vor Strich“ usw., alle Regeln übers Rechnen mit ganzen Zahlen, Brüchen usw. sowie die Grundgesetze KG, AG und DG.
Daraus leiten sich die praktischen Rechenschritte ab.

### 2.3.2. Vereinfachen von Summen und Differenzen

Benennung der Terme bei der Addition: Summand + Summand = Summe
Benennung der Terme bei der Subtraktion: Minuend – Subtrahend = Differenz

**Kommutativgesetz der Addition**
(Vertauschungsgesetz)

$$\boxed{a + b = b + a}$$

Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Zahlen oder Variablen addiert werden.

**Assoziativgesetz der Addition**

$$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

(Verbindungsgesetz)

Die Subtraktion ist die Addition mit der Gegenzahl. Deshalb lassen sich alle Subtraktionen auf Additionen zurückführen.

**Vorzeichenregeln**
Bei der Addition und Subtraktion haben die Zahlen oder Variablen Vorzeichen, diese treffen mit den Operationszeichen zusammen.

$$5+(-8)=-3$$

Vorzeichen
Operationszeichen

Vorzeichen und Operationszeichen haben die gleiche Wertigkeit. Deshalb können sie ineinander übergeführt werden. Aus Vorzeichen werden Operationszeichen und aus Operationszeichen werden Vorzeichen. Für die Behandlung von Vor- und Operationszeichen gelten folgende Regeln:

Regel:

**+ (+a) = + a**
**+ (–a) = – a**
**– (+a) = – a**
**– (–a) = + a**

Beispiel:

$$3\bullet a+(+5\bullet a)=8\bullet a$$
$$3\bullet a+(-5\bullet a)=-2\bullet a$$
$$3\bullet a-(+5\bullet a)=-2\bullet a$$
$$3\bullet a-(-5\bullet a)=8\bullet a$$

Bei der Addition und Subtraktion können nur gleichartige Terme zusammengefasst werden. Die Zusammenfassung erfolgt so, dass die Zahlen vor den Variablen zusammengefasst werden und die Variablen übernommen werden (siehe vorheriger Abschnitt).

**Hinweis:**
Im Hinblick auf das Zusammenfassen komplizierterer Terme, wie es weiter unten noch vorkommen wird, bietet es sich an, Terme in „Blöcke“ einzuteilen und diese zu markieren. Ein Block beginnt grundsätzlich mit einem + bzw. – Zeichen. Damit hat sozusagen jeder Block ein Vorzeichen!
Bitte beachten:
Die Bezeichnung Block ist kein offizieller Begriff der Mathematik.
Im Beispiel –5a – 4b + a – 7a – 6b gibt es somit folgende Einteilung in Blöcke: $\underbrace{-5a}\ \underbrace{-4b}\ \underbrace{+a}\ \underbrace{-7a}\ \underbrace{-6b}$ = **–11a – 10b**

Nun lassen sich leicht gleichartige (hier rote und blaue) Blöcke zusammenfassen.

Beispiel: –5a – 4b + a – 7a – 6b
= (–5a + a – 7a) + (– 4b – 6b)
= (–11a) + (–10b)
= –11a – 10b

Hier wurden im 1. Schritt unter Anwendung des KG und AG (vgl. 1.2) die Terme vertauscht und so geordnet, dass gleichartige Terme beieinander stehen und nach dem AG in Klammern geschrieben werden können. Im 2. Schritt wurden die Klammern unter Beachtung der Rechenregeln für die Addition ganzer Zahlen (vgl. 1.3) zusammengefasst. Zuletzt wurden die Terme ohne Klammern geschrieben.

Beispiel:

$$2\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y - 1\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 2\frac{4}{12}x - 1\frac{9}{12}x + \frac{3}{15}y + \frac{10}{15}y = \frac{16}{12} \ 1\frac{13}{15}x + \frac{7}{12}y = \frac{13}{15}x + y$$

Beim Umstellen der Terme wurde gleich berücksichtigt, dass die entsprechenden Brüche gleichnamig gemacht werden, wie es den Regeln des Bruchrechnens (vgl. 1.4) entspricht.

### 2.3.3. Vereinfachen von Termen mit Klammern

Vorbemerkung: Einen Term wie 2a – 3b wird man üblicherweise als Differenz betrachten. Da die Subtraktion einer Zahl als Addition ihrer Gegenzahl betrachtet werden kann (vgl. 1.3), kann jede Differenz als Summe gesehen werden, also: 2a – 3b = 2a + (–3b). Damit gibt es praktisch nur Summen und jedes Rechenzeichen wird als Vorzeichen des Summanden gesehen. Steht vor einem Term kein Rechenzeichen, so ist ein Pluszeichen davor zu sehen. Also:
Die Differenz 2a – 3b wird als Summe +2a + (–3b) gesehen.
Der 2. Summand hat damit ein negatives Vorzeichen.

**Terme mit Klammern** werden so vereinfacht, dass zunächst innerhalb einer Klammer so weit wie möglich gleichartige Terme zusammengefasst werden. Danach werden die Klammern aufgelöst.

Beim Auflösen von Klammern gilt:

- Steht **vor der Klammer ein Pluszeichen**, kann man die Klammer einfach weglassen
- Steht **vor der Klammer ein Minuszeichen** so werden beim Weglassen der Klammer die Rechenzeichen (=Vorzeichen) von **allen Termen** in der Klammer umgekehrt.

Es gibt folgende Grundformen des Klammerauflösens:

- $\mathbf{a + (b + c) = a + b + c}$
- $\mathbf{a + (b - c) = a + b - c}$
- $\mathbf{a - (b + c) = a - b - c}$
- $\mathbf{a - (b - c) = a - b + c}$
- $\mathbf{a - (-b + c) = a + b - c}$

Beispiele: $a + (5a - b) = a + 5a - b = 6a - b$ + vor der Klammer!
$a - (5a - b) = a - 5a + b = -4a + b$ – vor der Klammer, deshalb Vorzeichen vertauschen!

$(8x + 2y - 4y - 3x) - (5x - y + 2x) =$
$(5x - 2y) - (7x - y) = 5x - 2y - 7x + y = -2x - y$

Hier wurde zuerst in den Klammern vereinfacht bevor diese aufgelöst wurden.

### 2.3.4. Vereinfachen von Produkten

Die bisherigen Terme waren Summen oder Differenzen. Daneben gibt es Produkte als Terme.

**Hinweis:**
Den Malpunkt lässt man bei Produkten meistens weg
Man schreibt also kurz $2a$ für $2 \cdot a$, $ab$ für $a \cdot b$ usw.

**Hinweis:**
Ein Produkt mit lauter gleichen Faktoren schreibt man als Potenz (vgl. 1.1), z. B. $a \cdot a \cdot a = a^3$.

**Kommutativgesetz der Multiplikation**
(Vertauschungsgesetz)

$\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$

**Assoziativgesetz der Multiplikation**
(Verbindungsgesetz)

$\mathbf{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$

**Hinweis:**
Da für die Multiplikation auch die Grundgesetze Kommutativgesetz und Assoziativgesetz gelten, ist es möglich die Faktoren zu vertauschen und sie neu zu ordnen.
Diese Möglichkeiten wendet man an, um jeweils die reinen Zahlen und die Buchstaben zusammenzufassen. Während sich die Zahlen lassen ausmultiplizieren lassen, bleiben die Buchstaben lediglich als Buchstabenkombination stehen.

Beispiele: $2 \cdot a = 2a$ Weglassen des Malpunkts.
$a \cdot b \cdot a = a \cdot a \cdot b = a^2b$ Gleiche Buchstaben als Potenz schreiben.
$2x \cdot 3y = (2 \cdot 3) \cdot (x \cdot y) = 6xy$ Anwendung des KG und AG; Zahlen multiplizieren.

$2x \cdot (-3y) = -(2 \cdot 3) \cdot (x \cdot y) = -6xy$ Das gemeinsame Vorzeichen aller Faktoren nach vorne stellen.
$(2x \cdot 3y) \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot xy = 24xy$ Keine Besonderheit.

**Vorzeichenregeln:**
Die Vorzeichenregeln für die Multiplikation sind mit den Regeln der Addition und Subtraktion identisch. Treffen zwei Plus oder Minuszeichen aufeinander, dann ist das Ergebnis positiv. Treffen unterschiedliche Vorzeichen aufeinander, dann ist das Ergebnis negativ.

$$(+a) \bullet (+b) = a \bullet b$$
$$(-a) \bullet (+b) = -a \bullet b$$
$$(+a) \bullet (-b) = -a \bullet b$$
$$(-a) \bullet (-b) = a \bullet b$$

Die Vorzeichenregeln sind ein Spezialfall der Klammerrechnung, die in einem späteren Abschnitt beschrieben wird.

Das **Vereinfachen von Produkten** geschieht somit in 3 Schritten:

1. **Schritt:** gemeinsame Vorzeichen aller Faktoren bestimmen und nach vorne stellen
2. **Schritt:** Beizahlen ausmultiplizieren
3. **Schritt:** Buchstaben alphabetisch ordnen, gegebenenfalls Potenzen bilden.

**Hinweis:**
Es lassen sich auch Produkte potenzieren. Dabei ist genau darauf zu achten, welche Zahlen und Buchstaben tatsächlich potenziert werden.
Es gilt die Regel: Potenzrechnung vor Punktrechnung!

Beispiele: $(x^3)^2 = x^3 \cdot x^3 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^6$ x wir hoch 3 genommen und das Ergebnis quadriert, damit wird x insgesamt 6mal mit sich selbst multipliziert.

$(2a)^2 = 2a \cdot 2a = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a = 4a^2$ Alles in der Klammer wird potenziert.

$2a^2 = 2 \cdot a \cdot a = 2a^2$

Nur der Term a wird potenziert, d.h. der Term bleibt hier unverändert.

$5x^3 \cdot (-2y)^2 = 5x^3 \cdot 4y^2 = 20x^3y^2$

Regel beachten: Potenz- vor Punktrechnung! Somit wird zuerst –2y quadriert und liefert $4y^2$; danach geht´s „normal“ weiter.

$(3x^2y)^3 = 3^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = 27x^6y^3$

Jeder Faktor in der Klammer wird potenziert.

**Hinweis:**
Zum Teil kommen auch Quotienten als Terme vor, wie z.B. $8x^2y:2x$.
Hier gelten die bekannten Regeln für das Vorzeichen und die Beizahlen.
Bei den Buchstaben lassen sich gleiche Buchstaben „kürzen“, da man den Quotient als Bruch deuten kann.

Beispiel: $8x^2y : 2x = (8:2) \cdot (x^2y:x) = 4xy$

## 2.3.5. Addieren von Produkten

Kompliziertere Terme sind Summen, deren einzelne Summanden Produkte sind. Dabei kann praktisch auch eine Differenz vorkommen, die aber nach 2.3.2 als Summe betrachtet werden kann bzw. betrachtet werden muss.
Um kompliziertere Terme zu vereinfachen, muss man zunächst erkennen, was die einzelnen Summanden sind. Diese erkennt man leicht, wenn man den Term in die in 2.3.1 eingeführten Blöcke einteilt. Denn: Jeder Block beginnt mit einem Plus- oder Minuszeichen und das entspricht genau den Summanden.

Beispiele:

| | |
|---|---|
| $2a \cdot b + a \cdot 3b = 2ab + 3ab = 5ab$ | Es gibt 2 Blöcke und damit 2 Summanden; jeder Summand ist ein Produkt, welches sich nach den Regeln von 2.3.3 vereinfachen lässt; nun liegen 2 gleichartige Terme „ab“ vor, die sich nach den Regeln von 2.3.1 zusammenfassen lassen. |
| $2a \cdot b - a \cdot 3a = 2ab - 3a^2 = -3a^2 + 2ab$ | Es gibt wieder 2 Blöcke und damit 2 Summanden; jeder Summand ist wieder ein Produkt; diesmal sind die Terme nicht gleichartig und können deshalb nicht zusammengefasst werden; sie werden jedoch alphabetisch geordnet, wobei „$a^2$“ (=aa) vor „ab“ kommt. |
| $5x^2 - (3x)^2 = 5x^2 - 9x^2 = -4x^2$ | 2 Blöcke, wobei einer eine Potenz ist (vgl. 2.3.3); achte auf das Vorzeichen des 2. Summanden! |
| $9x^3 - (-2x)^3 = 9x^3 + 8x^3 = 17x^3$ | wie oben; achte wieder auf das Vorzeichen des 2. Summanden! |

Beispiel:

$$a^2 \cdot 3b \cdot 4a \cdot 2c + 2b \cdot ca^2 \cdot 5a - 4ca^3 \cdot 3b - ab \cdot a^2c$$
$$= 24a^3bc + 10a^3bc - 12a^3bc - a^3bc = 21a^3bc$$

4 Blöcke damit 5 Summanden, denen man erst nach Vereinfachen der Produkte ansieht, dass sie gleichartige Terme darstellen.

Beispiel:

$$a^2 \cdot 3b \cdot 4a + 2b \cdot ca^2 - a^3 \cdot 3b - ab \cdot 2c \cdot a + 5b \cdot (-5a)^2$$
$$= \underbrace{12a^3b} + \underbrace{2a^2bc} \underbrace{- 3a^3b} \underbrace{- 2a^2bc} + \underbrace{5b \cdot 25a^2} = 12a^3b + 125a^2b$$

5 Blöcke damit 5 Summanden; die gleichfarbig markierten Summanden stellen gleichartige Terme dar, wobei die blau markierten Summanden zusammen 0 ergeben und damit beim Ergebnis nicht mehr auftauchen; der grün markierte Summand kann ggfs. in einem Schritt berechnet werden.

## 2.4. Umformen von Termen

### 2.4.1. Umformen mit dem Distributivgesetz

Das Distributivgesetz schafft die Verbindung zwischen Multiplikation und Addition. Solange man sich in der gleichen Hierarchiestufe bewegt, entweder nur Addition und Subtraktion, oder nur Multiplikation und Division sind die Regeln klar. Wie sind aber zwei verschiedene Hierarchiestufen zu bearbeiten. Die Multiplikation besitzt gegenüber der Addition den Vorrang. Klammern können die Reihenfolge der Hierarchien verändern. Soll man eine Klammer mit reinen Zahlen berechnen, ist das noch recht einfach: $4 \cdot (3 + 2) = 4 \cdot 5 = 20$. Man berechnet zuerst die Klammer als höchste Hierarchie und dann die Multiplikation. Was soll man aber mit einer Klammer $4 \cdot (2a + 3b)$ machen. Hier lässt sich die Klammer nicht zusammenfassen, da es keine gleichartigen Terme sind. Wie mit solchen Klammerausdrücken umzugehen ist, bestimmt das Distributivgesetz.

**Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)**

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

**Vorzeichenregeln**

$$(+a) \cdot (+b) = a \cdot b$$
$$(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$$
$$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$$
$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

In Verbindung des Distributivgesetzes mit den Vorzeichenregeln beim Multiplizieren lassen sich alle Klammerausdrücke berechnen.

**Distributivgesetz von links nach rechts**

Soll eine Summe oder Differenz mit einem Faktor multipliziert werden, der vor einer Klammer steht, ist jeder Summand mit dem Faktor zu multiplizieren. Dabei sind dir Vorzeichenregeln der Multiplikation zu beachten.

**Distributivgesetz von rechts nach links**

Lassen sich die einzelnen Summanden eines Summenausdrucks in Faktoren zerlegen, so dass mehrere Summanden den gleichen Faktor besitzen, kann dieser Faktor als gemeinsamer Faktor vor eine Klammer geschrieben werden, Der Wert der Summenden ist durch diesen Faktor zu dividieren. Dabei ist es auch möglich ein Minuszeichen mit auszuklammern. Dann sind zusätzlich vor allen Summanden die Vorzeichen zu wechseln: von + nach – und von – nach +.

Bei der Anwendung des Distributivgesetzes von links nach rechts spricht man von Ausmultiplizieren. In dieser Richtung bedeutet die Benutzung des Distributivgesetzes, dass man die Klammern beseitigt. Man beendet die durch die Klammern erzwungene Veränderung der Hierarchie der Operationen. Diesen Weg beschreitet man, wenn es darum geht einen mit Klammern vorhandenen Ausdruck zusammenzufassen und damit die Anzahl der einzelnen Glieder reduzieren will.

Bei der Anwendung des Distributivgesetzes von rechts nach links spricht man von Ausklammern. Ziel ist es, in einer Reihe von Summanden einen Faktor zu finden, der als Faktor in jedem Summanden vorhanden ist. Dabei ist es durchaus üblich, die Summanden so zusammenzustellen, dass wenigstens aus einigen ein gemeinsamer

Faktor gefunden werden kann, wenn nicht alle Summanden einen gemeinsamen Faktor besitzen. Auch das mach einen großen Term übersichtlich und bei Brüchen ist dieses Vorgehen die Voraussetzung, dass man durch Kürzen im Zähler und Nenner die Brüche verkleinern kann.

Faktorisieren ist eine Tätigkeit die viel Übung verlangt, da Sie z.T. erst durch probieren zum gewünschten Ergebnis kommen. Hier werden sechs Fälle unterschieden, diese Sie als Lösungsstrategie anwenden sollten, wenn Sie die Aufgaben bearbeiten.

Fallbeispiele der Faktorisierung

$$am + bm - cm + xm = m \bullet (a + b - c + x)$$

1. Fall: Gemeinsamer Faktor ausklammern

$$2rxu^2 - 2rxu + 2rxv = 2rx \bullet \left(u^2 - u + v\right)$$

2. Fall: Mehrere gemeinsame Faktoren ausklammern

3. Fall: Terme der Form ax-a

$$ax - a = ax - 1 \bullet a = a \bullet (x - 1)$$

In diesem Fall geht es darum, dass beim zweiten Summanden kein Faktor mehr vorhanden ist, der in die Klammer übernommen werden kann. das Weglassen des Ausdrucks führt aber zu einer unerlaubten Veränderung des Terms. Deshalb ist in diesen Fällen in den Klammerausdruck eine „1“ einzufügen, damit der Term auf alle Fälle erhalten bleibt. Eine Multiplikation mit 1 verändert den Wert des Terms nicht.

4. Fall: Ganze Zahlen in Faktoren zerlegen

$$\begin{aligned}&21abx - 6by + 15bz = \\ &3 \bullet 7abx - 2 \bullet 3by + 3 \bullet 5bz = \\ &3b \bullet \left(7ax - 2y + 5z\right)\end{aligned}$$

5. Fall: Faktoren die ausgeklammert werden können auch Summen sein.

Beispiel 1: $a \bullet (x + 1) + b \bullet (x + 1) = (a + b) \bullet (x + 1)$

Beispiel 2: $x + y + ax + ay = 1 \bullet (x + y) + a \bullet (x + y) = (a + 1) \bullet (x + y)$

Beispiel 3: $2ax - 2ay + bx - by - cx + cy = 2a \bullet (x - y) + b \bullet (x - y) - c \bullet (x - y) = (x - y) \bullet (2a + b - c)$

6. Fall: Vorzeichen umkehren

$$(b - a) = (-1) \bullet (-b + a) = (-1) \bullet (a - b)$$

Ein Ausklammern von – 1 bewirkt, dass alle Vorzeichen in der Klammer vertauscht werden müssen.

Beim Umformen von Termen geht es nicht mehr darum, den Term zu vereinfachen, sondern ihm ein neues Aussehen zu geben.

Beispiel: Betrachte einen Term wie $(2 + 3) \cdot 4$.
Da der Term nur aus Zahlen besteht, kann der Termwert auf 2 Arten berechnet werden:
1. Möglichkeit: „herkömmlich“ unter Beachtung der gängigen Regeln, also
$(2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$
2. Möglichkeit: unter Verwendung des Distributivgesetzes (vgl. 1.2), also
$(2 + 3) \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 8 + 12 = 20$

Beispiel: Betrachte einen Term wie $(a + b) \cdot 4$.
Hier kann der Termwert nicht berechnet werden und damit ist eine Vereinfachung des Terms nicht möglich. Der Term kann jedoch unter Verwendung des Distributivgesetzes umgeformt werden:
$(a + b) \cdot 4 = 4a + 4b$

Beispiele: Jeweils durch Anwendung des Distributivgesetz sind folgende Termumformungen möglich: $(a + b) \cdot c = ac + bc$ Grundform des Distributivgesetzes!
$(3x - 4y) \cdot 2x = 3x \cdot 2x - 4y \cdot 2x = 6x^2 - 8xy$
$(20p^2 + 15pq):5p = 20p^2:5p + 15pq:5p = 4p + 3q$

### 2.4.2. Multiplizieren von Summen

Hier geht es um das Ausmultiplizieren zweier Summenterme.
Was ist z.B. $(a + b) \cdot (c + d)$?

Dieses Problem wird auf das Umformen mit dem Distributivgesetz zurückgeführt. Dazu vergleicht man das Multiplizieren mit $(c + d)$ mit dem Multiplizieren mit einem einfacheren Term, z.B. u.
Es gilt: $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$
somit gilt: $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
$= ac + ad + bc + bd$

Hier wurde zweimal das Distributivgesetz angewendet.
Damit gilt als Grundform des Multiplizierens von Summen:

$$\boxed{(a + b) \cdot (c + d) = ac + ab + bc + cd}$$

In Worten:

Beim Multiplizieren von Summen multipliziert man jeden Summanden der 1. Summe mit jedem Summanden der 2. Summe und addiert alle Produkte.

Das Gleiche gilt auch, wenn in einer Klammer mehr als 2 Summanden stehen.
$(a + b + c) \cdot (d + e) = ad + bd + cd + ae + be + ce$
Je größer die Klammerausdrücke, desto wichtiger ist es, sich ein festes Schema anzugewöhnen. Man sollte stets den ersten Summanden der ersten Klammer mit der gesamten zweiten Klammer multiplizieren, dann den zweiten Summanden der ersten Klammer mit der gesamten zweiten Klammer usw. das verhindert, dass man beim Multiplizieren Produkte vergißt. Außerdem sollte beim Ausmultiplizieren nicht gleichzeitig zusammengefasst werden, um die Multiplikation nachvollziehbar zu machen. Das Zusammenfassen der Ausdrücke ist dann einem zweiten Schritt vorbehalten.